УДК 517.53

МАМЕДХАНОВ Дж.И. , ДЖАФАРОВ С.З.

О КОНСТРУКТИВНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ НА КРИВЫХ БОЛЕЕ ОБЩЕГО ВИДА

В настоящей работе в глобальных терминах получена конструктивная характеристика классов функций, определяемых локальными условиями на более общих кривых комплексной плоскости. При получении конструктивного описания классов функций учитывается рост производных рациональных функций. Такую характеризацию классов функций при помощи полиномов, удовлетворяющих дополнительным соотношениям, следуя В.К. Дзякину [4], принято называть аппроксимационной.

Подобный подход на более общих континуумах комплексной плоскости разработан В.В. Андриевским [1], [2].

В данной работе аппроксимационный подход применяется для получения конструктивного описания классов функций $D_{\alpha}^{\beta}(z_0,\Gamma)$, введенных Дж.И.Мамедхановым [3] на кривых более общей природы.

1. Основные определения, обозначения и вспомогательные факты.

Пусть Γ-произвольная ограниченная жорданова кривая с двухкомпонентными дополнениями $\Omega = C\Gamma = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $(0 \in \Omega_1, \infty \in \Omega_2)$. Рассмотрим функции $W = \Phi_i(z), (i = 1,2)$, конформно и однолистно отображающие соответственно Ω_i на Ω_i^1, $(\Omega_1^1 = \{W : |W| < 1\}, \Omega_2 = \; = \{W : |W| > 1\})$ с номировкой $\Phi_1(0) = 0$, $\Phi'(0) > 0$, $\Phi_2(\infty) = \infty$, $\lim\limits_{z\leftarrow\infty} \Phi_2(z)/z > 0$.

Продолжим каждую $\Phi_i(z)$, $i = 1,2$ непрерывно до границы $\Gamma = \partial\Omega_1 = \partial\Omega_2$, сохранив для продолженных функций обозначения Φ_1 и Φ_2 .

Положим при произвольном натуральном n и $z \in \Gamma$, а также $\delta > 0$

$$\Gamma_{1+(-1)^i/n} = \left\{\zeta : \zeta \in \Omega_i, |\Phi_i(\zeta)| = 1 + (-1)^i/n\right\} \quad i = 1,2,$$

$$d(\zeta,\Gamma) = \inf_{z\in\Gamma} |\zeta - z|, \quad \Gamma_\delta = \{\zeta : d(\zeta, \Gamma < \delta)\},$$

$$u(\zeta,\delta) = \{z : |z - \zeta| < \delta\}, \quad \partial u(\zeta,\delta) = \{z : |z - \zeta| = \delta\}$$

$$\delta_n^* = \sup_{\zeta \in \left\{ \operatorname{int}\Gamma_{1+1/n} \cap ext\Gamma_{1-1/n} \right\}} d(\zeta, \Gamma),$$

под $\operatorname{int}\Gamma_{1+1/n}$ ($\Gamma_{1+1/n}$ - конечная жорданова кривая) понимается конечная область, граница которой с $\Gamma_{1+1/n}$, а $ext\Gamma_{1-1/n} = C \big/ \operatorname{int}\Gamma_{1-1/n}$, где C- комплексная плоскость.

Под соотношением $A \prec B$ ($A \ge 0$, $B \ge 0$) будем понимать неравенство $A \le CB$, где константа $C > 0$ не зависит от A и B, а также $A \approx B$, означает, что одновременно $A \le B$ и $B \le A$.

Определение 1 ([3]). *Пусть* Γ *- жорданова кривая. Обозначим через* $D_\alpha^\beta(z_0, \Gamma)$ *(*$z_0 \in \Gamma$ *-фиксированная точка),* $(0 < \alpha \le 1,\ \beta \ge 0)$ *класс функций, для которых*

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le C_f \max\left\{ |z_0 - z_1|^\beta, |z_0 - z_2|^\beta \right\} |z_1 - z_2|^\alpha, \quad \forall z_1, z_2 \in \Gamma \qquad (1)$$

Определение 2 ([1]). *Будем говорить, что замкнутая жорданова кривая* $\Gamma \in R^*$, *если при некотором* $C = C(\Gamma) = const > 1$ *для точек* $z \in \Gamma$ *и* $\delta > 0$ *выполняется соотношение*

$$u(z, c\delta) \cap C\Gamma_\delta \ne \varnothing, \qquad (2)$$

где $C\Gamma_\delta = \overline{C} \big/ \Gamma_\delta$ *- дополнение области* Γ_δ.

Определение 3 . *Спрямляемая жорданова кривая* Γ *называется квазигладкой, если для любой пары точек* z_1 *и* $z_2 \in \Gamma$ *длина ее меньшей части* $\Gamma(z_1, z_2) \subset \Gamma$, *лежащей между этими точками, удовлетворяет условию*

$$mes\Gamma(z_1, z_2) \prec |z_1 - z_2|, \qquad (3)$$

Определение 4 . *Пусть* Γ *- спрямляемая жорданова кривая. Следуя работам* [11], [12], *через* $\theta(z, \delta)$, $z \in \Gamma$, $0 < \delta < \infty$ *обозначим длину части* Γ *попавшей в круг* $u(z, \delta) = \{\zeta : |\zeta - z| < \delta\}$. *Кривую* Γ *отнесем к классу* S, *если выполняется условие*

$$\theta(\delta) \overset{df}{=} \sup_{z \in \Gamma} \theta(z, \delta) \approx \delta, \qquad (4)$$

Очевидно, что квазигладкая кривая принадлежит классу S.

Теорема 1 [9]. *Пусть* Γ *- принадлежит классу* $S \cdot f(z) \in D_\alpha^\beta(z_0, \Gamma)$ $(0 < \alpha \le 1, \beta \ge 0, \alpha + \beta \le 1)$. *Тогда существует последовательность рациональных функций* $R_n(z)$ *степени* $\le n$, *для которых при* $z \in \Gamma$ *и* $n = 1, 2, \ldots$ *справедливы неравенства*

$$|f(z) - R_n(z)| \prec |z_0 - z|^\beta \delta_n^{*\alpha} + \delta_n^{*\alpha+\beta}, \qquad (5)$$

$$|R_n'(z)| \prec |z_0 - z|^\beta \delta_n^{*\alpha-1} + \delta_n^{*\alpha+\beta-1}. \qquad (6)$$

Будем говорить, что замкнутая жорданова кривая Γ принадлежит классу R_θ, где $\theta(\delta)$, $\delta > 0$ положительная, неубывающая функция $\theta(+0) = 0$, если

1) $\Gamma = \Gamma^+ \bigcup \Gamma^-$, $\Gamma^+ \bigcap \Gamma^- = \{z_1, z_2\}$, $\Gamma^\pm$ - квазигладкая.
2) Для точек $z \in \Gamma^\pm$, $0 < |z - z_1| < (diam\Gamma^\mp)/2$ выполняются соотношения

$$d(z, \Gamma^\mp) \approx diam[\Omega \cap \partial U(z_1, |z - z_1|)] \approx |z - z_1| \theta(|z - z_1|).$$

Отметим, что дуги Γ^+ и Γ^- стыкуются в точке z_1 под нулевым углом.

Если $\theta(\delta) = \delta^\alpha$, $\alpha > 0$, то класс кривых R_θ будем обозначать через R_α.

Очевидно, что класс кривых R_α принадлежит классу S.

Приведём в незначительно измененном виде один результат П.М.Тамразова (см. [5], [7], [6, стр. 418-426]).

Лемма 1. *Пусть* Γ - *произвольная жорданова кривая и для рациональных функций* $R_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k^{(n)} z^k$ *степени* $\le n$, $n = 1, 2, \ldots$, *при некотором* $M_0 = const > 0$, $z_0' \in \Gamma$ *и* $\delta > 0$ *во всех точках* $z \in \Gamma$ *выполняется неравенство*

$$|R_n(z)| \le M_0 \left(1 + \left|\frac{z - z_0'}{\delta}\right|^{c_1}\right), \quad c_1 = const > 0 \ .$$

Тогда при всех $z \in U(z_0', \delta) \cap \operatorname{int}\Gamma_{1+c_2/n} \cap ext\Gamma$ *где* $c_2 = const > 0$, *выполняется неравенство*

$$|R_n(z)| \le c_3 M_0, \quad c_3 = c_3(c_1, c_2, \Gamma) > 0.$$

2.Основные результаты.

Основным результатом настоящей работы является следующая:

Теорема 2. *Пусть* Γ - *произвольная замкнутая жорданова кривая класса* R_α. *Для того, чтобы* $f(z) \in D_\alpha^\beta(z_0, \Gamma)$, $(0 < \alpha \le 1, \beta \ge 0, \alpha + \beta \le 1)$ *необходимо и достаточно существование последовательности рациональных функций* $R_n(z)$ *степени* $\le n$, *удовлетворяющих при* $z \in \Gamma$ *следующим неравенствам*

$$|f(z) - R_n(z)| \prec |z - z_0|^\beta \delta_n^{*\alpha} + \delta_n^{*\alpha+\beta}, \tag{7}$$

$$|R_n'(z)| \prec |z - z_0|^\beta \delta_n^{*\alpha-1} + \delta_n^{*\alpha+\beta-1}. \tag{8}$$

Доказательство теоремы 2. Необходимость условия $f(z) \in D_\alpha^\beta(z_0, \Gamma)$, $(0 < \alpha \le 1, \beta \ge 0, \alpha + \beta \le 1)$ существование последовательно-сти рациональных функций со свойством *(7)* и *(8)* вытекает из теоремы 1. Достаточность же устанавливается с помощью следующих рассуждений.

Пусть z и ζ принадлежит одновременно одной из дуг $\Gamma^{\pm}$ и выполняет условие $|z-\zeta| \le \varepsilon(\Gamma)$.

Обозначим через $\Gamma(z,\zeta)$ дуги, лежащие на $\Gamma^{\pm}$, которые соединяют точки z и ζ. Натуральные n найдем из условия $\delta^*_{n+1} < |z-\zeta| \le \delta^*_n$.

Имеем

$$|f(z)-f(\zeta)| \le |f(z)-R_n(z)| + \int\limits_{\Gamma(z,\zeta)} |R_n'(\xi)||d\xi| + |f(\zeta)-R_n(\zeta)| \prec$$

$$\prec |z_0-z|^{\beta}\delta_n^{*\alpha} + \delta_n^{*\alpha+\beta} + |z_0-\xi|^{\beta}\delta_n^{*\alpha} + \delta_n^{*\alpha+\beta} + |z_0-\zeta|^{\beta}\delta_n^{*\alpha} + \delta_n^{*\alpha+\beta} \prec$$

$$\prec |z_0-z|^{\beta}\delta_n^{*\alpha} + \delta_n^{*\alpha+\beta} + |z_0-z|^{\beta}\delta_n^{*\alpha} + \delta_n^{*\alpha+\beta} + |z_0-\zeta|^{\beta}\delta_n^{*\alpha} + \delta_n^{*\alpha+\beta} \prec$$

$$\prec \left(|z_0-z|^{\beta} + |z_0-\zeta|^{\beta}\right)\delta_n^{*\alpha} + \delta_n^{*\alpha+\beta} \le \left(|z_0-z|^{\beta} + |z_0-\zeta|^{\beta}\right)|z-\zeta|^{\alpha} +$$

$$+|z-\zeta|^{\alpha+\beta} \prec \left(|z_0-z|^{\beta} + |z_0-\zeta|^{\beta}\right)|z-\zeta|^{\alpha}. \qquad (9)$$

Пусть $z\in\Gamma^+$, $\zeta\in\Gamma^-$ и $|z-z_1| = |\zeta-z_1| = d$. Из частей Γ и окружности $\partial U(z_1,d)$ построим дуги со следующим свойством

$$\gamma(z,\zeta) \subset \operatorname{int}\Gamma_{1+1/n} \cap ext\Gamma_{1-1/n}, \quad mes\gamma(z,\zeta) \le c|z-\zeta|.$$

($\gamma(z,\zeta)$ соединяет точки z и ζ).

Для рациональных функций $R_n(\xi)$, удовлетворяющих неравенствам *(7)* и *(8)* имеем

$$|R_n'(\xi)| \prec \left(|z_0-z|^{\beta}\delta_n^{*\alpha-1} + \delta_n^{*\alpha+\beta-1}\right)\left(1 + \left|\frac{\xi-z}{\delta_n^*}\right|^{c_1}\right).$$

Тогда в силу леммы 1 получим

$$|R_n'(\xi)| \prec |z_0-z|^{\beta}\delta_n^{*\alpha-1} + \delta_n^{*\alpha+\beta-1}, \quad \xi\in\gamma(z,\zeta) \qquad (10)$$

В этом случае, используя неравенство *(10)*, имеем

$$|f(z)-f(\zeta)| \le |f(z)-R_n(z)| + \int\limits_{\gamma(z,\zeta)} |R_n'(\xi)||d\xi| + |f(\zeta)-R_n(\zeta)| \prec$$

$$\prec |z_0-z|^{\beta}\delta_n^{*\alpha} + \delta_n^{*\alpha+\beta} + |z_0-z|^{\beta}\delta_n^{*\alpha} + \delta_n^{*\alpha+\beta} + |z_0-\zeta|^{\beta}\delta_n^{*\alpha} + \delta_n^{*\alpha+\beta} \prec$$

$$\prec \left(|z_0-z|^{\beta} + |z_0-\zeta|^{\beta}\right)|z-\zeta|^{\alpha}. \qquad (11)$$

Пусть $z\in\Gamma^+$, $\zeta\in\Gamma^-$ - произвольные точки. Рассмотрим точку $z^*\in\Gamma^+$, для которой $|z^*-z_1| = |\zeta-z_1|$.

Верны следующие неравенства

$$|z-z^*| \prec |z-\zeta|, \quad |\zeta-z^*| \prec |z-\zeta|. \qquad (12)$$

Используя неравенства *(9)*, *(11)*, *(12)* получим

$$|f(z)-f(\zeta)| \le |f(z)-f(z^*)| + |f(z^*)-f(\zeta)| \prec$$

$$\prec\left(\left|z-z_0\right|^\beta+\left|z_0-z^*\right|^\beta\right)\left|z-z^*\right|^\alpha+\left(\left|z^*-z_0\right|^\beta+\left|z_0-\zeta\right|^\beta\right)\left|z-\zeta\right|^\alpha\prec$$
$$\prec\left(\left|z-z_0\right|^\beta+\left|z_0-z^*\right|^\beta+\left|\zeta-z_0\right|^\beta\right)\left|z-\zeta\right|^\alpha\prec$$
$$\prec\left(\left|z-z_0\right|^\beta+\left|\zeta-z_0\right|^\beta\right)\left|z-\zeta\right|^\alpha+\left|z-z^*\right|^\beta\left|z-\zeta\right|^\alpha\prec$$
$$\prec\left(\left|z-z_0\right|^\beta+\left|\zeta-z_0\right|^\beta\right)\left|z-\zeta\right|^\alpha+\left|z-\zeta\right|^{\beta+\alpha}\prec\left(\left|z-z_0\right|^\beta+\left|\zeta-z_0\right|^\beta\right)\left|z-\zeta\right|^\alpha.$$

Теорема доказана.

Литература

[1]. Андриевский В.В. *Аппроксимационная характеристика классов функции на континуумах комплексной плоскости.* Матем. сб., 1984, т. 125(167), №1/9, с. 70-87.

[2]. Андриевский В.В. *О приближении функций на дугах с нулевыми углами.* Укр. Мат. журн., 1985, т. 37, № 5, с. 547-551.

[3]. Мамедханов Дж.И.*Об одном усилении теоремы Племеля- Привалова и наилучшей аппроксимации.* Теория кубатурных формул и вычислительная математикака (труды конференции по дифференц. уравн. и вычислит. Математике. Новосибирск, 1978). М., 1980, с. 164-167.

[4]. Дзядык В.К. *Аппроксимационная характеристика классов Липщица* $W^r H^1$ $(r=0,1,2,\ldots)$. Analysis Math., 1975, т. 1, с. 19-30.

[5]. Лебедев Н.А., Тамразов П.М.*Обратные теоремы приближения на регулярных компактах комплексной плоскости.* Изв. АН СССР, сер. матем., 1970, т. 39, № 6, с. 1340-1390.

[6]. Дзядык В.К. *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.* М., Наука, 1977, с. 512.

[7]. Тамразов П.М. *Телесная обратная задача полиномиального приближения функции на регулярном компакте.* Изв. АН СССР, сер., матем., 1973, т. 37, №1, с.148-164.

[8]. Уолш Дж.Л. *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области.* М.: Изд. Иностр. Литер., 1961, с. 608.

[9]. Джафаров С.З. *Вопросы аппроксимации в равномерной метрике на спрямляемых кривых.* В кн.: Материалы X республиканской конференции молодых ученых поматематике и механике. (г. Баку, 28 мая-31 мая, 1990г.), Баку, Элм, 1991, с.105-106.

[10]. Джафаров С.З. *Аппроксимационная характеристика классов* $H^\varpi(\Gamma)$ *на кривых комплексной плоскости.* Деп. в ВИНИТИ 08.12.1992, № 3469-В92, с. 10.

[11]. Андриевский В.В. *Конструктивное описание классов функций на континуумах комплексной плоскости с учетом роста аппроксимационных полиномов.* Киев, 1983, (Препринт) АН УССР, Инс. Математики, № 83-12, с. 20.

[12]. Салаев В.В. *Прямые и обратные оценки для особого интеграла Коши по замкнутой кривой.* Мат. заметки , 1976 , 19 , №3 , с. 365-380.

Məmmədxanov C.İ., Cəfərov S.Z.

DAHA GENİŞ ƏYRİLƏRDƏ FUNKSİYALARIN KONSTRUKTİV XARAKTERİSTİKALARI HAQQINDA

Bu işdə qlobal terminlərdə lokal şərtlərlə təyin edilən funksiyaların kompleks müstəvidə daha geniş əyrilərdə konstruktiv xarakteristikaları alınmışdır.

Mamedkhanov Dj.I., Djafarov S.Z.

ON THE CONSTRUCTIVE CHARACTERISTIC OF FUNCTIONS CLASSES ON THE MORE GENERAL CURVES

In the present work, constructive characteristic of functions classes, which are defined by local conditions on more general curves of complex plane, is received in global terms.