УДК 517. 51

МАХАРОВ И.К.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НОРМ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕСОВА, ПОСТРОЕННОГО НА ОСНОВЕ УСРЕДНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ РАЗНОСТИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Пусть R^n- n- мерное Евклидово пространство, $L_p = L_p(R^n)$ $(1 \le p \le \infty)$– пространство функций f на R^n с нормой

$$\|f\|_{L_p(R^n)} = \|f\|_p = \left(\int_{R^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, 1 \le p \le \infty.$$

Как в [1], в качестве L_∞ мы, отклоняясь оот обычных обозначений, рассматриваем пространство равномерно- непрерывных на R^n функций f с нормой

$$\|f\|_\infty = \|f\|_c = \sup_x |f(x)|.$$

Разность порядка $\rho > 0$ функции $f(x)$ с шагом h назовем выражение (см. [2])

$$\Delta_h^\rho f(x) = \exp(\pi \rho i) \sum_{j=0}^{\infty} A_j^{-1-\rho} f(x + jh). \qquad (1)$$

Числа $A_j^{-1-\rho}$ определяются из соотношения

$$(1-x)^\rho = \sum_{j=0}^{\infty} A_j^{-1-\rho} x^j.$$

Очевидно, что при $\rho > 0$

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j^{-1-\rho} = 0. \qquad (2)$$

Числа A_n^α носят название чисел Чезаро порядка α. Для них имеется явное представление (см.[2])

$$A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{n!} = \binom{n+\alpha}{n} = 0(n^\alpha)(\alpha \ne -1,-2,\ldots). \qquad (3)$$

Если $\rho > 0$ целое, разности *(1)* превращаются в обычные разности целого порядка, так как $A_j^{-1-\rho} = 0$ при $j \ge r+1$. Далее, из *(3)* следует

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left|A_j^{-1-\rho}\right|<\infty. \qquad (4)$$

Отметим, что если $f\in L_p(R^n)$, то

$$\left\|\Delta_h^\rho f(x)\right\|\le c\cdot\|f\|_p, \qquad (5)$$

а если $g_\nu(x)$ целая функция сферического экспоненциального типа степени $\nu>0$ (см. [1]), то $\forall\rho>0$ и $\forall h$ имеет место неравенство (см. [2])

$$\left\|\Delta_h^\rho g_\nu(x)\right\|_p\le c(\nu h)^\rho\cdot\|g_\nu\|_p. \qquad (6)$$

Определение 1. *Совокупность функций $f\in L_p(R^n)$, для которых*

$$\|f\|_{b_{p,\vartheta}^{r,\rho,k}}=\sum_{|s|=k}\left(\int_{R^n}|h|^{-n-\vartheta(r-k)}\left\|\Delta_h^\rho f^{(s)}(x)\right\|_p^\vartheta dh\right)^{1/\vartheta}<\infty \qquad (7)$$

обозначим через $B_{p,\vartheta}^{r,\rho,k}$. Здесь $1\le\vartheta<\infty,\rho>r-k>0,r>0,k$ – *неотрицательное целое,* $s=(s_1,\ldots,s_n)$, $s_j\ge 0$ *при* $j=\overline{1,n}$, $|s|=s_1+s_2+\ldots+s_n=k$.

Норма в этом пространстве определяется следующим образом:

$$\|f\|_{B_{p,\vartheta}^{r,\rho,k}}=\|f\|_p+\|f\|_{b_{p,\vartheta}^{r,\rho,k}}.$$

Нам понадобится следующая теорема

Теорема А. *Пусть* $1\le p,\vartheta\le\infty,\rho>r-k>0,k$ - *неотрицательное целое. Тогда пространство* $B_{p,\vartheta}^{r,\rho,k}(R^n)$ *совпадает с прстранством Бесова* $B_{p,\vartheta}^{r}(R^n)$ *и соответствующие нормы эквивалентны, т.е.*

$$\|f\|_{B_{p,\vartheta}^{r,\rho,k}}\sim\|f\|_{B_{p,\vartheta}^{r}}.$$

Теорема доказана в [2] при $\vartheta=\infty$, а в случае $1\le\vartheta<\infty$ в [4].

Нормы в пространствах $B_{p,\vartheta}^{r}$ нам будет удобно записывать в виде $(\alpha>1)$ (см. [1])

$$\|f\|_{B_{p,\vartheta}^{r}}=\|f\|_p+\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{jr\vartheta}E_{\alpha^j}^{\vartheta}(f)_p\right\}^{1/\vartheta},1\le p<\infty,\alpha>1, \qquad (8)$$

где $E_\nu(f)_p$ - наилучшее приближение функции $f\in L_p$ при помощи целых функций сферического экспоненциального типа $\nu>0$ (коротко степени ν)

Для любого действительного числа t определим усреднение функции $f\in L_p$ равенством

$$f_t=f_t(x)=\frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma f(x+tw)dw, f_0(x)=f(x), \qquad (9)$$

где σ - единичная сфера в R^n;

$$\sigma=\left\{w;\sum_{1}^{n}w_j^2=1\right\},$$

$|\sigma|$- её $(n-1)$- мерная мера. Очевидно, что f_t- четная функция по t $(f_t=f_{-t})$ и (см. [3])

$$\sup_t\|f_t\|=\|f\| \tag{10}$$

Рассмотрим $\rho-$ ую $(\rho>0)$ дробную разность f_t по t с шагом h

$$^*\Delta_h^\rho f_t(x)=\exp(\pi\ \ \rho i)\sum_{j=0}^{\infty}A_j^{-1-\rho}f_{t+jh}(x) \tag{11}$$

и её значение в точке $t=0$

$$^*\overset{\circ}{\Delta}{}_h^\rho f(x)={}^*\Delta_h^\rho f_t(x)\Big|_{t=0}=\exp(\pi\rho i)\sum_{j=0}^{\infty}A_j^{-1-\rho}f_{jh}(x). \tag{12}$$

Определение 2. *Совокупность функций из L_p, для которых конечна полунорма*

$$\|f\|_{^*b_{p,\vartheta}^{r,\rho,k}}=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|h|^{1-\vartheta(r-k)}\sup_t\left\|^*\Delta_h^\rho f_t^{(k)}(x)\right\|_p^\vartheta dh\right)^{1/\vartheta}$$

обозначим через $^*B_{p,\vartheta}^{r,\rho,k}$. *Здесь* $\rho>r-k>0$ *и* $f_t^{(k)}(x)$*- производная порядка* k *функции* $f_t(x)$ *по* t. *Аналогично определяется пространства* $^*\overset{\circ}{B}{}_{p,\vartheta}^{r,\rho,k}$ $\left(\sup_t\left\|^*\Delta_h^\rho f_t^{(k)}(x)\right\|_p\right)$ *заменяется на* $\left\|^*\overset{\circ}{\Delta}{}_h^\rho f_t^{(k)}(x)\right\|_p$ *и в обозначении соответствующих полунорм ставится знак* $\circ$). *Нормы в указанных пространствах складываются из нормы* f *в* $L_p(R^n)$ *и надлежащей полунормы, например*

$$\|f\|_{^*B_{p,\vartheta}^{r,\rho,k}}=\|f\|_p+\|f\|_{^*b_{p,\vartheta}^{r,\rho,k}}.$$

Отметим, что

$$\left\|^*\overset{\circ}{\Delta}{}_h^\rho f_t^{(k)}(x)\right\|_p\le\sup_t\left\|^*\Delta_h^\rho f_t^{(k)}(x)\right\|_p,$$

и поэтому

$$\|f\|_{^*\overset{\circ}{B}{}_{p,\vartheta}^{r,\rho,k}}\le\|f\|_{^*B_{p,\vartheta}^{r,\rho,k}}\qquad(1\le p,\vartheta\le\infty)$$

Следовательно, тривиальным образом устанавливается вложение

$$^*B_{p,\vartheta}^{r,\rho,k}\mapsto{}^*\overset{\circ}{B}{}_{p,\vartheta}^{r,\rho,k}.$$

Но вложение

$$^*\overset{\circ}{B}{}_{p,\vartheta}^{r,\rho,k}\mapsto{}^*\ B_{p,\vartheta}^{r,\rho,k},$$

является нетривиальным и оно доказывается ниже.

Функции $g(z)$ степени ν, принадлежащие для действительных x пространству $L_p(R^n)$, составляют класс $SM_{\nu p}(SM_{\nu\infty}=SM_\nu)$. Известно, (см. [3]), что $SM_{\nu p}\subset SM_\nu$. В [1] доказано, что если $g(x)\in SM_{\nu p}$, то усредненная функция $g_t(x)$, как функция от t, принадлежит к SM_ν (т.е. является целой функцией степени ν по t, ограниченной на R). Точнее, доказано неравенство:

$$\left|g_{(\lambda+i\mu)}(x)\right|\le\|g\|_\infty e^{\nu|\mu|},$$

а также следующие неравенства:

$$\left\|g_t^{(k)}(x)\right\|_p\le\nu^k\|g\|_p, \qquad (13)$$

$$\left\|{}^*\Delta_h^{k+m}g_t(x)\right\|_p\le|h|^k\sup_t\left\|{}^*\Delta_h^m g_t^{(k)}(x)\right\|_p \qquad (14)$$

Рассмотрим четную неотрицательную функцию $g(t)$ степени 1 со свойством

$$\frac{1}{|\sigma|}\int_{R^n}g(|y|)dy=1. \qquad (15)$$

Положим для $\nu>0$ и $f\in L_p(R^n)$,

$$g_\nu(x)=\frac{1}{|\sigma|}\int_{R^n}g(|y|)\left[-\exp(-\pi\rho i)\Delta^\rho_{y/\nu}f(x)+f(x)\right]dy. \qquad (16)$$

Известно, что (см.[5]) $g_\nu(z)\in SM_{\nu p}$ и выполняются неравенства:

$$\|g_\nu-f\|_p\le\int_0^\infty g(u)u^{n-1}\left\|{}^*\overset{\circ}{\Delta}{}^\rho_{u/\nu}f_t(x)\right\|_p du. \qquad (17)$$

$$\left\|{}^*\overset{\circ}{\Delta}{}^\rho_h f(x)\right\|_p\le|h|^k\sup_t\left\|{}^*\Delta_h^{\rho-k}f_t^{(k)}(x)\right\|_p. \qquad (18)$$

Основным результатом настоящей работы является

Теорема. *Пусть* $1\le p\le\infty, 1\le\vartheta<\infty, \rho>r-k>0, k\ge0$ *целое. Тогда пространства* ${}^*B^{r,\rho,k}_{p,\vartheta}, {}^*\overset{\circ}{B}{}^{r,\rho,o}_{p,\vartheta}$, $B^{r,\rho,k}_{p,\vartheta}, B^r_{p,\vartheta}$ *совпадают и соответствующие нормыормы эквивалентны, т.е.*

$${}^*B^{r,\rho,k}_{p,\vartheta}\sim{}^*\overset{\circ}{B}{}^{r,\rho,o}_{p,\vartheta}\sim B^{r,\rho,k}_{p,\vartheta}\sim B^r_{p,\vartheta}.$$

Доказательство. Функция $\alpha^{r\vartheta l}(\alpha>1)$ возрастает по l, а функция $E^\vartheta_{\alpha^l}$ не возрастает по l (здесь $E_\nu(f)_p$ наилучшее приближение функции $f\in L_p$ при помощи целых функций степени $\leftarrow\nu$), поэтому

$$\int_{j-1}^{j}\alpha^{r\vartheta l}E^\vartheta_{\alpha^l}(f)_p dl\ge\int_{j-1}^{j}\alpha^{(j-1)\vartheta l}E^\vartheta_{\alpha^l}dl=\alpha^{-r\vartheta}\alpha^{j\vartheta r}E^\vartheta_{\alpha^j}.$$

Отсюда учитывая *(8)* и *(17)* получаем

$$\|f\|_{b^r_{p,\vartheta}} = \left(\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{jr\vartheta}E^{\vartheta}_{\alpha^j}(f)_p\right)^{1/\vartheta} \le \alpha^r\left(\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{r\vartheta}\int_{j-1}^{j}\alpha^{r\vartheta l}E^{\vartheta}_{\alpha^l}dl\right)^{1/\vartheta} \le$$

$$\le \alpha^r\left(\int_1^{\infty}\alpha^{jr\vartheta}E^{\vartheta}_{\alpha^j}dj\right)^{1/\vartheta} \le \alpha^r\left(\int_{-1}^{\infty}\alpha^{jr\vartheta}\left(\int_0^{\infty}g(u)u^{n-1}\left\|{}^*\mathring{\Delta}^{\rho}_{u/\alpha^j}f_t(x)\right\|_p du\right)^{\vartheta}dj\right)^{1/\vartheta}$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского продолжим оценку

$$\alpha^r\int_0^{\infty}g(u)u^{n-1}\left(\int_{-1}^{\infty}\alpha^{jr\vartheta}\left\|{}^*\mathring{\Delta}^{\rho}_{u/\alpha^j}f_t(x)\right\|_p^{\vartheta}dj\right)^{1/\vartheta}du =$$

$$\left(u\alpha^{-j} = v, dv = -u\alpha^{-j}\ln\alpha dj, \alpha^j = u/v\right)$$

$$= \frac{\alpha^r}{(\ln\alpha)^{1/\vartheta}}\int_0^{\infty}g(u)u^{n-1+r}\left(\int_0^{\alpha u}v^{-1-\vartheta r}\left\|{}^*\mathring{\Delta}^{\rho}_{v}f_t(x)\right\|_p^{\vartheta}dv\right)^{1/\vartheta}du \le$$

$$\le \frac{\alpha^r}{(\ln\alpha)^{1/\vartheta}}\int_0^{\infty}g(u)u^{n-1+r}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}v^{-1-\vartheta r}\left\|{}^*\mathring{\Delta}^{\rho}_{v}f_t(x)\right\|_p^{\vartheta}dv\right)^{1/\vartheta}du \le$$

$$\le \frac{\alpha^r}{(\ln\alpha)^{1/\vartheta}}\int_0^{\infty}g(u)u^{n-1+r}du\|f\|_{{}^*\mathring{b}^{r,\rho,0}_{p,\vartheta}} \le C\|f\|_{{}^*\mathring{b}^{r,\rho,0}} \qquad (19)$$

где функция $g(u)$ выбана так, чтобы последний интеграл был конечным (см. [1] или [3]).

Аналогично, с использованием *(18)* доказывается неравенство

$$\|f\|_{{}^*b^r_{p,\vartheta}} \le C\|f\|_{{}^*b^{r,\rho,k}_{p,\vartheta}} \qquad (20)$$

Пусть теперь функция $f \in B^r_{p,\vartheta}$, т.е. для нее конечны левая часть *(19)*. Обозначим через g_{α^l} целую функцию степени α^l и такую, что $\|f - g_{\alpha^l}\|_p = E_{\alpha^l}(f)_p (l = 0,1,2,\ldots)$ и положим $q_0 = g_{\alpha^l}, q_l = g_{\alpha^l} - g_{\alpha^{l-1}}$ $(l = 1,2,\ldots)$.

Тогда функция f прдставляется в виде сходящего в $\leftarrow L_p$ ряда

$$f = \sum_{l=0}^{\infty}q_l \qquad (21)$$

потому, что из конечности $\|f\|_{b^r_{p,\vartheta}}$ следует $E_{\alpha^l}(f)_p \to 0 (l \to \infty)$. Далее,

$$\|q_0\|_p \le \|f\|_p + E_{\alpha^0}(f)_p,$$

$$\|g_l\|_p \le \|g_{\alpha^l} - f\|_p + \|f - g_{\alpha^{l-1}}\|_p \le 2E_{\alpha^{l-1}}(f)_p,$$

а отсюда

$$\left(\sum_{l=0}^{\infty}\alpha^{lr\vartheta}\left\|q_{a^l}\right\|_p^{\vartheta}\right)^{1/\vartheta} \le \left(\left(\|f\|_p + E_{a^0}\right)^{\vartheta} + \sum_{l=0}^{\infty}2^{\vartheta}\alpha^{lr\vartheta}E_{a^{l-1}}^{\vartheta}\right)^{1/\vartheta} \le$$

$$\le 2\alpha^r\left(\|f\|_p^{\vartheta} + \sum_{l=0}^{\infty}\alpha^{lr\vartheta}E_{a^l}^{\vartheta}\right)^{1/\vartheta} \le C\left(\|f\|_p + \left(\sum_{l=0}^{\infty}\alpha^{lr\vartheta}E_{a^l}^{\vartheta}\right)^{1/\vartheta}\right) = C\|f\|_{B^r_{p,\vartheta}} \qquad (22)$$

Из *(21)* получим

$$f_t^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dt^k}f_t(x) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(q_l^{(k)}\right)_t = \sum_{l=0}^{\infty}q_{lt}^{(k)}(x) \quad \left((q_l)_t = q_{lt}\right)$$

Для любого действительного t,h и $\rho > r-k > 0$

$$\left\|{}^*\Delta_h^{\rho}f_t^{(k)}(x)\right\|_p = \left\|\sum_{l=0}^{\infty}{}^*\Delta_h^{\rho}q_{lt}^{(k)}(x)\right\|_p \le \sum_{l=0}^{N-1}\left\|{}^*\Delta_h^{\rho}q_{lt}^{(k)}(x)\right\|_p + \sum_{l=N}^{\infty}\left\|{}^*\Delta_h^{\rho}q_{lt}^{(k)}(x)\right\|_p .$$

Применяя неравенства *(6), (5)* и *(11)* имеем

$$\left\|{}^*\Delta_h^{\rho}f_t^{(k)}(x)\right\|_p \le \sum_{l=0}^{N}\left\|{}^*\Delta_h^{\rho}q_{lt}^{(k)}(x)\right\|_p + \sum_{l=N}^{\infty}\left\|{}^*\Delta_h^{\rho}q_{lt}^{(k)}(x)\right\|_p << |h|^{\rho}\sum_{l=0}^{N}\alpha^{l(\rho+k)}\left\|q_{lt}(x)\right\|_p +$$

$$+\sum_{l=N}^{\infty}\alpha^{lk}\left\|q_{lt}(x)\right\|_p \le |h|^{\rho}\sum_{l=0}^{N}\alpha^{l(\rho+k)}\|q_l\|_p + \sum_{l=N}^{\infty}\alpha^{lk}\|q_l\|_p . \qquad (23)$$

Напомним, что ${}^*\Delta_h^{\rho}f_t(x)$ есть разность порядка ρ отфункции $f_t(x)$ с шагом h по t. Но тогда

$$\|f\|^{\vartheta}_{{}^*b^{r,\rho,k}_{p,\vartheta}} = \int_{-\infty}^{\infty}|h|^{-1-\vartheta(r-k)}\sup_t\left\|{}^*\Delta_h^{\rho}f_t^{(k)}(x)\right\|_p^{\vartheta}dh =$$

$$= \int_0^{\infty}|h|^{-1-\vartheta(r-k)}\sup_t\left\|{}^*\Delta_h^{\rho}f_t^{(k)}(x)\right\|_p^{\vartheta}dh + \int_0^{\infty}|h|^{-1-\vartheta(r-k)}\sup_t\left\|{}^*\Delta_{-h}^{\rho}f_t^{(k)}(x)\right\|_p^{\vartheta}dh =$$

$$= \int_0^{\infty}|h|^{-1-\vartheta(r-k)}\sup_t\left\|{}^*\Delta_h^{\rho}f_t^{(k)}(x)\right\|_p^{\vartheta}dh + \int_0^{\infty}|h|^{-1-\vartheta(r-k)}\sup_{-t}\left\|{}^*\Delta_{-h}^{\rho}f_{-t}^{(k)}(x)\right\|_p^{\vartheta}dh =$$

$$= 2\int_0^{\infty}|h|^{-1-\vartheta(r-k)}\sup_t\left\|{}^*\Delta_h^{\rho}f_t^{(k)}(x)\right\|_p^{\vartheta}dh =$$

($f_t(x)$ - четная по t поэтому ${}^*\Delta_{-h}^{\rho}f_{-t}(x) = {}^*\Delta_h^{\rho}f_t(x)$), $\left(h = \alpha^{-n}\right)$

$$= 2\ln\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\alpha^{n+n\vartheta(r-k)}\sup_t\left\|{}^*\Delta_{\alpha^{-n}}^{\rho}f_t^{(k)}(x)\right\|_p^{\vartheta}\alpha^{-n}dn = 2\int_0^{\infty}\ldots + 2\int_{-\infty}^{0}\ldots$$

Оценим первое слагаемое используя оценки *(23)*

$$\int_0^{\infty}\alpha^{n+n\vartheta(r-k)}\sup_t\left\|{}^*\Delta_{\alpha^{-n}}^{\rho}f_t^{(k)}(x)\right\|_p^{\vartheta}\alpha^{-n}dn = \sum_{N=0}^{\infty}\int_N^{N+1}\alpha^{n\vartheta(r-k)}\times$$

$$\times\sup_t\left\|{}^*\Delta_{\alpha^{-n}}^{\rho}f_t^{(k)}(x)\right\|_p^{\vartheta}dn << \sum_{N=0}^{\infty}\alpha^{(N+1)\vartheta(r-k)}\int_N^{N+1}\left(\alpha^{-N\rho}\sum_{l=0}^{N}\alpha^{l(\rho+k)}\|q_l\|_p + \sum_{l=N}^{\infty}\alpha^{lk}\|q_l\|_p\right)^{\vartheta}dn <<$$

$$<< \alpha^{\vartheta(r-k)} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^{N\vartheta(r-k)} \left(\alpha^{-N\rho} \sum_{l=0}^{N} \alpha^{l(\rho+k)} \|q_l\|_p + \sum_{l=N}^{\infty} \alpha^{lk} \|q_l\|_p \right)^{\vartheta} <<$$

$$<< \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^{N\vartheta(r-k)} \left(\alpha^{-N\rho} \sum_{l=0}^{N} \alpha^{l(\rho+k)} \|q_l\|_p \right)^{\vartheta} + \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^{N\vartheta(r-k)} \left(\sum_{l=N}^{\infty} \alpha^{lk} \|q_l\|_p \right)^{\vartheta} = I + II.$$

Применяя неравенства 5.6.19 и 5.6.20 из [1] (стр. 216) соответственно к I и II получим:

$$I = \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^{(k+\rho-r)N\vartheta} \left(\sum_{l=0}^{N} \alpha^{l(\rho+k)} \|q_l\|_p \right)^{\vartheta} << \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^{lr\vartheta} \|q_l\|_p^{\vartheta},$$

$$II = \sum_{N=0}^{\infty} \alpha^{N\vartheta(r-k)} \left(\sum_{l=N}^{\infty} \alpha^{lk} \|q_l\|_p \right)^{\vartheta} << \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^{lr\vartheta} \|q_l\|_p^{\vartheta}.$$

Значит

$$\int_{0}^{\infty} \alpha^{n\vartheta(r-k)} \sup_t \left\| {}^*\Delta^{\rho}_{a^{-n}} f_t^{(k)}(x) \right\|_p^{\vartheta} dn \le \sum_{l=0}^{N} \alpha^{lr\vartheta} \|q_l\|_p^{\vartheta}. \qquad (24)$$

Оценим второй интеграл:

$$\int_{-\infty}^{0} \alpha^{n\vartheta(r-k)} \sup_t \left\| {}^*\Delta^{\rho}_{a^{-n}} f_t^{(k)}(x) \right\|_p^{\vartheta} dn = \int_{0}^{\infty} \alpha^{-n\vartheta(r-k)} \sup_t \left\| {}^*\Delta^{\rho}_{a^{n}} f_t^{(k)}(x) \right\|_p^{\vartheta} dn \le$$

$$\le \int_{0}^{\infty} \alpha^{n\vartheta(r-k)} \sup_t C \left\| f_t^{(k)}(x) \right\|_p^{\vartheta} dn \le \left\| f^{(k)} \right\|_p^{\vartheta} C \left. \frac{-\alpha^{-n\vartheta(r-k)}}{\vartheta(r-k)\ln \alpha} \right|_0^{\infty} << \left\| f^{(k)} \right\|_p^{\vartheta}.$$

Но

$$\left\| f^{(k)} \right\|_p^{\vartheta} = \left\| \sum_{l=0}^{\infty} q_l^{(k)} \right\|_p^{\vartheta} \le \left(\sum_{l=0}^{\infty} \alpha^{lk} \|q_l\|_p \right)^{\vartheta} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \alpha^{-lr} \alpha^{l(r-k)} \|q_l\|_p \right)^{\vartheta} \le \left(\sum_{l=0}^{\infty} \alpha^{-l(r-k)\vartheta'} \right)^{\vartheta/\vartheta'} \times$$

$$\times \left(\sum_{l=0}^{\infty} \alpha^{lr\vartheta} \|q_l\|_p^{\vartheta} \right) << \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^{lr\vartheta} \|q_l\|_p^{\vartheta}. \qquad (25)$$

Итак, учитывая *(24)*, *(25)* и *(22)* будем иметь

$$\|f\|_{{}^*b^{r,\rho,k}_{p,\vartheta}} << \left(\sum_{l=0}^{\infty} \alpha^{lr\vartheta} \|q_l\|_p^{\vartheta} \right)^{1/\vartheta} << \|f\|_p + \left(\sum_{l=0}^{\infty} \alpha^{lr\vartheta} \left\| E^{\vartheta}_{a^l}(f) \right\|_p \right)^{1/\vartheta} = \|f\|_{B^r_{p,\vartheta}},$$

а отсюда

$$\|f\|_{{}^*B^{r,\rho,k}_{p,\vartheta}} = \|f\|_p + \|f\|_{{}^*b^{r,\rho,k}_{p}} \le \|f\|_p + C\|f\|_{B^r_{p,\vartheta}} \le (C+1)\|f\|_{B^r_{p,\vartheta}}. \qquad (26)$$

Из *(19)*, *(20)*, *(26)* следует

$$\|f\|_{B^r_{p,\vartheta}} << \|f\|_{{}^*\overset{\circ}{B}{}^{r,\rho,0}_{p,\vartheta}} \le \|f\|_{{}^*B^{r,\rho,k}_{p,\vartheta}} << \|f\|_{B^r_{p,\vartheta}},$$

а последнее означает (с учетом теоремы А)

$${}^*B^{r,\rho,k}_{p,\vartheta} \sim {}^*\overset{\circ}{B}{}^{r,\rho,0}_{p,\vartheta} \sim B^{r,\rho,k}_{p,\vartheta} \sim B^r_{p,\vartheta}.$$

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность Гулиеву В.С. за постановку задачи и Бабаеву М.- Б.А. за внимание к работе.

Литература

[1]. Никольский С.М., Лизоркин П.И. *Классы функций, построенные на основе усреднений.* Сибирский математический журнал, 1988, т. XXIX, №5, с. 181-190.

[2]. Бугров Я.С.. *Дробные разностные операторы и классы функций.* Тр. МИАН, 1984, т. 172, с. 60- 70.

[3]. Никольский С.М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* М.: Наука, 1977, с. 455.

[4]. Буренков В.И., Собнак Ш.Д. *Об эквивалентных нормах в пространствах Никольского- Бесова, содержащих разности дробного порядка.* Краевые задачи мат. физики и некоторые вопросы теории функциональных пространств: Научные труды. М.: Изд-во Университета дружбы народов, 1985, с. 9-20.

[5]. Махаров И.К. *Теоремы вложения для классов функций построенных на основе усреднений содержащих разно сти дробного порядка.* Труды ИММ АН Азербайджана, Баку; Элм, 1996, т. V(XIII), стр. 51- 59.

Məhərov İ.K. **ORTALAŞMA ƏSASINDA QURULMUŞ, KƏSR TƏRTİBLİ FƏRQLƏR SAXLAYAN BESOV FƏZALARINDA BƏ'Zİ NORMALARIN EKVİVALENTLİYİ**

Məqalədə ortalaşma əsasında qurulmuş, kəsr tərtibli fərqlər saxlayan Besov fəzalarında bə'zi normaların ekvivalentliyi göstərilir.

Maharov I.K. **EQUIVALENCE NORMS FOR A CLASS OF FUNCTIONS OF BESOV STRUCTURED BY AVERINGS CONTAINING THE DIFFERENCES OF FRACTIONAL ORDER**

It is proved that some norms in Besov spaces defind on the basis of averagings containing the differences of fractional order are equivalent.