УДК 517.95

МИРЗОЕВ С.С., АЛИЕВ А.Р.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство, A - самосопряженный положительно- определенный оператор в $H\left(A=A^{*}>cE,\quad c>0\right)$.

Через $L_2(\mathbb{R}_+;H)$ обозначим гильбертово пространство вектор-функций, определенных в $\mathbb{R}_+=(0;+\infty)$ со значениями в H, которое имеют конечную норму

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}=\left(\int_0^{+\infty}\|f(t)\|^2\,dt\right)^{1/2}$$

и определим гильбертовые пространства

$$W_2^2(\mathbb{R}_+;H)=\{u|u''\in L_2(\mathbb{R}_+;H),\ A^2uL_2(\mathbb{R}_+;H)\},$$

$$\overset{\circ}{W}{}_2^2(\mathbb{R}_+;H)=\{u|u\in W_2^2(\mathbb{R}_+;H),\ u(0)=0$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^2(\mathbb{R}_+;H)}=\left(\|u''\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}+\|A^2u\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+;H)}\right)^{1/2}.$$

Теперь рассмотрим следующую краевую задачу:

$$-u''(t)+\rho(t)A^2u(t)+A_1u'(t)+A_2u(t)=f(t),\quad t\in R_+,\tag{1}$$

$$u(0)=0,\tag{2}$$

где $f(t)\in L_2(_+;H)$, $u(t)\in W_2^2(\mathbb{R}_+;H)$, A_1 и A_2 линейные, вообще говоря, неограниченные операторы, а числовая функция

$$\rho(t)=\begin{cases}\alpha,\ 0\le t\le 1,\\ \beta, 1<t<+\infty,\end{cases}$$

причем $\alpha;\beta$ - положительное числа и $\alpha\neq\beta$.

В данной работе найдены достаточные условия для корректной и однозначной разрешимости краевой задачи {(1), (2)}, выраженные только коэффициентами уравнения *(1)*. Отметим, что при получении основного результата оценены промежуточные производные через главную часть уравнения *(1)* в подпространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\mathbb{R}_+;H)$, которые имеют самостоятельный математический интерес.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Оператор* P_0, *определенный выражением*

$$P_0 u \equiv -u'' + \rho(t)A^2u,\ u \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\mathbb{R}_+;H)$$

осуществляет изоморфизм между пространствами $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\mathbb{R}_+;H)$ *и* $L_2(\mathbb{R}_+;H)$.

Доказатльство. Легко увидеть, что однородное уравнение $P_0 u = 0$ имеет только нулевое решение из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\mathbb{R}_+;H)$. Покажем, что при любом $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+;H)$ уравнение $P_0 u = f$ имеет решение из $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\mathbb{R}_+;H)$.

Действительно, рассмотрим уравнение в пространстве $W_2^2(\mathbb{R};H)$ $(\mathbb{R} = (-\infty;+\infty))$

$$P_\alpha V \equiv -\frac{d^2V}{dt^2} + \alpha A^2 V = F(t), \tag{3}$$

где

$$F(t) = \begin{cases} f(t),\ t \in (0;1), \\ 0,\ t \in R \setminus (0;1). \end{cases}$$

Легко видеть, что решение уравнения *(3)* из пространства $W_2^2(\mathbb{R};H)$ прдставляется в виде

$$V(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\lambda^2 E + \alpha A^2\right)^{-1}\left(\int_0^1 f(s)e^{-i\lambda s}ds\right)e^{it\lambda}d\lambda.$$

Действительно, по теореме Планшереля

$$\|V\|^2_{W_2^2(\mathbb{R};H)} = \left\|\frac{d^2V}{dt^2}\right\|^2_{L_2} + \left\|\alpha A^2 V\right\|^2_{L_2} = \left\|\lambda^2 \hat{V}(\lambda)\right\|^2_{L_2} + \left\|\alpha A^2\hat{V}(\lambda)\right\|^2_{L_2} \le$$

$$\le \left\|\left(\lambda^2E + \alpha A^2\right)^{-1}\lambda^2\right\|^2\left\|\hat{f}(\lambda)\right\|^2_{L_2} + \left\|\alpha A^2\left(\lambda^2 E + \alpha A^2\right)^{-1}\right\|^2\left\|\hat{f}(\lambda)\right\|^2_{L_2} \le$$

$$\le const\left\|\hat{f}(\lambda)\right\|^2_{L_2} = const\left\|f(t)\right\|^2_{L_2((0;1),H)}.$$

Здесь $\hat{V}(\lambda), \hat{f}(\lambda)$- преобразования Фурье функций $V(t), f(t)$ соответственно.

Далее, определим сужение решения $V(t)$ на $(0;1)$ и обозначим его через $u_\alpha(t)$.

Аналогично можно рассмотреть уравнение

$$P_\beta V \equiv -\frac{d^2V}{dt^2} + \beta A^2 V = F(t), \tag{4}$$

где

$$F(t) = \begin{cases} f(t),\ t \in (1;+\infty), \\ 0,\ t \in R \setminus (1;+\infty) \end{cases}$$

и определить решение $u_\beta(t)$ уравнения *(4)* из пространства $W_2^2((1;+\infty);H)$.

Таким образом, решение уравнения $P_0 u = f$ из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\mathbb{R}_+;H)$ представляется в виде

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) = u_\alpha(t) + e^{-\sqrt{\alpha}tA}\psi_0 + e^{-\sqrt{\alpha}(1-t)A}\psi_1, & 0 \le t < 1, \\ u_2(t) = u_\beta(t) + e^{-\sqrt{\beta}(t-1)A}\psi_2, & 1 < t < +\infty, \end{cases} \tag{5}$$

где векторы $\psi_0, \psi_1, \psi_2 \in D\left(A^{3/2}\right)$ (см., например, [1]), которые однозначно определяются из следующих условий:

$$\begin{cases} u(0) = u_1(0) = 0, \\ u(1) = u_1(1) = u_2(1), \\ u'(1) = u_1'(1) = u_2'(1). \end{cases} \tag{6}$$

А ограниченность оператора P_0 вытекает из неравенства

$$\|P_0 u\|_{L_2}^2 = \left\|-u'' + \rho(t)A^2 u\right\|_{L_2}^2 \le 2\max\left(1;\alpha^2;\beta^2\right)\|u\|_{W_2^2}^2 .$$

Далее, применяя теорему Банаха об обратном операторе, завершаем доказательство теоремы.

Вернемся к краевой задаче $\{(1), (2)\}$. Справедлива

Теорема 2. *Пусть* $A = A^* > cE\ (c > 0)$, *операторы* $A_j A^{-j}$, $j = 1,2$ *ограничены в* H *и выполняется неравенство*

$$\theta = \gamma_1\left\|A_1 A^{-1}\right\| + \gamma_2\left\|A_2 A^{-2}\right\| < 1,$$

где

$$\gamma_1 = \frac{1}{2\min^{1/2}(\alpha;\beta)}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\min(\alpha;\beta)}.$$

Тогда краевая задача $\{(1), (2)\}$ *при любом* $f(t)$ *из пространства* $L_2(\mathbb{R}_+;H)$ *имеет единственное решение из* $W_2^2(\mathbb{R}_+;H)$.

Доказательство. Напишем краевую задачу $\{(1), (2)\}$ *в виде* операторного уравнения

$$Pu \equiv P_0 u + P_1 u = f,$$

где $f \in L_2(\mathbb{R}_+;H)$, $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\mathbb{R}_+;H)$, а

$$P_1 u \equiv A_1 u' + A^2 u, \quad u \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\mathbb{R}_+;H).$$

По теореме 1 оператор P_0 иммет ограниченный обратный P_0^{-1}, действующий из пространства $L_2(\mathbb{R}_+;H)$ на пртранства $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\mathbb{R}_+;H)$. Тогда после замены $u = P_0^{-1}v$, где $v \in L_2(\mathbb{R}_+;H)$, мы получаем следующее уравнение в $L_2(\mathbb{R}_+;H)$:

$$\left(E + P_1 P_0^{-1}\right)v = f$$

Покажем, что при выполнении условий теоремы норма оператора $P_1P_0^{-1}$ меньше единицы.

Из уравнения *(1)* и краевого условия (2) после интегрирования по частям получаем:

$$\left(P_0u, A^2u\right)_{L_2} = \left(-u'' + \rho(t)A^2u, A^2u\right)_{L_2} = -\left(u'', A^2u\right)_{L_2} + \left\|\rho^{1/2}(t)A^2u\right\|_{L_2}^2 =$$

$$= \left\|Au'\right\|_{L_2}^2 + \left\|\rho^{1/2}(t)A^2u\right\|_{L_2}^2. \tag{7}$$

Далее, применяя к левой части равенства *(7)* известные неравенства, получим:

$$\left|\left(P_0u, A^2u\right)_{L_2}\right| \le \left\|P_0u\right\|_{L_2}\left\|A^2u\right\|_{L_2} \le \max_t \rho^{-1/2}(t)\left\|P_0u\right\|_{L_2}\left\|\rho^{1/2}(t)A^2u\right\|_{L_2} =$$

$$= \left\|\max\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}};\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)P_0u\right\|_{L_2}\left\|\rho^{1/2}(t)A^2u\right\|_{L_2} \le \frac{\varepsilon}{2}\max\left(\frac{1}{\alpha};\frac{1}{\beta}\right)\left\|P_0u\right\|_{L_2}^2 +$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon}\left\|\rho^{1/2}(t)A^2u\right\|_{L_2}^2, \quad (\varepsilon > 0). \tag{8}$$

Выбирая $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ в неравенстве *(8)* с учетом *(7)*, находим, что

$$\left\|Au'\right\|_{L_2}^2 \le \frac{1}{4}\max\left(\frac{1}{\alpha};\frac{1}{\beta}\right)\left\|P_0u\right\|_{L_2}^2 = \frac{1}{4\min(\alpha;\beta)}\left\|P_0u\right\|_{L_2}^2 = \gamma_1^2\left\|P_0u\right\|_{L_2}^2 \tag{9}$$

А из равенства *(7)* с учетом *(8)* получаем

$$\left(P_0u, A^2u\right)_{L_2} = \left\|Au'\right\|_{L_2}^2 + \left\|\rho^{1/2}(t)A^2u\right\|_{L_2}^2 = \left|\left(P_0u,\ A^2u\right)_{L_2}\right| \le \left\|P_0u\right\|_{L_2}\left\|A^2u\right\|_{L_2}$$

Отсюда находим, что

$$\left\|P_0u\right\|_{L_2}\left\|A^2u\right\|_{L_2} \ge \left\|\rho^{1/2}(t)A^2u\right\|_{L_2}^2 \ge \min(\alpha;\beta)\left\|A^2u\right\|_{L_2}^2$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$\left\|A^2u\right\|_{L_2} = \frac{1}{\min(\alpha;\beta)}\left\|P_0u\right\|_{L_2} = \gamma_2\left\|P_0u\right\|_{L_2} \tag{10}$$

Принимая во внимание *(9)*, *(10)* в следующем неравенстве, получаем:

$$\left\|P_1P_0^{-1}v\right\|_{L_2\to L_2} = \left\|P_1u\right\|_{L_2} \le \left\|A_1u'\right\|_{L_2} + \left\|A_2u\right\|_{L_2} = \left\|A_1A^{-1}Au'\right\|_{L_2} + \left\|A_2A^{-2}A^2u'\right\|_{L_2} \le$$

$$\le \left\|A_1A^{-1}\right\|\left\|Au'\right\|_{L_2} + \left\|A_2A^{-2}\right\|\left\|A^2u\right\|_{L_2} \le \frac{1}{2\min^{1/2}(\alpha;\beta)}\left\|A_1A^{-1}\right\|\left\|v\right\|_{L_2} + \frac{1}{\min(\alpha;\beta)}\times$$

$$\times\left\|A_2A^{-2}\right\|\left\|v\right\|_{L_2} = \left(\gamma_1\left\|A_1A^{-1}\right\| + \gamma_2\left\|A_2A^{-2}\right\|\right)\left\|v\right\|_{L_2}.$$

Таким образом,

$$\left\|P_1P_0^{-1}\right\|_{L_2\to L_2} \le \gamma_1\left\|A_1A^{-1}\right\| + \gamma_2\left\|A_2A^{-2}\right\| = \theta < 1.$$

Поэтому при выполнении этого неравенства оператор $E + P_1 P_0^{-1}$ обратим и можно найти $u(t)$, то есть $u = P_0^{-1}\left(E + P_1 P_0^{-1}\right)^{-1} f$.

Теорема доказана.

Если в рассматриваемом уравнении *(1)* принять $\alpha = \beta = 1$, то один из важных результатов, полученных М.Г. Гасымов и С.С. Мирзоевым [см. 2] есть частный случай найденного нами результата.

Литература

[1]. Лионс Ж.- Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* М., 1971.

[2]. Гасымов М.Г., Мирзоев С.С. *Дифференциальные уравнения.* 1992, т.28, №4, с. 651-661.

[3]. Мирзоев С.С. *Линейные операторы и их приложения.* Баку, 1989, с. 46-49.

Mirzəyev S.S., Əliyev A.R.

KƏSİLƏN ƏMSALLI İKİ TƏRTİLİ OPERATOR DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİR SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

Məqalədə kəsilən əmsallı operator diferensial tənliklər üçün qoyulmuş bir sərhəd məsələsinin korrekt və yeganə həllinin olması şərti tapılmışdır.

Mirzoyev S.S., Aliyev A.R.

ON ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR OPERATOR- DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER WITH THE DISCONTINUITY COEFFICIENT

The aim of this paper is to find the conditions of correct solvability of boundary value problem for operator- differential equations of the second order with the discontinuity coefficient.