УДК 517. 53

МУСАЕВ К.М.

О ГРАНИЧНЫХ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ СОПРЯЖЕННЫХ КЛАССОВ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

Рассмотрим класс обощенных аналитических функций $U_{p,2}(A,B,G)$, т.е. класс регулярных решений уравнения,

$$\partial_{\bar z} W(z) + A(z)W(z) + B(z)\overline{W(z)} = 0, \qquad (1)$$

где $A(z), B(z) \in \mathcal{L}_{p,2}(E), E$ - вся конечная плоскость,

$$\partial_{\bar z} W = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x} + i\frac{\partial W}{\partial y}\right) \qquad \text{(см.[1],стр 149).}$$

Уравнение

$$\partial_{\bar z} W(z) - A(z)W(z) - \overline{B(z)}\overline{W(z)} = 0, \qquad (2)$$

называется сопряженным с уравнением *(1)*.

Пусть G конечная область со спрямляемой границей Γ.

Определение 1. *Обобщенная аналитическая функция W(z) из класса* $U_{p,2}(A,B,G)$ *принадлежит классу* $E_\delta(A,B,G), \delta > 0$, *если существует последовательность спрямляемых кривых* $\{\gamma_n\}$, *сходящих к* Γ *и таких, что*

$$\int_{\gamma_n} |W(z)|^\delta |dz| \le c < +\infty, n = 1,2,\ldots \qquad (3)$$

(*c- не зависит* от n).

Класс $E_\infty(A,B,G)$ состоит из таких функций $W(z)$ $U_{p,2}(A,B,G)$, для которых

$$\sup_{z\in G} |W(z)| < +\infty. \qquad (4)$$

Класс $E_\delta(A,B,G), \delta > 0$ является аналогом хорошо известных для аналитических функций класса E_δ (см. [2], стр 203). Отметим, что если $W(z)$ $E_\delta(A,B,G)$, то $W(z)$ имеет почти везде на Γ угловые граничные значения $W(t)$ и $|W(t)|^\delta$ суммируемая на Γ.

Пусть теперь G конечная область с K границей Γ, т.е.

$$\forall z_1, z_2 \in \Gamma, \exists k > 0 : S(z_1, z_2) \le k|z_1 - z_2|.$$

Через $C(A,B,G)$ будем обозначать подкласс $E_\infty(A,B,G)$, состоящий из непрерывных в замкнутой области $\overline{G}$ функций.

Превратим $C(A,B,G)$ и $E_\infty(A,B,G)$ в нормированное пространство (вещественное), положив соответственно

$$\|W(z)\| = \max_{t\in\Gamma}|W(t)| \qquad \text{и} \qquad \|W(z)\| = vrai\max_{t\in\Gamma}|W(t)|. \tag{5}$$

Через $C^1(A,B,G)$ и $E_\infty^{\ 1}(A,B,G)$ обозначим единичные сферы в $C(A,B,G)$ и $E_\infty(A,B,G)$ соответственно.

Будем основываться на следующей лемме С.Я. Хавинсона (см. [3]).

Лемма 1. *Пусть $X = \{W$ - нормированное пространство, $E \subset X$ - подпространство, l- произвольный линейный функционал над X. Тогда*

$$\|l\|_E = \sup_{W\in E, \|W\|=1}|l(W)| = \inf_{m\in E^\perp}\|l - m\|. \tag{6}$$

где $E^\perp$ аннулятор E, т.е. совокупность линейных функционалов, обращающихся в нуль на $E : m(W) = 0$, если $W \in E$.

При этом существует линейный функционал $m^* \in E^\perp$, для которого нижняя грань достигается.

Теорема 1. *Пусть $K(t)$ суммируемая функция на Γ. Имеют место равенства*

$$\sup_{W(t)\in E_\infty^1(A,B,G)}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{i}\int_\Gamma W(t)k(t)dt\right) = \sup_{W(t)\in C^1(A,B,G)}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{i}\int_\Gamma W(t)k(t)dt\right) =$$
$$= \inf_{W_1(t)\in E_1(-A,-\overline{B},G)}\int_\Gamma|k(t) - W_1(t)||dt|. \tag{7}$$

При этом существует функция $W_1^*(z) \in E_1(-A,-\overline{B},G)$, для которого нижняя грань в (7) достигается.

Доказательство. Пространство $C(A,B,G)$ можно считать подпространством в пространстве $C_R(\Gamma)$- вещественном линейном пространстве всех непрерывных комплексных функций $f(t)$ на Γ с обычной нормой: $\|f\| = \max_{t\in\Gamma}|f(t)|$.

Тогда задача о $\sup\operatorname{Re}\left(\frac{1}{i}\int_\Gamma(t)k(t)dt\right)$ есть задача о вычислении нормы функционала $l(W) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{i}\int_\Gamma W(t)k(t)dt\right)$ на подпространстве $C(A,B,G)$. Найдем аннулятор $E^\perp$.

Пусть $X = \{x\}$ комплексное нормированное пространство, а X_R то же самое пространство, рассматриваемое как вещественное. Тогда произвольный линейный функционал $l_1(x)$ над X_R задается формулой

$$l_1(x) = \operatorname{Re} l(x) \tag{8}$$

где $l(x)$ некоторой (произвольный) линейный функционал над X. При этом $\|l_l\|_{X_R}=\|l\|_X$ (см. [5], стр. 139). Любой линейный функционал $m(W)$ над $C_R(\Gamma)$ поэтому имеет вид $m(W)=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{i}\int_\Gamma W(t)d\psi(t)\right)$, где $\psi(t)$ с ограниченным изменением на Γ. Так как должно быть для $W(z)\in C(A,B,G)$

$$m(W)=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{i}\int_\Gamma W(t)d\psi(t)\right)=0,$$

то по теореме 1. (см. работу [7]) $\psi(t)$ абсолютно непрерывна на Γ и $\psi'(t)$ граничные значения некоторой функции $W_1(z)$ из класса $U_{p,2}\left(-A,-\overline{B},G\right)$ и $W_1\ (z)\in E_1\left(-A,-\overline{B},G\right)$ Таким образом, $m(W)\in E^1$ имеет вид:

$$m(W)=\operatorname{Re}\frac{1}{i}\int_\Gamma W(t)W_1(t)dt,\quad W_1(z)\in E_1\left(-A,-\overline{B},G\right) \qquad (9)$$

Обратно любой функционал вида *(9)* входит E^1.

Как следует из *(8)* , норма над $C_R(\Gamma)$ функционала вида $\operatorname{Re}\frac{1}{i}\int_\Gamma W(t)\Omega(t)dt$ равнв $\int_\Gamma|\Omega(t)||dt|$.

Применяя лемму 1 и используя *(8)* , *(9)*, находим

$$\|l\|_{C(A,B,G)}=\|l\|_E=\sup_{W\in C^1(A,B,G)}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{i}\int_\Gamma W(t)k(t)dt\right)=\inf_{m\in E^1}\|l-m\|=$$

$$=\inf_{W_1\in E_1\left(-A,-\overline{B},G\right)}\int_\Gamma|k(t)-W_1(t)||dt|.$$

Осталось доказать первое из равенств *(7)*.

Для любой $W\ (z)\in E_\infty(A,B,G)$ и любой $W_1\ (z)\in E_1\left(-A,-\overline{B},G\right)$ имеем $\operatorname{Re}\frac{1}{i}\int_\Gamma W(t)W_1(t)dt=0$. Поэтому,

$$\operatorname{Re}\frac{1}{i}\int_\Gamma W(t)k(t)dt=\operatorname{Re}\frac{1}{i}\int_\Gamma W(t)(k(t)-W_\perp(t))dt\le\int_\Gamma(k(t)-W_1(t))|dt|,$$

и следовательно,

$$\sup_{W\in E^1_\infty(A,B,G)}R_e\frac{1}{i}\int_\Gamma W(t)k(t)dt\le\inf_{W_1\in E_1\left(-A,-\overline{B},G\right)}\int_\Gamma|k(t)-W_\perp(t)||dt|. \qquad (10)$$

С другой стороны, $E_\infty(A,B,G)\supset C^1(A,B,G)$, а для $C^1(A,B,G)$ уже доказано равенство. Следовательно, в *(10)* также будет равенство. Существование функции $W_1^*(z)$, реализующей нижнюю грань в *(7)* следует снова из леммы 1. Доказательство завершено.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании функций, реализующих верхнюю грань в *(7)*.

Пусть $\mathcal{L}_\infty(\Gamma) = \{\varphi$ пространство ограниченных измеримых комплексных функций на Γ с нормой $\|\varphi\| = vrai \max_{t\in\Gamma}|\varphi(t)|$ (если его рассматривать, как вещественное, то обозначение будет $L_{\infty,R}(\Gamma)$). Через $\mathcal{L}^1_\infty(\Gamma)$ обозначим единичную сферу в $\mathcal{L}_\infty(\Gamma)$. Пространство $\mathcal{L}_\infty(\Gamma)$ является сопряженным к $\mathcal{L}_1(\Gamma)$. В $\mathcal{L}_\infty(\Gamma)$, как в сопряженном пространстве, определена слабая топология (см. [4], стр. 466).

Лемма 2. *Множество* $E^1{}_\infty(A,B,G)$ *замкнуто в* $\mathcal{L}_\infty(\Gamma)$ *относительно слабой (*) топологии пространства* $\mathcal{L}_\infty(\Gamma)$.

Доказательство. Так как пространство $\mathcal{L}_1(\Gamma)$- сепарабельно, то слабая (*) топология в $\mathcal{L}_\infty(\Gamma)$ метризуема (см. [4], стр. 461). Пусть $W(z)$ предельна точка для $E^1{}_\infty(A,B,G)$. Тогда существует последовательность $\{W_n(z)\} \in E^1_\infty(A,B,G)$ слабо (*) сходящаяся к $W(z)$, т.е. для любой функции $q(t) \in \mathcal{L}_1(\Gamma)$ будет

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Gamma q(t)W_n(t)dt = \int_\Gamma q(t)W(t)dt, \lim_{n\to\infty}\int_\Gamma q(t)\overline{W_n(t)dt} = \int_\Gamma q(t)\overline{W_n(t)dt}.$$

В качестве $q(t)$ возьмем основные ядра класса $U_{p,2}(A,B,G)$ фунции $\Omega_1(z,t), \Omega_2(z,t)$ – которые непрерывны по Гельдеру во всей плоскости при $z \overline{\in} \Gamma$ (см. [1], стр. 177-179).

Поэтому для любого $z \overline{\in} \Gamma$ будем иметь

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_1(z,t)W_n(t)dt - \Omega_2(z,t)\overline{W_n(t)dt} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_1(z,t)W(t)dt - \Omega_2(z,t)\overline{W(t)dt}.$$

Так как $W_n(z) \in E_1(A,B,G)$, то, левая часть равенства есть интеграл Коши (см. [6], [8] (теорему 3)). В частности, отсюда получаем, что (см. [6], (теорему 2)).

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_1(z,t)W(t)dt - \Omega_2(z,t)\overline{W(t)dt} \equiv 0, z \overline{\in} \overline{G}.$$

Поэтому $W_0(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \Omega_1(z,t)W(t)dt - \Omega_2(z,t)\overline{W(t)dt}, z \in G,$ есть интеграл Коши и, следовательно, $W_0(z) \in E_1(A,B,G)$, а $W(t)$- угловые граничные значения $W_0(z)$. В силу известных фактов о слабой сходимости

$$\|W(t)\| \le \varliminf_{n\to\infty}|W_n(t)| \le 1$$

Отсюда следует, во-первых, что $W_0(z)$, входя в класс $E_1(A,B,G)$ и имея ограниченные граничные значения $W_0(t)$ входит в $E_\infty(A,B,G)$ и $W(z)\in E_\infty{}^1(A,B,G)$.

Теорема 2. *Существует функция* $W^*(z)\in E_\infty{}^1(A,B,G)$, *для которой достигается верхняя грань в левой части равенств (7).*

Доказательство. Единичная сфера $\mathcal{L}^1{}_\infty(\Gamma)$ бикомпактна в слабой (*) топологии (см. [4], стр. 459). Поэтому множество $E^1{}_\infty(A,B,G)$, будучи по лемме 2 замкнутой частью $\mathcal{L}_\infty(\Gamma)$, будет также бикомпактным.

Функционал $R_e\dfrac{1}{i}\int\limits_\Gamma W(t)k(t)dt$, очевидно, непрерывен на $E^1{}_\infty(A,B,G)$ в смысле слабой топологии, а значит достигает своей верхней грани.

Замечание. Верхняя грань $\sup\limits_{W\in C^1(A,B,G)} R_e\dfrac{1}{i}\int\limits_\Gamma Wkdt$ может и не достигаться.

Теорема 3. *Пусть* $k(t)$ *суммируемая на* Γ *функция, но* $k(z)\in E_1(-A,-\overline{B},G)$. *Для того, чтобы функции* $W^*(z)\in E_\infty(A,B,G)$ *и* $W_1^*(z)\in E_1(-A,-\overline{B},G)$ *были экстремальными в равенстве (7), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$\frac{1}{i}W^*(t)\left[k(t)-W_1^*(t)\right]dt=\left|k(t)-W_1^*(t)\right|\left|dt\right|, \qquad (11)$$

почти везде на Γ. *Экстремальные функции* $W^*(z)\in E_\infty^1(A,B,G)$ *и* $W_1^*(z)\in E_1(-A,-\overline{B},G)$ *единственны.*

Доказательство. Пусть $W^*(t)$ и $W_1^*(t)$ соответствующие экстремальные функции.

Имеем:

$$\mathrm{Re}\frac{1}{i}\int\limits_\Gamma W^*(t)k(t)dt=\mathrm{Re}\frac{1}{i}\int\limits_\Gamma W^*(t)\left(k(t)-W_1^*(t)\right)dt\le$$

$$\le\int\limits_\Gamma\left|W^*(t)\right|\left|k(t)-W_1^*(t)\right|\left|dt\right|\le\int\limits_\Gamma\left|k(t)-W_1^*(t)\right|\left|dt\right|. \qquad (12)$$

С другой стороны, так как $W^*(t)$ и $W_1^*(t)$ экстремальные для равенства *(7)* то в *(12)* должны иметь место равенства. Это возможно лишь тогда, когда , во- первых, почти везде на Γ:

$$\mathrm{Re}\frac{1}{i}W^*(t)\left(k(t)-W_1^*(t)\right)dt=\left|W^*(t)-W_1^*(t)\right|\left|dt\right|$$

а, во- вторых, почти везде на Γ: $\left|W^*(t)\right|\left|k(t)-W_1^*(t)\right|\left|dt\right|=\left|k(t)-W_1^*(t)\right|\left|dt\right|$. Из последних двух соотношений немедленно вытекает соотношение *(11)*. Обратно, если выполняется *(11)* то в цепочке неравенств *(12)* имеют место равенства, поэтому $W^*(t)$ и $W_1^*(t)$ экстремальны для *(7)*.

Докажем, например единственность $W^*(t)$. Разность $k(t)-W_1^*(t)\neq 0$ на множестве положительной меры (иначе бы $k(t)\in E_1\left(-A,-\overline{B},G\right)$).

Но на множестве $W^*(t)=i\dfrac{\left|k(t)-W_1^*(t)\right|\left|dt\right|}{\left[k(t)-W_1^*(t)\right]dt}$ и стало- быть определяется единственным образом. В силу граничной теоремы единственности (см. [1], стр. 158), $W^*(z)$ определена единственным образом во всей области G.

Следствие. *Если функция* $k(t)$ *не совпадает ни с одной из функций* $W_1(z)$ *класса* $E_1\left(-A,-\overline{B},G\right)$ *ни на одном из множеств* $T\subset\Gamma, mes, T>0,$ *то* $\left|W^*(t)\right|=1$ *почти везде на* Γ.

Литература

[1]. Н. Векуа. *"Обобщенные аналитические функции"*, Физматгиз, М.Н., 1959, стр. 627.

[2]. И.И. Привалов. *"Граничные свойства аналитических функций"*, М.Н. 1950 стр. 335.

[3]. С.Я. Хавинсон. *"Экстремальные задачи для некоторых классов аналитических функций в конечносвязных областях "*, Матем. сборник, 36(78): 3 (1955), с. 445-478.

[4]. Н. Данфорд и Дж. Шварц *"Линейные операторы"*, Москва, т.1, с.895

[5]. Л.В. Канторович и Г.П. Акилов *"Функциональный анализ в нормированных пространствах"*, М.Н., 1959, с. 648.

[6]. К.М. Мусаев *"О некоторых граничных свойствах обобщенных аналитических функций"*, ДАН СССР, т.181, 1 968, № 6, с. 1335-1338.

[7]. К.М. Мусаев, Т.Х. Гасымов *"О граничных свойствах сопряженных классов обобщенных аналитических функций"*, Труды ИММ, посв. 50 летию АН Азерб. Респ., Баку, 1995, с.165-169.

[8]. М. Мусаев *"Об ограниченности сингулярного интеграла Коши в классе обобщенных аналитических функций"*, Известия Ан Азерб.Респ., 1986 № 6, т. 7, с. 3-8.

Musayev K.M.

ÜMUMİLƏŞMİŞ ANALİTİK FUNKSİYALARIN QOŞMA SİNİFLƏRİNİN SƏRxƏD VƏ EKSTREMAL XASSƏLƏRİ HAQQINDA

Məqalədə umimmiləşmiş analitik funksiyaların iki qoşma sinifinə baxılır. Həmin iklik münasibəti ilə bağlı ekstremal məsələ tədqiq olunur. Ekstremal funksiyaların varlığı və yeganəliyi üyrənilir.

Musayev K.M.

ON BOUNDARY AND EXTREMAL PROPETIES OF CONJUGATE CLASSES JF GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS.

Some classes of generalized analytic functions are introduced and extremal problems in the form of duality relations are considered for them.