УДК 517.51

МУСТАФАЕВ Р.Ч.

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С.Л.СОБОЛЕВА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

Введение

Рассмотрим параболическое уравнение вида

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^{m/2} \sum_{|\alpha \le m} a_\alpha(x,t) D_x^\alpha u = f(x,t) \qquad (1)$$

(m-четное натуральное число)

коэффициенты которого определены в полосе $R^n \times (0,T)$ и удовлетворяют условию-

$$\lambda^{-1}|\xi|^m \le \sum_{|\alpha = m} a_\alpha(x,t)\xi^\alpha \le \lambda|\xi|^m, \ \forall (x,t) \in R^n \times (0,T), \quad \forall \xi \in R^n \qquad (*)$$

$$\lambda = const > 0 \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}.$$

Предположим, что

a) a_α равномерно непрерывна на $R^n \times (0,T), \quad \forall \alpha : |\alpha| \le m$

b) $\exists M > 0 \quad |a_\alpha(x,t)| \le M \quad \forall (x,t) \in R^n \times (0,T), \forall \alpha : |\alpha| \le m.$

Пусть Ω – область в R^n. Введем пространство $W_{\bar p}^{m,1}(\Omega \times [0,T))$, $1 < \bar p = (p_1, \ldots, p_{n+1}) < \infty$ $(m.e. 1 < p_i < \infty, \quad i = 1, \ldots, n+1)$ с нормой

$$\|u\|_{W_{\bar p}^{m,1}(\Omega\times[0,T))} = \|u\|_{L_{\bar p}(\Omega\times[0,T))} + \|u\|_{w_{\bar p}^{m,1}(\Omega\times[0,T))},$$

где

$$\|u\|_{L_p(\Omega\times[0T))} = \left(\int_0^T \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x_1, \ldots, x_n, t)|^{p_1} \right)^{p_2/p_1} \cdots \right)^{p_{n+1}/p_n} dt \right)^{1/p_{n+1}},$$

$$\|u\|_{w_{\bar p}^{m,1}(\Omega\times[0,T))} = \sum_{|\alpha|=m} \|D_x^\alpha u\|_{L_{\bar p}(\Omega\times[0,T))} + \|D_t u\|_{L_{\bar p}(\Omega\times[0,T))}.$$

Через $B_{\bar p}^{m-m/p_{n+1}}(R^n)$ обозначим пространство О.В.Бесова:

$$\|\varphi\|_{B_{\bar p}^{m-m/p_{n+1}}(R^n)} = \|\varphi\|_{L_{p'}(R^n)} + \|\varphi\|_{b_{\bar p}^{m-m/p_{n+1}}(R^n)}$$

Здесь $p' = (p_1, \ldots, p_n)$;

$$\|\varphi\|_{b_{\bar p}^{m-m/p_{n+1}}(R^n)}=\left(\int_{R^n}\left(\frac{\left\|\Delta^m(z)\varphi\right\|_{L_{p'}(R^n)}}{|z|^{m-m/p_{n+1}}}\right)^{p_{n+1}}\frac{dz}{|z|^n}\right)^{1/p_{n+1}},$$

$$\Delta^m(z)\varphi(x)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}C_m^j\varphi(x+jz).$$

В работе рассматривается задача Коши

$$\begin{cases}Lu=f(x,t)\\ u|_{t=0}=\varphi(x)\end{cases}\quad \left(x\in R^n,\quad 0<t<T\right) \tag{2}$$

Основной результат работы формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Пусть* $1<\bar p<\infty$, *коэффициенты* $a_\alpha(x,t)$ *оператора* L *удовлетворяют условиям* (a), (b),

$$f\in L_{\bar p}\left(R^n\times[0,T)\right),\quad \varphi\in B_{\bar p}^{m-m/p_{n+1}}(R^n).$$

Тогда для решения задачи (2) справедлива оценка

$$\|u\|_{W_{\bar p}^{m,1}(R^n\times[0,T))}\le C(T)\left(\|Lu\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))}+\|\varphi\|_{B_{\bar p}^{m-m/p_{n+1}}(R^n)}\right). \tag{3}$$

1.Фундаментальное решение и оценка теплового потенциала

Рассмотрим уравнение с постоянными коэффициентами

$$L_1^0u\equiv\frac{\partial u}{\partial t}+(-1)^{m/2}\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha D_x^\alpha u=f(x,t) \tag{4}$$

$$\lambda^{-1}|\xi|^m\le\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha\xi^\alpha\le\lambda|\xi|^m,\quad \forall\xi\in R^n \tag{**}$$

Известно [7], что однородное уравнение

$$L_1^0u=0$$

имеет фундаментальное решение

$$\Gamma(x,t)=(2\pi)^{-n}\int_{R^n}e^{ix\xi-t\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha\xi^\alpha}d\xi,\quad t>0$$

$$\Gamma(x,t)=0,\quad t<0.$$

Обозначим через $K(x,t)=D_t^\alpha D_z^\beta\Gamma(x,t),\quad \alpha\in N_0\equiv N\cup\{0\}$, $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)\in N_0^n,\quad m\alpha+|\beta|=m.$

Легко видеть (см.[7]), что $K(x,t)$ удовлетворяет соотношениям

$$K\left(\lambda^{1/m}x,\lambda t\right)=\lambda^{-1-n/m}K(x,t),\quad \lambda>0.$$

Справедлива оценка

$$|K(x,t)|\le C_1t^{-1-n/m}e^{-C_2\frac{|x|^{\frac{m}{m-1}}}{t^{\frac{1}{m-1}}}},\quad (C_1,C_2>0) \tag{5}$$

(см.[5],[7]).

Рассмотрим потенциал

$$u(x,t)=\int_0^t d\tau\int_{R^n}\Gamma(x-y,t-\tau)f(y,\tau)dy, \qquad (6)$$

где Γ-фундаментальное решение уравнения (4), а f-гладкая функция.

Справедлива

Теорема 2.*При всех* $1<\overline{p}<\infty$ *для потенциала (6) имеет место оценка*

$$\|u\|_{W_{\overline{p}}^{m,1}(R^n\times[0,T])}\le C\|f\|_{L_{\overline{p}}(R^n\times[0,T])} \qquad (7)$$

Доказательство.Легко видеть, что

$$D_x^\beta u(x,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{t-\varepsilon}\int_{R^n}D_x^\beta\Gamma(x-y,t-\tau)f(y,\tau)dyd\tau,\quad |\beta|=m$$

$$D_t u(x,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{t-\varepsilon}\int_{R^n}D_t\,\Gamma(x-y,t-\tau)f(y,\tau)dyd\tau+f(x,t). \qquad (8)$$

Рассмотрим введенный Джонсом [7] параболический сингулярный интеграл вида

$$Kf(x,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{t-\varepsilon}\int_{R^n}K(x-y,t-\tau)f(y,\tau)dyd\tau \qquad (9)$$

Ограниченность в $L_p\left(\overline{R}^n\times[0,T)\right)$, $1<p<\infty$ оператора $f\to Kf$ доказана в [7] (см.также[6]).

Ядро K однородно: $K\left(\lambda x,\lambda^m t\right)=\lambda^{-n-m}K(x,t)$ и не является локально интегрируемым, но удовлетворяет условиям

$$\int_{\varepsilon<\pi(x,t)\le 1}K(x,t)dxdt=0 \qquad (10)$$

$$\int_{\pi(x,t)\ge 2r}\left|K(x-y,t-\tau)-K(x,t)\right|dxdt\le C,\quad \text{если}\ \ \pi(y,\tau)\le r \qquad (11)$$

где $\pi(x,t)=\max\left(|x_i|,|t|^{1/m}\right)$ (см.[6])

Интегралы вида (9) могут быть выражены через сингулярные интегралы

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi(x-y,t-\tau)\ge\varepsilon}K(x-y,t-\tau)f(y,\tau)dyd\tau\equiv\vartheta(x,t). \qquad (12)$$

Действительно

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{t-\varepsilon}\int_{R^n}K(x-y,t-\tau)f(y,\tau)dyd\tau=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi(x-y,t-\tau)\ge\varepsilon^{1/m}}K(x-y,t-\tau)f(y,\tau)dyd\tau-Cf(x,t),$$

где

$$C=\int_{t-1}^{t}d\tau\int_{\max|x_i-y_i|\ge 1}K(x-y,t-\tau)dy.$$

(см. [4])

Сингулярные интегралы вида (12) рассмотрены в [2]. В теореме 3.5., в частности, доказывается, что если выполнены условия (10),(11) и если имеет место оценка

$$\|\vartheta\|_{L_{p_0}(R^n\times[0,T))}\le C\|f\|_{L_{p_0}(R^n\times[0,T))}$$

(хотя бы при одном $1<p_0<\infty$), то справедливо неравенство

$$\|\vartheta\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))}\le C\|f\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))}$$

при всех $\bar p:1<\bar p<\infty$.

Таким образом доказана ограниченность K в $L_p\left(R^n\times[0,T)\right)$. Из равенств (8) получается неравенство (7) теоремы 2.

Теорема 2 доказана.

Следствием теоремы 2 является оценка решений задачи

$$\begin{cases}L_1^0u=f(x,t)\\ u\big|_{t=0}=0\end{cases}\quad\left(x\in R^n,\quad 0<t<T\right)\tag{13}$$

Теорема 3. *Пусть* $1<\bar p<\infty$, $f\in L_{\bar p}\left(R^n\times[0,T)\right)$. Тогда для решения задачи (13) справедлива оценка

$$\|u\|_{W_{\bar p}^{m,1}(R^n\times[0,T))}\le C\|f\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))}\tag{14}$$

Доказательство. Решение задачи (13) имеет вид

$$u(x,t)=\int_0^t d\tau\int_{R^n}\Gamma(x-y,t-\tau)f(y,\tau)dy,$$

так что оценка (14) вытекает изтеоремы 2.

Теорема 3 доказана.

Замечание. *Ввиду условия (**) постоянная С в теореме 3 зависит только от* λ, p *и* n.

2. Уравнения с переменными коэффициентами

Введем некоторые обозначия:

$$L_1=\frac{\partial}{\partial t}+(-1)^{m/2}\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x,t)D_x^\alpha;$$

$$L_2=L-L_1;$$

$$Q_R(a)=\left\{x\in R^n:|x_i-a_i|<R,\quad i=1,\dots,n\right\};$$

$$K_R^T(a)=Q_R(a)\times(0,T);$$

$$a=(a_1,\dots,a_n)\in R^n.$$

Пусть $\omega\in C^\infty(R^n\times(0,T))$, такая, что

$$\sup_{R^n\times[0,T]}\left|D_t^\alpha D_x^\beta \omega(x,t)\right|\le M,\quad m\alpha+|\beta|\le m,$$

$$\omega\equiv 1 \quad \text{в} \quad \overline{K_{1/3}^T}(0),$$

$$\omega\equiv 0 \quad \text{вне} \quad \overline{K_{2/3}^T}(0).$$

Итак мы доказали, что

$$\|u\|_{W_p^{m,1}(R^n\times[0,T))}\le C\left\|L_1^{(x_0,t_0)}u\right\|_{L_p(R^n\times[0,T))} \tag{15}$$

$$\forall u\in W_p^{m,1}(R^n\times[0,T)) : u\big|_{t=0}=0,\quad \forall(x_0,t_0)\in R^n\times(0,T).$$

Здесь

$$L_1^{(x_0,t_0)}=\frac{\partial}{\partial t}+(-1)^{m/2}\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x_0,t_0)D_x^\alpha.$$

Ради простоты выберем точку (0,0).

В силу непрерывности a_α имеем:

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists T=T(\varepsilon)>0,\quad \left|a_\alpha(x,t)-a_{\alpha)}(0,0)\right|<\varepsilon \tag{16}$$

$$\forall(x,t)\in K_T^T(0),\quad \forall\alpha:|\alpha|=m.$$

Пусть $0<R_1<R_2<T$.

Введем функцию

$$\xi(x,t)=\begin{cases}1\ , & \text{в}\quad K_{R_1}^T(0)\\ \omega\left(\dfrac{|x_1|-R_1}{R_2-R_1},\dots,\dfrac{|x_n|-R_1}{R_2-R_1},t\right), & \text{в}\quad K_{R_2}^T(0)\setminus K_{R_1}^T(0)\end{cases}$$

Очевидно, что

$$\exists \dot C>0\ \|\xi\|_{C^{m,1}\left(K_{R_2}^T(0)\right)}=\sum_{|\alpha|+m\beta\le m}\sup_{\overline{K_{R_2}^T}}\left|D_t^\alpha D_x^\beta\xi(x,t)\right|\le C\left(1-\frac{R_1}{R_2}\right)^{-m}.$$

Возьмем $\forall u\in W_p^{m,1}(R^n\times[0,T)) : u\big|_{t=0}=0.$

В силу неравенства (15) и (16) имеем:

$$\|\xi u\|_{W_p^{m,1}(R^n\times(0,T))}\le C\left\|L_1^{(0,0)}(\xi u)\right\|_{L_p(R^n\times[0,T))}\le C\left\|\left(L_1-L_1^{(0,0)}\right)(\xi u)\right\|_{L_p(R^n\times[0,T))}+$$

$$+C\left\|L_1(\xi u)\right\|_{L_p(R^n\times[0,T))}\le\varepsilon C\|\xi u\|_{W_p^{m,1}(R^n\times[0,T))}+C\left\|L_1(\xi u)\right\|_{L_p(R^n\times[0,T))}.$$

Выбирая $\varepsilon<\dfrac{1}{2C}$ получаем:

$$\|\xi u\|_{W_p^{m,1}(R^n\times[0,T))}\le C\left\|L_1(\xi u)\right\|_{L_p(R^n\times[0,T))}.$$

Ясно, что

$$L_1(\xi u)=\xi L_1 u+\left(u\frac{\partial\xi}{\partial t}+N\right),$$

где N-линейная комбинация производных от u по x, порядок которых не превышает m-1, умноженных на производные от ξ по x, порядка не выше m, причем производные от u порядка k умножаются на производные $\xi\,(m-k)$-го порядка.

Поэтому

$$\left\| u\frac{\partial\xi}{\partial t}+N\right\|_{L_{\bar p}(K^T_{R_2}(0))}\le C\|\xi\|_{C^{m,1}(K^T_{R_2}(0))}\sum_{|\alpha|\le m-1}\|D^\alpha_x u\|_{L_{\bar p}(K^T_{R_2}(0))}.$$

Следовательно ,

$$\|L_1(\xi u)\|_{L_{\bar p}(R^n\times(0,T))}\le C\|\xi\|_{C^{m,2}(K^T_{R_2}(0))}\times\left(\|L_1u\|_{L_{\bar p}(K^T_{R_2}(0))}+\sum_{|\alpha|\le m-1}\|D^\alpha_x u\|_{L_p(K^T_{R_2}(0))}\right).$$

Так как $\xi u=u$ в $K^T_{R_1}(0)$, то имеет место неравенство

$$\|u\|_{W^{m,1}_{\bar p}(K^T_{R_1}(0))}\le\|\xi u\|_{W^{m,1}_{\bar p}(K^T_{R_2}(0))}\le C\|\xi\|_{C^{m,1}(K^T_{R_2}(0))}\times$$

$$\times\left(\|L_1u\|_{L_{\bar p}(K^T_{R_2}(0))}+\sum_{|\alpha|\le m-1}\|D^\alpha_x u\|_{L_{\bar p}(K^T_{R_2}(0))}\right).$$

Известно [2], что $\forall\varepsilon>0\quad\exists C=C(\varepsilon)>0$

$$\sum_{|\alpha|\le m-1}\|D^\alpha_x u\|_{L_{\bar p}(K^T_{R_2}(0))}\le C\varepsilon^{1/m}\|u\|_{W^{m,1}_{\bar p}(K^T_{R_2}(0))}+c\varepsilon^{1/m-1}\|u\|_{L_{\bar p}(K^T_{R_2}(0))}. \qquad (17)$$

Положим

$$A=\sup_{0\le r\le T}\left\{\left(1-\frac{r}{T}\right)^{m^2}\|u\|_{W^{m,1}_{\bar p}(K^T_r(0))}\right\}.$$

Тогда $\exists R_1,\quad 0<R_1<T$

$$A\le 2\left(1-\frac{R_1}{T}\right)^{m^2}\|u\|_{W^{m,1}_{\bar p}(K^T_{R_1}(0))}.$$

При $R_1<R_2<T$ имеем:

$$A\le 2\left(1-\frac{R_1}{T}\right)^{m^2}C_1\left(1-\frac{R_1}{R_2}\right)^{-m}\times\left\{\|L_1u\|_{L_p(K^T_{R_2}(0))}+\sum_{|\alpha|\le m-1}\|D^\alpha_x u\|_{L_{\bar p}(K^T_{R_2}(0))}\right\}\le$$

$$\le 2C_1\left(1-\frac{R_1}{T}\right)^{m^2}C_1\left(1-\frac{R_1}{R_2}\right)^{-m}\times$$

$$\times\left\{\|L_1u\|_{L_{\bar p}(K^T_T(0))}+C\varepsilon^{1/m}\|u\|_{W^{m,1}_{\bar p}(K^T_{R_2}(0))}+c\varepsilon^{1/m-1}\|u\|_{L_p(K^T_{R_2}(0))}\right\}\le$$

$$\le 2C_1\left(1-\frac{R_1}{T}\right)^{m^2}C_1\left(1-\frac{R_1}{R_2}\right)^{-m}C\varepsilon^{1/m}\left(1-\frac{R_2}{T}\right)^{-m^2}A+2C_1\left(1-\frac{R_1}{T}\right)^{m^2}\left(1-\frac{R_1}{R_2}\right)^{-m}\times$$

$$\times\|L_1u\|_{L_p(K^T_T(0))}+2C_1\left(1-\frac{R_1}{T}\right)^{m^2}\left(1-\frac{R_1}{R_2}\right)^{-m}c\varepsilon^{1/m-1}\|u\|_{L_{\bar p}(K^T_{R_2}(0))}.$$

Положим $\delta=1-\frac{R_1}{T}$ и выберем R_2 и ε так, чтобы

$$1-\frac{R_2}{T}=\frac{\delta}{2},\quad \varepsilon^{1/m}=2^{-2-m-m^2}\frac{\delta}{C_1}.$$

Тогда

$$0<\delta<1,\quad \delta/2<1-R_1/R_2<\delta,\quad 0<\varepsilon<1$$

и

$$2C_1\left(1-\frac{R_1}{T}\right)^{m^2}\left(1-\frac{R_1}{R_2}\right)^{-m}\left(1-\frac{R_2}{T}\right)^{-m^2}\quad \varepsilon^{1/m}<1/2,$$

так что

$$A\le 4C_1\left(1-\frac{R_1}{T}\right)^{m^2}\left(1-\frac{R_1}{R_2}\right)^{-m}\|L_1u\|_{L_{\bar p}(K_T^T(0))}+4C_1\left(1-\frac{R_1}{T}\right)^{m^2}\left(1-\frac{R_1}{R_2}\right)^{-m}\times$$
$$\times C\varepsilon^{1/m-1}\|u\|_{L_{\bar p}(K_{R_2}^T(0))}\le 4C_1 2^{m(2+m^2)}C\left(\|L_1u\|_{L_{\bar p}(K_T^T(0))}+\|u\|_{L_{\bar p}(K_T^T(0))}\right)$$

Итак мы доказали:

$$\|u\|_{w_{\bar p}^{m,1}(K_r^T(0))}\le C\left(1-\frac{r}{T}\right)^{-m^2}\times\left(\|L_1u\|_{L_{\bar p}(K_T^T(0))}+\|u\|_{L_{\bar p}(K_T^T(0))}\right)\qquad (18)$$
$$\forall u\in W_{\bar p}^{m,1}\left(R^n\times[0,T)\right):u|_{t=0}=0.$$

Из (18) можно получить следующее неравенство:

$$\|u\|_{w_{\bar p}^{m,1}(K_r^T(a))}\le C\left(1-\frac{r}{T}\right)^{-m^2}\times\left(\|L_1u\|_{L_{\bar p}(K_T^T(a))}+\|u\|_{L_{\bar p}(K_T^T(a))}\right)$$
$$\forall u\in W_{\bar p}^{m,1}\left(R^n\times[0,T)\right):u|_{t=0}=0,\quad \forall a\in R^n.$$

Покрывая R^n попарно непресекающимися кубами $Q_{T/2}(a),\quad a\in M_0$ (M_0 – некоторая решетка) получаем: ($r=T/2$)

$$\|u\|_{w_{\bar p}^{m,1}(R^n\times[0,T))}\le\sum_{a\in M_0}\|u\|_{w_{\bar p}^{m,1}(K_{T/2}^T(a))}\le C\sum_{a\in M_0}\left(\|L_1u\|_{L_{\bar p}(K_T^T(a)}+\|u\|_{L_{\bar p}(K_T^T(a))}\right)\le$$
$$\le C\left(\|L_1u\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))}+\|u\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))}\right)$$

Итак:

$$\|u\|_{w_{\bar p}^{m,1}(R^n\times[0,T))}\le C\left(\|L_1u\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))}+\|u\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))}\right)$$
$$\forall u\in w_{\bar p}^{m,1}\left(R^n\times[0,T)\right):u|_{t=0}=0.$$

для достаточно малых T.

Далее:

$$\|u\|_{W_{\bar p}^{m,1}(R^n\times[0,T))} \le \|u\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))} + \|u\|_{W_{\bar p}^{m,1}(R^n\times[0,T))} \le C\|L_1 u\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))} +$$

$$+C\|u\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))} \le C\|L\, u\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))} + C\|L_2 u\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))} + C\|u\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))} \le$$

$$\le C\|L\, u\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))} + C\sum_{|\alpha|\le m-1}\|D_x^\alpha u\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))} + C\|u\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))} \le$$

$$\le C\|Lu\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))} + C\varepsilon^{1/m}\left(\|u\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))} + \|u\|_{W_{\bar p}^{m,1}(R^n\times[0,T))}\right) +$$

$$+\left(C\varepsilon^{1/m}+C\right)\|u\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))}.$$

Выбирая $\varepsilon=(2C)^{-m}$ получаем:

$$\|u\|_{W_{\bar p}^{m,1}(R^n\times[0,T))} \le C\left(\|L_1 u\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))} + \|u\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))}\right) \qquad (20)$$

Итак мы доказали, что для достаточно малых T справедливо неравенство (21) для $\forall u\in W_{\bar p}^{m,1}\left(R^n\times[0,T)\right):\, u|_{t=0}=0$.

Так как

$$u(x,t)=\int_0^t u_\tau(x,\tau)d\tau,$$

то

$$|u(x,t)|\le\left|\int_0^T u_s(x,s)\right|ds.$$

Поэтому

$$\|u\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))}\le$$

$$\le\left(\int_0^T\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\left(\int_{\infty}^{+\infty}\left(\int_0^T|u_s(x,s)|ds\right)^{p_1}dx_1\right)^{p_2/p_1}\cdots\right)^{p_{n+1}/p_n}dt\right)^{1/p_{n+1}}\le$$

$$\le\int_0^T\left(\int_0^T\left(\cdots\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|u_s(x,s)|^{p_1}dx_1\right)^{p_2/p_1}dx_2\right)^{p_3/p_2}\cdots\right)^{p_{n+1}/p_n}dt\right)^{1/p_{n+1}}ds=$$

$$=T^{1/p_{n+1}}\int_0^T\left(\cdots\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|u_s(x,s)|^{p}\,dx_1\right)^{p_2/p_1}dx_2\right)^{p_3/p_2}\cdots\right)^{1/p_n}ds\le$$

$$\le T\|u\|_{W_{\bar p}^{m,1}(R^n\times[0,T))}.$$

Отсюда

$$\|u\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))}\le T\|u\|_{W_{\bar p}^{m,1}(R^n\times[0,T))}. \qquad (21)$$

Из неравенств (21) и (22) вытекает, что

$$\exists T_0>0,\quad \forall T\le T_0\quad \|u\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))}\le C\|u\|_{W_{\bar p}^{m,1}(R^n\times[0,T))} \qquad (22)$$

Пусть u является решением задачи

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ u\big|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad \left(x \in R^n, \quad 0 < t < T\right)$$

Разбивая $R^n \times [0,T)$ на конечное число полос $R^n \times [T_i, T_{i+1})$ с $|T_i - T_{i+1}| \le T_0$ и применяя (23) на каждой полосе получаем, что $u \equiv 0$ в $R^n \times [0,T)$.

Этим доказана единственность задачи

$$\begin{cases} Lu = f \\ u\big|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad \left(x \in R^n, \quad 0 < t < T\right) \tag{23}$$

Перейдем теперь к доказательству существования решения задачи (24).

Из неравенства (23) вытекает существование решения u задачи (24) в полосе $R^n \times [0,T)$ для некоторого малого T_0. Обозначим через

$$v(x,t) := u(x,t) - u(x, T_0/2).$$

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} L\omega = F, \\ \omega\big|_{t=\frac{T_0}{2}} = 0 \end{cases} \qquad (x,t) \in R^n \times \left[\frac{T_0}{2}, \frac{3T_0}{2}\right)$$

где $F(x,t) - Lu(x, T_0/2)$.

Такая ω существует в силу неравенства (23), а из единственности получаем , что

$$v(x,t) = \omega(x,t) \quad \text{на} \quad R^n \times [T_0/2, T_0).$$

Таким образом ω есть продолжение функции v из $R^n \times [0,T)$ в $R^n \times [0, 3T_0/2)$.

Рассмотрим функцию

$$u_1(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & R^n \times [0, T_0) \\ \omega(x,t) + u((x, T_0/2), & R^n \times [T_0, 3T_0/2). \end{cases}$$

Ясно, что u_1 есть решение задачи (24) на $R^n \times [0, 3T_0/2)$.

Повторив этот процесс конечное число раз мы получаем существование решения задачи (24).

Итак мы доказали существование и единственность решения задачи (24). Тогда из известной теоремы функционального анализа получаем, что обратный оператор L^{-1} тоже ограничен, т.е. справедливо неравенство

$$\|u\|_{W_{\bar p}^{m,1}(R^n \times [0,T))} \le C \|Lu\|_{L_{\bar p}(R^n \times [0,T))}. \tag{24}$$

Теперь рассмотрим задачу (2) как пространство $B_p^{m-m/p_{n+1}}(R^n)$ является пространством следов функций из $W_{\bar p}^{m,1}(R^n \times [0,T))$ на R^n при фиксипрованном $t = t_0 \in [0,T)$ (см. [2]) имеем:

$$\exists V \in W_{\bar p}^{m,1}(R^n \times [0,T)) : V(x,0) = \varphi(x)$$

$$\|V\|_{W_{\bar p}^{m,1}(R^n\times[0,T))}\le C\|\varphi\|_{B_{\bar p}^{m-m/p_{n+1}}(R^n)}.$$

Обозначим $Z=u-V$

Функция Z является решением задачи

$$\begin{cases} LZ=f-LV \\ Z|_{t=0}=0 \end{cases}$$ Тогда в силу (25)

$$\|Z\|_{W_{\bar p}^{m,1}(R^n\times[0,T))}\le C\|f-LV\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))}\le$$
$$\le C\|f\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))}+C\|LV\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))}\le$$
$$\le C\|f\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))}+C\|V\|_{W_{\bar p}^{m,1}(R^n\times[0,T))}\le$$
$$\le C\|f\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))}+C\|\varphi\|_{B_{\bar p}^{m-m/p_{n+1}}(R^n)}.$$

Таким образом

$$\|u\|_{W_{\bar p}^{m,1}(R^n\times[0,T))}\le\|u-V\|_{W_{\bar p}^{m,1}(R^n\times[0,T))}+\|V\|_{W_{\bar p}^{m,1}(R^n\times[0,T))}\le$$
$$\le C\|f\|_{L_{\bar p}(R^n\times[0,T))}+C\|\varphi\|_{B_{\bar p}^{m-m/p_{n+1}}(R^n)}.$$

Этим теорема 1 доказана.

Я выражаю признательность моему научному руководителю профессору В.С.Гулиеву за постановку задачи и постоянное внимание за ходом исследований. Я так же благодарен профессору И.Т. Мамедову за полезные консультации.

Литература

1. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. *Уравнения с частными производными.* М.:Мир, 1966.
2. Бесов О.В., Ильин В.П.,Никольский С.М.*Интегральные представления функций и теоремы вложения.*М.:Наука, 1975.
3. Маремонти П., Солонников В.А.*Об оценках решений нестацинонарной задачи Стокса в анизотропных пространствах С.Л..Соболева со смешанной нормой.* //Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1995,124-150.
4. Рохман И.М., Солонников В.А.*Оценки в весовых нормах L_p для сингулярных интегралов с анизотропными ядрами.*//Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1985, т. 147,с.124-137.
5. Солонников В.А *О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида.*//Тр.МИАН СССР, т. 83,1965.
6. Fabes E.B., Riviere N.M. *Singular intergrals with mixed homogeneity.*//Studia Math., v.27.1966.p.19-38.
7. Jones B.F. *A class of singular integrals* // Amer. J.Math. 1964. V.84.p 441-462.

Mustafayev R.Ç.

MÜƏYYƏN PARABOLİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN QOYULMUŞ KOŞİ MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNİN QARIŞIQ NORMALI ANİZOTROP SOBOLEV FƏZASINDA QİYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ

Məqalədə m-tərtibli parabolik tənlik üçün $R^n \times (0,T)$, $0 < T < \infty$ zolağında Koşi məsələsinin həlli tədqiq edilmişdir.

Muctafaev R.Ch.

ON THE ESTOMATES CAUCHU PROBLEM FOR SERTAIN PARABOLIC EQUATIONS ON AMISOTROPIC SOBOLEV SPACES WITH MIXED NORM

In shis paper we stuoly the solvability of Cauchy problem for parabolic equation of m-th order on $R^n \times (0,T)$, $0 < T < \infty$.