УДК 517. 43

ОРУДЖЕВ Э.Г.

РЕЗОЛЬВЕНТА И СПЕКТР ОДНОГО КЛАССА НЕСАМОСОПРЯЖЕНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ НА ПОЛУОСИ

В настоящей работе исследуется спектр и резольвента дифференциального оператора

$$l(y) = Y^{2n} + \sum_{i=1}^{2n} P_i(x,\lambda) Y^{(2n-i)}, P_i(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{i} \lambda^{i-k} P_{i,i-k}(x), \ i = \overline{1,2n}$$

с нормированными краевыми условиями в нуле в пространстве $L_2(0,\infty)$.

Ранее подобные операторы изучались в [1], [2], в случае, когда дифференциальное выражение, определяющее оператор при $\lambda \to \infty$ близко двучленному $Y^{(2n)} - \lambda^{2n} Y$. Остальные коэффициенты дифференциального оператора были невозмущенные младшие степени параметра (см. [2]). Асимптотика фундаментальной системы решений в этом случае определяется первым и последним коэффициентами дифференциального выражения. А в работе [3] рассмотрены дифференциальные операторы с полиномиальным вхождением λ со старшими степенями, касающейся случаю разных характеристических корней. А для кратных корней $\pm i$ в [4] были построены операторы преобразования, переводящие решение рассматриваемых уравнений с полиномиальным вхождением параметра и с главными членами вида $\left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2\right)^m$ на решения уравнения $\left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2\right)^m = 0$.

Мы исследование будем проводить по схеме работы [1], являющихся перенесением результатов, полученных в [4] на случай операторов высшего порядка. Случай кратных корней отличается большой сложностью. Эта сложность обнаруживается сразу же, когда мы хотим выписать асимптотику фундаментальных решений. Здесь указываются достаточные условия существования фундаментальной системы решений, имеющие обычную экспоненциальную асимптоту. Затем исследуется спектр и резольвента оператора в пространстве $L_2(0,\infty)$.

1. Асимптотика решений дифференциального уравнения $l(y) = 0$.

Рассмотрим на интервале $0 \le x < \infty$ дифференциальное уравнение

$$Y^{(2n)} + P_1(x,\lambda) Y^{(2n-1)} + \ldots + P_{2n}(x,\lambda) Y = 0 \qquad (1)$$

где

$$P_i(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{i}P_{ik}(x)\lambda^k,\ i=\overline{1,2n},\ P_{ii}=const,\ i=\overline{1,2n};\qquad (2)$$

функции $P_{ik}(x)$ определены и непрерывны на $[0,\infty)$, интегрируемые в $[0,\infty)$, при предположении, что характеристическое уравнение

$$\theta^{2n}+P_{11}\theta^{2n-1}+\ldots+P_{2n-1,2n-1}\theta+P_{2n,2n}=0\qquad (3)$$

имеет: а) Два различных корня θ_1,θ_2, каждый с кратности n_1,n_2 и $\operatorname{Re}\lambda\theta_1\le 0\le\operatorname{Re}\lambda\theta_2$; б) k различных корней $\theta_1,\ldots,\theta_k$, где число показывающее максимальной кратности $n_i\le 2$, $k=2m$, корни θ_k отличны от нуля и такие, что при подходящей их нумерации, плоскость λ делится на секторы R_k, в каждой из которых, число этих корней, для которых $\operatorname{Re}\lambda\theta_i\le 0$, равно m.

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) Существуют производные $P^{(\nu)}_{i,i-1}(x),\ i=\overline{1,2n},\ \nu=\overline{0,2n-1};\ P^{(\nu)}_{i,i-2}(x),\ i=\overline{2,2n}$, $\nu=\overline{0,2n-2},\ldots,P^{(\nu)}_{i,i-(n_k-1)}(x),\ i=\overline{n_k-1,2n},\ \nu=\overline{0,2n-(n_k-1)}$, *непрерывны на множестве* $a\le x<\infty$, *пределы по ним при* $x\to\infty$ *конечны и*

$$\sum_{i=1}^{2n}P_{i,i-1}(x)\theta_k^{2n-i}=0,\quad \sum_{i=2}^{2n}P_{i,i-2}(x)\theta_k^{2n-i}=0,\ldots,$$

$$\sum_{i=n_k-1}^{2n}P_{i,i-(n_k-1)}(x)\theta_k^{2n-i}=0,\ k=\overline{1,2}\qquad (4)$$

2) Для каждой области $|\lambda|\ge\Gamma>0,\ a\le x<\infty$ существуют интегралы

$$\frac{1}{\Gamma^{n_k-1}}\int_a^\infty\Gamma^{1+m}\left|P^{(\nu)}_{n_k,0}(x)\right|dx,\ m=0,\ \nu=\overline{0,2n-n_k};$$

$$\frac{1}{\Gamma^{n_k}}\int_a^\infty\Gamma^{1+m}\left|P^{(\nu)}_{n_k+1,m}(x)\right|dx, m=0,1,\ \ \nu=\overline{0,2n-(n_k+1)};$$

$$\frac{1}{\Gamma^{n_k+1}}\int_a^\infty\Gamma^{1+m}\left|P^{(\nu)}_{n_k+2,m}(x)\right|dx, m=0,1,2, k=\overline{0,2n-(n_k+2)},\qquad (5)$$

$$\ldots\frac{1}{\Gamma^{2n-1}}\int_a^\infty\Gamma^{1+m}\left|P_{2n,m}(x)\right|dx,\ m=\overline{0,1,\ldots,n_k}\ \text{ и меньше единицы.}$$

Тогда дифференциальное уравнение *(1)* при предположении а) в каждой из полуплоскостей $\{\pm\theta_k\lambda/\operatorname{Re}\theta_k\lambda\ge 0\}$ при всех $x\in[0,\infty)$ имеет решения $Y_i(x,\lambda)$, удовлетворяющие интегральному уравнению

$$Y_i(x,\lambda)=\left[g^{(0)}_{i0}(x)+\frac{1}{\lambda}g^{(1)}_{i0}(x)+\frac{1}{\lambda^2}g^{(2)}_{i0}(x)+\ldots+\frac{1}{\lambda^{n_k-1}}g^{(n_k-1)}_{i0}(x)\right]e^{\theta_i\lambda x}-$$

$$-\int_x^\infty g(x,\xi;\lambda)\left[-P^*_{n_k}(\xi,\lambda)Y^{(2n-n_k)}(\xi)-\ldots-P^*_{2n}(\xi,\lambda)Y(\xi)\right]d\xi\qquad (6)$$

где $P_q^*(\xi,\lambda)=\sum_{i=0}^{q-n_k}P_{q_i}(x)\lambda^i$, $q=\overline{n_k,2n}$.

При этом асимптотические выражения решений уравнения *(1)* имеет вид:

$$Y_i(x,\lambda)=\left[g_{i0}^{(0)}(x)+\frac{1}{\lambda}g_{i0}^{(1)}(x)+\ldots+\frac{1}{\lambda^{n_k-1}}g_{i0}^{(n_k-1)}(x)+\frac{E(x,\lambda)}{\lambda^{n_k}}\right]e^{\theta_k\lambda x}$$

$$k=1,\text{ при } i=\overline{1,n_1},\qquad k=2,\text{ при } i=\overline{n_1+2n} \tag{7}$$

где $g_{i0}^{(0)}(x)$, $g_{i0}^{(\nu)}(x)$, $\nu=\overline{1,n_k-1}$ определены и непрерывны на интервале $[0,\infty)$ имеют абсолютно непрерывные производные до порядка $2n-1$ включительно. Характерно, что $g_{i0}^{(0)}(x), i=\overline{1,n_1}; g_{i0}^{(0)}(x), i=\overline{n_1+1,2n}$ фундаментальные системы решений дифференциальных уравнений n_1 и n_2 порядка соответственно. Функция $E(x,\lambda)$ ограничена в области $a\le x<\infty, |\lambda|\ge\Gamma$. При каждом фиксированном значении X, $\frac{\partial^\nu Y_i(x,\lambda)}{\partial\lambda^\nu}$, $\nu=\overline{0,2n-1}$ голоморфные функции от λ в области $|\lambda|>\Gamma$ сохраняя аналогичную асимптотичность вида *(7)* равномерно относительно X

Теорема 2. *Пусть выполняется условие б) и справедливы равенства* $\sum_{i=1}^{2n}P_{i,i-1}(x)\theta_m^{2n-i}=0$ для кратных корней $\theta_i, i\le m$ и

$$\frac{1}{\Gamma^{q-2-i}}\int_a^\infty\left|P_{qi}^{(2n-2-\nu)}(x)\right|dx<1, i=\overline{0,q-2}, q=\overline{2,n}, \nu=\overline{0,2n-2} \tag{8}$$

Тогда дифференциальное уравнение *(1)*, в каждом из секторов R_x комплексной λ плоскости имеет асимптотические решения представимое формулой

$$Y_i(x,\lambda)=e^{\theta_k\lambda x}\left[\eta_{i_0}^{(0)}(x)+\frac{1}{\lambda}\eta_{i_0}^{(1)}(x)+\frac{E(x,\lambda)}{\lambda^2}\right],\ i=\overline{1,2n},\ k=\overline{1,2m} \tag{9}$$

для всех $|\lambda|\ge\Gamma$ и $x\in[0,\infty)$, имеющие $2n-1$ непрерывные производные по x, $\frac{\partial^\nu Y_i(x,\lambda)}{\partial\lambda^\nu}$, $\nu=\overline{0,2n-1}$ голоморфные функции от λ в области $\lambda\in R_k$, $|\lambda|\ge\Gamma$, $k=\overline{1,2m}$.

Для доказательства теоремы 1 перепишем уравнение *(1)* в виде

$$Y^{(2n)}+\left(P_{10}(x)+P_{11}\lambda\right)Y^{(2n-1)}+\left(P_{20}(x)+P_{21}(x)\lambda+P_{22}\lambda^2\right)Y^{(2n-2)}+\ldots$$
$$\ldots+\left(P_{n_k-1,0}(x)+P_{n_k-1,1}(x)\lambda+\ldots+P_{n_k-1,n_k-1}\lambda^{n_k-1}\right)Y^{(2n-(n_k-1))}+$$
$$+\left(P_{n_k,1}(x)\lambda+P_{n_k,2}(x)\lambda^2+\ldots+P_{n_k,n_k}\lambda^{n_k}\right)Y^{(2n-n_k)}+\ldots$$
$$\ldots+\left[P_{2n,(2n-(n_k-1))}(x)\lambda^{2n-(n_k-1)}+\ldots+P_{2n,2n}\lambda^{2n}\right]Y=$$

$$\vdots$$

$$= -P_{n_k,0}(x)Y^{(2n-n_k)} - \left[P_{n_k+1,0}(x) + P_{n_k+1,1}(x)\lambda\right]Y^{(2n-(n_k+1))} - \ldots$$

$$\ldots - \left[P_{2n,0}(x) + P_{2n,1}(x)\lambda + P_{2n,2n-n_k}(x)\lambda^{2n-n_k}\right]Y \qquad (1')$$

Однородное уравнение соответственно *(1')* имеет $2n$ независимых решений

$$Y_i(x,\lambda) = \left[g_{i0}^{(0)}(x) + \frac{1}{\lambda}g_{i0}^{(1)}(x) + \ldots + \frac{1}{\lambda^{n_k-1}}g_{i0}^{(n_k-1)}(x)\right]e^{\theta_k\lambda x},$$

$$k = 1, \text{ при } i = \overline{1,n_1} \qquad k = 2, \text{ при } i = \overline{n_1+1,2n} \qquad (10)$$

которые можно убедиться используя условие 1) теоремы 1 непосредственной подстановкой *(10)* в однородное уравнение *(1')*, затем приравнением одинаковые степенные коэффициенты, и потому, рассматривая *(1')* как неоднородное уравнение, применяя метод вариации постоянных, найдем, что

$$Y(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{2n} C_k Y_k(x,\lambda) + \int_a^x \frac{\sum_{k=1}^{2n} Y_k(x,\lambda)W_{2n,k}(\xi,\lambda)}{2W(\xi,\lambda)} m(y(\xi))d\xi \qquad (11)$$

где $m(y(\xi))$ есть правая часть уравнения *(1')*, $W(\xi,\lambda)$ определитель Вронского от фундаментальной системы решений *(10)*, $W_{2n,k}(\xi,\lambda)$ алгебрическое дополнение элементов последней строки $W(\xi,\lambda)$.

В *(11)* положим

$$C_k' = \begin{cases} C_k, & k = \overline{1,n_1} \\ C_k - \int_a^\infty \frac{(-1)W_{2n,k}(\xi,\lambda)}{2W(\xi,\lambda)} m(y(\xi))d\xi, & k = \overline{n_1+1,2n} \end{cases} \qquad (12)$$

Подставляя *(12)* в *(11)* придем к интегро-дифференциальному уравнению

$$Y(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{n_k} C_k' Y_k(x,\lambda) + \sum_{k=n_k+1}^{2n} C_k' Y_k(x,\lambda) +$$

$$+ \sum_{k=n_k+1}^{2n} Y_k(x,\lambda)\int_a^\infty \frac{(-1)W_{2n,k}(\xi,\lambda)}{2W(\xi,\lambda)} m(y(\xi))d\xi +$$

$$+ \int_a^x \frac{\sum_{k=1}^{2n} Y_k(x,\lambda)W_{2n,k}(\xi,\lambda)}{2W(\xi,\lambda)} m(y(\xi))d\xi = \sum_{k=1}^{2n} C_k' Y_k(x,\lambda) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n_k}\int_a^x \frac{W_{2n,k}(\xi,\lambda)Y_k(x,\lambda)}{2W(\xi,\lambda)} m(y(\xi))d\xi -$$

$$- \sum_{k=n_k+1}^{2n}\int_x^\infty \frac{W_{2n,k}(\xi,\lambda)Y_k(x,\lambda)}{2W(\xi,\lambda)} m(y(\xi))d\xi \qquad (13)$$

Введем обозначения

$$K_1(x,\xi,\lambda)=\sum_{k=1}^{n_k}\frac{Y_k(x,\lambda)W_{2n,k}(\xi,\lambda)}{2W(\xi,\lambda)},\quad a\le\xi\le x$$

$$K_2(x,\xi,\lambda)=\sum_{k=n_k+1}^{2n}\frac{Y_k(x,\lambda)W_{2n,k}(\xi,\lambda)}{2W(\xi,\lambda)},\quad \xi\le x<\infty \qquad (14)$$

Тогда интегро-дифференциальное уравнение *(13)* перепишется так:

$$Y(x,\lambda)=\sum_{k=1}^{2n}C_k'Y_k(x,\lambda)+\int_a^x K_1(x,\xi,\lambda)m(y(\xi))d\xi-$$

$$-\int_x^\infty K_2(x,\xi,\lambda)m(y(\xi))d\xi \qquad (15)$$

В *(15)* положим $C_k'=0$, при $k\ne n_k$; $C_k'=1$, при $k=n_k$ и предположим, что уравнение *(1)* имеет решение $Y_{n_k}(x,\lambda)$ удовлетворяющее уравнению

$$Y_{n_k}(x,\lambda)=\left[g_{n_k,0}^{(0)}(x)+\frac{1}{\lambda}g_{n_k,0}^{(1)}(x)+\ldots+\frac{1}{\lambda^{n_k-1}}g_{n_k,0}^{(n_k-1)}(x)\right]e^{\theta_1\lambda x}+$$

$$+\int_a^x K_1(x,\xi,\lambda)m(Y_{n_k}(\xi,\lambda))d\xi-\int_x^\infty K_2(x,\xi,\lambda)m(Y_{n_k}(\xi,\lambda))d\xi \qquad (16)$$

Производим замену

$$Y_{n_k}(x,\lambda)=\left[g_{n_k,0}^{(0)}(x)+g_{n_k,0}^{(1)}(x)\frac{1}{\lambda}+\ldots+g_{n_k,0}^{(n_k-1)}(x)\frac{1}{\lambda^{n_k-1}}\right]e^{\theta_1\lambda x}\cdot Z_{n_k}(x,\lambda)$$

Для $Z_{n_k}(x,\lambda)$ получим:

$$Z_{n_k}(x,\lambda)=1+\left[g_{n_k,0}^{(0)}(x)+\frac{1}{\lambda}g_{n_k,0}^{(1)}(x)+\ldots+\frac{1}{\lambda^{n_k-1}}g_{n_k,0}^{(n_k-1)}(x)\right]^{-1}\times$$

$$\times\int_a^x e^{-\theta_1\lambda x}K_1(x,\xi,\lambda)m\left[\left(g_{n_k,0}^{(0)}(\xi)+g_{n_k,0}^{(1)}(\xi)\frac{1}{\lambda}+\ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots+g_{n_k,0}^{(n_k-1)}(x)\frac{1}{\lambda^{n_k-1}}\right)e^{\theta_1\lambda\xi}Z_{n_k}(\xi,\lambda)\right]d\xi-$$

$$-\left[g_{n_k,0}^{(0)}(x)+\frac{1}{\lambda}g_{n_k,0}^{(1)}(x)+\ldots+\frac{1}{\lambda^{n_k-1}}g_{n_k,0}^{(n_k-1)}(x)\right]^{-1}\int_x^\infty e^{-\theta_1\lambda x}K_2(x,\xi,\lambda)\times$$

$$\times m\left[\left(g_{n_k,0}^{(0)}(\xi)+\frac{1}{\lambda}g_{n_k,0}^{(1)}(\xi)+\ldots+\frac{1}{\lambda^{n_k-1}}g_{n_k,0}^{(n_k-1)}(\xi)\right)e^{\theta_1\lambda\xi}Z_{n_k}(\xi,\lambda)\right]d\xi \qquad (17)$$

Рассмотрим полуплоскость $\pi_-(\mathrm{Re}\,\theta_1\lambda\le 0)$. В этой полуплоскости оценим ядра $K_i(x,\xi,\lambda), i=\overline{1,2}$ при больших $|\lambda|\ge\Gamma>0$.

Разлагая определитель $W(\xi,\lambda)$, элементами которого являются столбцы выражений:

$$g_{1\nu}^{(0)}(x)+\frac{1}{\lambda}g_{1\nu}^{(1)}(x)+\ldots+\frac{1}{\lambda^{n_k-1}}g_{1\nu}^{(n_k-1)}(x),\ldots$$

$$\ldots,g_{n_k,\nu}^{(0)}(x)+\frac{1}{\lambda}g_{n_k,\nu}^{(1)}(x)+\ldots+\frac{1}{\lambda^{n_k-1}}g_{n_k,\nu}^{(n_k-1)}(x),$$

$$\ldots,g_{n_k+1,\nu}^{(0)}(x)+\frac{1}{\lambda}g_{n_k+1,\nu}^{(1)}(x)+\ldots+\frac{1}{\lambda^{n_k-1}}g_{n_k+1,\nu}^{(n_k-1)}(x),\ldots$$

$$\ldots,g_{2n,\nu}^{(0)}(x)+\frac{1}{\lambda}g_{2n,\nu}^{(1)}(x)+\ldots+\frac{1}{\lambda^{n_k-1}}g_{2n,\nu}^{(n_k-1)}(x)\ ,$$

умноженные на $e^{\theta_1\lambda\xi}$ для номеров $\overline{1,n_1}$, а с номерами от n_1+1 до $2n$ на $e^{\theta_2\lambda\xi}$; где $g_{i\nu}^{(k)}(x), k=\overline{0,n_k-1},\ i=\overline{2,2n}, \nu=\overline{1,2n-1}$ обозначают последовательные группировки коэффициентов при λ^{-k}, $k=\overline{0,-n_k+1}$ производные по X до порядка $2n-1$ предыдущих строк;

с вынесением множителя $\lambda^{n(2n-1)}e^{(n_1\theta_1+n_2\theta_2)\lambda\xi}$, в виде многочлена, расположенного по отрицательным степеням $\lambda^0,\lambda^{-1},\ldots,\lambda^{-n_k},\ldots$ с детерминантными коэффициентами и учитывая то, что в результате разложения некоторые полученные коэффициентные определители, в силу кратности корней θ_k, превращаются в нуль, убеждаемся, что остается отличным от нуля определитель коэффициента при λ^{-n_k}. Коэффициент этого члена разложения представляет собой выражение $(\theta_2-\theta_1)^k, (k>0)$, умноженное на определителей $W^{(1)}(\xi)$ и $W^{(2)}(\xi)$ от фундаментальной системы решений $g_{10}^{(0)}(x),\ldots,g_{1n_1}^{(0)}(x)$ и $g_{1,n_1+1}^{(0)}(x),\ldots,g_{1,2n}^{(0)}(x)$ дифференциальных уравнений n_1 и n_2 порядка, являющихся определителем Вронского, которые отличны от нуля.

Объединяя эти высказывания для $W(\xi,\lambda)$ можно записать представление

$$W(\xi,\lambda)=\lambda^{n(2n-1)-n_1}\left[(\theta_2-\theta_1)^m W^{(1)}(\xi)W^{(2)}(\xi)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]e^{(n_1\theta_1+n_2\theta_2)\lambda\xi} \qquad (18)$$

Тогда будет ясно, что

$$W_{2n,k}(\xi,\lambda)=\lambda^{(2n-1)(n-1)-n_1+1}\left[E_k^{(1)}(\xi)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]e^{[(n_1-1)\theta_1+n_2\theta_2]\lambda\xi}, k=\overline{1,n_1}$$

$$W_{2n,k}(\xi,\lambda)=\lambda^{(2n-1)(n-1)-n_2+1}\left[F_k^{(2)}(\xi)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]e^{[(n_1\theta_1+(n_2-1)\theta_2)]\lambda\xi}, k=\overline{n_1+1,2n}$$

Отсюда следует, что в полуплоскости π_- в выражении $K_i(x,\xi,\lambda), i=\overline{1,2}$ после вынесения в числителе и знаменателе каждого слагаемого множители, экспоненциально зависящие от λ, а также множители вида $\lambda^\alpha, \alpha>0$, нетрудно получить, что в выражении $K_i(x,\xi,\lambda)$ остаются экспоненциальные

множители вида $e^{\theta_i\lambda(x-\xi)}$ соответственно. Для простоты, предположим, что $n_1 = n_2$, тогда будем иметь, что $K_i(x,\xi,\lambda)$ ведут себя, как $O\left(\frac{1}{\lambda^{2n-2}}\right)$. Соответствующие оценки справедливы и в полуплоскости π_+.

Полученные оценки ядер $K_i(x,\xi,\lambda)$ позволяют решать интегро-дифференциальное уравнение *(17)* при больших $|\lambda| \geq \Gamma$ из полуплоскости $\pi_\pm$ методом последовательных приближений и получить оценку для решений Z_{n_1}, сходимость приближений которого вытекает при условии 2) теоремы 1, из можарантного числового сходящего ряда и функция $Z_{n_1}(x,\lambda)$ будет ограниченным сверху от суммы мажорирующего ряда. Отсюда с применением леммы 1.1. работы [1] вытекает утверждение теоремы 1.

Из *(17)* легко получается, что при

$$x \to +\infty \quad Z_{n_1}(x,\lambda) = 1 + 0(1) \tag{19}$$

равномерно относительно $|\lambda| \geq \Gamma$ из области $\pi_\pm$.

Повторением аналогичных рассуждений нетрудно доказывается теорема 2. Допустим, что выполняются следующие условия

$$e^{\varepsilon_2 x}\left|P_{ik}(x)\right| \leq C_{ik}, \quad i = \overline{1,2n} \tag{20}$$

где C_{ik} - постоянные для всех $x \in [0,\infty)$ при некотором малом $\varepsilon_2 > 0$. Тогда

$$\int_0^\infty e^{\varepsilon_1 x}\left|P_{iK}(x)\right|dx < \infty, i = \overline{1,2n}, \quad \forall \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \tag{21}$$

При $\lambda = 0$ уравнение *(1)* принимает вид:

$$Y^{(2n)} + P_{10}(x)Y^{(2n-1)} + \ldots + P_{2n,0}(x)Y = 0 \tag{22}$$

Тогда придем к утверждению, сформулированному в теореме 1.6 работы [1].

Теорема 3. *Пусть выполнено условие (20) . Тогда уравнение (22) имеет линейно независимые решения* $Y_k(x,\lambda), k = \overline{1,2n}$ *такие, что при* $x \to \infty$ *и произвольном положительном* $\varepsilon < \varepsilon_1$

$$Y_k(x) = \frac{X^{2n-k}}{(2n-k)!} + O\left(e^{-\varepsilon x}\right), k = \overline{1,2n} \tag{23}$$

Из этой теоремы вытекает, что при условии *(20)*, асимптотические формулы решений *(7)* и *(9)* голоморфны по λ и для $0 \leq |\lambda| < \Gamma$.

Рассмотрим множество точек λ плоскости, в которой достигается

$$\operatorname{Re}\lambda(\theta_1 - \theta_2) = 0, \quad \operatorname{Re}\left(\varepsilon_1 + (\theta_1 - \theta_2)\lambda\right) = 0 \tag{24}$$

Тогда получим, что равенства *(24)* выполняются на прямых, определяемых уравнениями

$$\begin{gathered}(Jm\theta_1 - Jm\theta_2)Jm\lambda = (\operatorname{Re}\theta_1 - \operatorname{Re}\theta_2)\operatorname{Re}\lambda \\ (Jm\theta_1 - Jm\theta_2)Jm\lambda = (\operatorname{Re}\theta_1 - \operatorname{Re}\theta_2)\operatorname{Re}\lambda + \varepsilon_1\end{gathered} \tag{25}$$

Для λ, лежащей в полосе, определенной неравенством

$$-\varepsilon_1 \le \left(\operatorname{Re}\theta_1 - \operatorname{Re}\theta_2\right)\operatorname{Re}\lambda - \left(Jm\theta_1 - Jm\theta_2\right)Jm\lambda \le 0 \qquad (26)$$

уледовлетворяются все условия леммы 1.1 работы [1]. Тогда уравнение *(17)* при условии *(20)* имеет решение, ограниченное и непрерывное по совокупности переменных (x,λ). Соответствующее решение уравнения *(1)* $\widetilde{Y}_{n1}(x,\lambda)$ имеет асимптотическое представление вида *(7)*.

В случае б), если $\lambda \in R_k$ такого, что для некоторого $p < 2m$ имеется

$$\operatorname{Re}\left(\lambda\left(\theta_p - \theta_m\right)\right) = 0, \qquad (27)$$

тогда соответствующая полоса будет

$$-\varepsilon_1 \le \left(\operatorname{Re}\theta_p - \operatorname{Re}\theta_m\right)\operatorname{Re}\lambda - \left(Jm\theta_p - Jm\theta_m\right)Jm\lambda \le 0 \qquad (28)$$

Теорема 4. *Если выполнено условие (20), то соответствующие решения* $\widetilde{Y}_{n_k}(x,\lambda)$, $\widetilde{Y}_k(x,\lambda)$ *уравнения (1) существкет при* $0 \le x < \infty$ *в открытых полосах, определенных неравенствами (26) и(28) соответственно; на этих полосах при фиксированном значении* x *из* $[0,\infty)$ *они являются голоморфными функциями от* λ. *Асимптотические формулы (7) и (9) имеют место равномерно относительно вплоть до границы полос.*

2. Резольвента и спектр оператора L_α.

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$l(y) \equiv Y^{(2n)} + P_1(x,\lambda)Y^{(2n-1)} + \ldots + P_{2n}(x,\lambda)Y \qquad (29)$$

где $P_i(x,\lambda)$ определены в *(2)* и выполняются условии *(20)*.

Обозначим через D совокупность всех функций $Y(x) \in L_2(0,\infty)$ таких, что

1) производные $Y^{(\nu)}(x)$, $\nu = \overline{1,2n-1}$ существуют и абсолютно непрерывны в каждом конечном интервале $[0,b]$, $b > 0$;
2) $l(y) \in L_2(0,\infty)$.

Пусть D_α, совокупность всех функций $Y(x) \in D$, удовлетворяющих условиям:

$$U_\nu(y) = \alpha_{\nu 0}Y(0) + \alpha_{\nu 1}Y'(0) + \ldots + \alpha_{\nu,2n-1}Y^{(2n-1)}(0) = 0,\ \nu = \overline{1,n} \qquad (30)$$

где $\alpha_{\nu k}$ - комплексные числа.

Определим оператор L_α так; его область определения есть D_α и $L_\alpha Y = l(y)$ при $Y \in D$. Обозначим $A_{n1}(\lambda) = \det\left\|U_i(Y_k)\right\|_{i,k=1}^{n_1}$, $A_m(\lambda) = \det\left\|U_i(Y_k)\right\|_{i,k=1}^{m}$. Здесь при $\lambda \in \pi_-$ берутся решения $Y_k(x,\lambda) \in L_2(0,\infty)$, $k = \overline{1,n_1}$ в $A_{n1}(\lambda)$, при $\lambda \in R_k$ в случае б) берутся решения $Y_k(x,\lambda) \in L_2(0,\infty)$, $k = \overline{1,m}$ в $A_m(\lambda)$ из *(7)* и *(9)* соответственно. Тогда собственые значения в случае а) и в случае б) определяются из уравнений $A_{n1}(\lambda) = 0$ и $A_m(\lambda) = 0$. Нетрудно установить, что при условии

$\operatorname{Re}\lambda\theta_1 < 0$ в случае а) все решения $Y_k(x,\lambda), k = \overline{1,n_1}$ принадлежит пространству $L_2(0,\infty)$, а на прямой $\operatorname{Re}\lambda\theta_1 = 0$ не одна $Y_k(x,\lambda), k = \overline{1,n_1}$ не пренадлежит пространству $L_2(0,\infty)$, следовательно оператор L_α не имеет собственных значений, расположенные на прямой $\operatorname{Re}\lambda\theta_1 = 0$. В частности, на положительной полуоси при $\operatorname{Re}\lambda\theta_1 = 0$ отсутствуют собственные значения. В случае б) при условии $\operatorname{Re}\lambda\theta_k < 0, k = \overline{1,m}$ решения $Y_k(x,\lambda) \in L_2(0,\infty), k = \overline{1,m}$, $Y_k(x,\lambda) \overline{\in} L_2(0,\infty), k = \overline{m+1,2n}$ а на прямой $\operatorname{Re}\lambda\theta_m = 0$, не одна $Y_k(x,\lambda), k = \overline{1,m} \overline{\in} L_2(0,\infty)$ и опреатор L_α не имеет собственные значения, в частности, при $\lambda > 0, \operatorname{Re}\theta_m = 0$ отсутствуют собственные значения.

По аналогичной схеме изучаются собственные значения в полуплоскости π_+. Из соотношений *(7)* и *(9)* ясно, что при $\lambda \to \infty$ уравнения

$$A_{n_1}(\lambda) = 0 \text{ и } A_m(\lambda) = 0 \qquad (31)$$

имеют вид:

$$a_{n_1}^{(1)}\lambda^{(n_1-1)(2n-1)} + a_{n_1}^{(2)}\lambda^{(n_1-1)(2n-1)-1} + \ldots + a_{n_1}^{(n_1-1)(2n-1)+1} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0$$

$$a_m^{(1)}\lambda^{(m-1)(2n-1)} + a_m^{(2)}\lambda^{(m-1)(2n-1)-1} + \ldots + a_m^{(m-1)(2n-1)+1} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0 \qquad (32)$$

где $a_{n_1}^{(i)}, a_m^{(i)}$-некоторые комплексные числа. Отсюда следует, что λ достаточно большое не может быть корнем уравнения *(32)*, т.е. множество собственных значений оператора L_α ограничено. Из *(23)* видно, что $\lambda = 0$ не является собственным значением.

Пусть λ_k - любое простое собственное значение оператора L_α. Тогда собственной функцией, соответствующей λ_k будет

$$Y_k(x) = C_1 Y + \ldots + C_{n_1} Y_{n_1} \text{ и } Y_k(x) = C_1 Y_1 + \ldots + C_m Y_m$$

Положим $C_{n_1} = 1$ и рассмотрим случай а). Из условия (30) имеем

$$\sum_{i=1}^{n_1-1} C_i U_1(Y_i) + U_1(Y_{n_1}) = 0 \ldots \sum_{i=1}^{n_1-1} C_i U_n(Y_i) + U_n(Y_{n_1}) = 0.$$

Пусть $n_1 = n$. Тогда для существования ненулевого решения надо, чтобы ранг r системы был меньше n. Пусть $r = n-1$. Тогда

$$C_1 U_1(Y_1) + \ldots + C_1 U_1(Y_k) + \ldots + C_{n-1} U_1(Y_{n-1}) = -U_1(Y_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_1 U_{n-1}(Y_1) + \ldots + C_1 U_{n-1}(Y_k) + \ldots + C_{n-1} U_{n-1}(Y_{n-1}) = -U_{n-1}(Y_n).$$

Отсюда $C_i = -\dfrac{\Delta_i}{\Delta_0}$, где $\Delta_0 = \det\|U_i(Y_k)\|_{i,k=1}^{n-1}$, а Δ_i получается из Δ_0 заменой i - того столбца столбцом $\{U_1(Y_1), \ldots, U_{n-1}(Y_n)$. Тогда имеем

$$Y_k(x) = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Delta_k}{\Delta_0} Y_k(x,\lambda_k) + Y_n(x,\lambda_k) \qquad (33)$$

Построим резольвенту R_λ оператора $L_\alpha : L_\alpha Y = f \Rightarrow Y = R_\lambda f$.

Методом вариации постоянных от общего решения

$$Y = \sum_{i=1}^{2n} C_i(x) Y_i(x,\lambda) \qquad (34)$$

Найдем, что $C_j'(x) = \dfrac{(-1)^j W(Y_1,\ldots,Y_{j-1},Y_{j+1},\ldots,Y_{2n})}{W(Y_1,\ldots,Y_{2n})} f = \omega_j(x,\lambda) f$, где $\omega_j(x,\lambda)$ представляет решение уравнения сопряженного к $L_\alpha(\lambda)Y = f$.

$$C_j(x) = C_j + \int_0^x \omega_j(\xi,\lambda) f(\xi) d\xi, \; i = \overline{1,2n} \qquad (35)$$

Значения $C_j(x)$, $j = \overline{n+1,2n}$ найдем из условии $Y_k(x,\lambda) \overline{\in} L_2(0,\infty)$, $k = \overline{n+1,2n}$

$$C_j = -\int_0^\infty \omega_j(\xi,\lambda) f(\xi) d\xi, \; j = \overline{n+1,2n}$$

Далее, $C_j(x)$, $j = \overline{1,n}$ определим из краевых условий *(30)*. Подставляя *(34)* в *(30)* с учетом *(35)* получим

$$U_\nu(Y) = \sum_{k=1}^{n} C_k U_\nu(Y_k) - \sum_{k=n+1}^{2n} U_\nu(Y_k) \int_0^\infty \omega_k(\xi,\lambda) f(\xi) d\xi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} C_k U_\nu(Y_k) = \sum_{k=n+1}^{2n} U_\nu(Y_k) \int_0^\infty \omega_k(\xi,\lambda) f(\xi) d\xi, \nu = \overline{1,n}.$$

Отсюда

$$C_j = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{A_n(\lambda)} \int_0^\infty \begin{vmatrix} U_1(Y_1)\ldots U_1(Y_{j-1}) U_1(Y_k) U_1(Y_{j+1})\ldots U_1(Y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_n(Y_1)\ldots U_n(Y_{j-1}) U_n(Y_k) U_n(Y_{j+1})\ldots U_n(Y_n) \end{vmatrix} \omega_k f d\xi =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} \int_0^\infty \frac{\Delta_{jk}}{A_n(\lambda)} \omega_k(\xi,\lambda) f(\xi) d\xi = \int_0^\infty h_j(\xi,\lambda) f(\xi) d\xi, \text{ где}$$

$$\Delta_{jk} = \begin{vmatrix} U_1(Y_1)\ldots U_1(Y_{j-1}) U_1(Y_k) U_1(Y_{j+1})\ldots U_1(Y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_n(Y_1)\ldots U_n(Y_{j-1}) U_n(Y_k) U_n(Y_{j+1})\ldots U_n(Y_n) \end{vmatrix}$$

$$h_j(x,\lambda) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\Delta_{jk}}{A_n(\lambda)} \omega_k(x,\lambda).$$

Таким образом, получим

$$C_j = \int_0^\infty h_j(\xi,\lambda) f(\xi) d\xi, \quad j = \overline{1,n} \tag{36}$$

Следовательно, для решения $Y(x,\lambda)$ получаем представление

$$Y(x,\lambda) = R_\lambda f = \int_0^\infty K(x,\xi,\lambda) f(\xi) d\xi \tag{37}$$

где $f(x)$ - финитная

$$K(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} Y_k(x,\lambda)[h_k(\xi,\lambda) + \omega_k(\xi,\lambda)], \xi \le x \\ \sum_{k=1}^{n} Y_k(x,\lambda) h_k(\xi,\lambda) - \sum_{k=n+1}^{2n} Y_k(x,\lambda) \omega_k(\xi,\lambda), \xi > x \end{cases} \tag{38}$$

Аналогичным образом получается представление решений для случая б).

Перепишем *(38)* в виде

$$K(x,\xi,\lambda) = K_1(x,\xi,\lambda) + K_2(x,\xi,\lambda),$$

где

$$K_1(x,\xi,\lambda) = \sum_{k=1}^{n} Y_k(x,\lambda) h_k(\xi,\lambda) \tag{39}$$

$$K_2(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} -\sum_{k=n+1}^{2n} Y_k(x,\lambda) \omega_k(\xi,\lambda), \xi > x \\ \sum_{k=1}^{n} Y_k(x,\lambda) \omega_k(\xi,\lambda), \xi \le x \end{cases} \tag{40}$$

Пусть теперь $l^*(Z)$ сопряжение к $l(y)$ дифференциальное выражение:

$$l^*(Z) = Z^{(2n)} - \left[\overline{P_1(x,\bar{\lambda})} Z\right]^{(2n-1)} + \left[\overline{P_2(x,\bar{\lambda})} Z\right]^{(2n-2)} -$$
$$- \left[\overline{P_3(x,\bar{\lambda})} Z\right]^{(2n-3)} + \ldots + \left[\overline{P_{2n}(x,\bar{\lambda})} Z\right].$$

Решения уравнения $l^*(Z) = 0$ являются функции $\varpi_j(x,\lambda)$. Учитывая выражения решений $\omega_j(x,\lambda) = \dfrac{(-1)^j W(Y_1,\ldots,Y_{j-1},Y_{j+1},\ldots,Y_{2n})}{W(Y_1,\ldots,Y_n)}$ и асимптотические оценки $W(\xi,\lambda), W_{2n,k}(\xi,\lambda), k = \overline{1,2n}$ нетрудно установить, что в выражении решений $\omega_j(x,\lambda), j = \overline{1,n_1}$ экспоненциальная функция является $e^{-\theta_1 \lambda x}$, а для $\omega_j(x,\lambda), j = \overline{n_1+1,2n}$ такая функция будет $e^{-\theta_2 \lambda x}$. Легко получается, что $\omega_j(x,\lambda) \overline{\in} L_2(0,\infty), j = \overline{1,n_1}$, $\omega_j(x,\lambda) \in L_2(0,\infty), j = \overline{n_1+1,2n}$. Отсюда имея оценки для $Y_j(x,\lambda)$ в полуплоскости π_-, получаем, что $K_1(x,\xi,\lambda)$ есть ядро Гильберта-Шмидта. Используя работы [2] (стр. 226)

легко оперделяется, что ядро $K_2(x,\xi,\lambda)$ порождает ограниченный интегральный оператор, определенный во всем пространстве $L_2(0,\infty)$.

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 5. *Для всех значений* $\lambda \in \pi_-$, $\lambda \in R_k$, *не являющихся корнем уравнения* $A_{n_1}(\lambda)=0, A_m(\lambda)=0$, *за исключением точек лежащих: на прямой* $\operatorname{Re}\lambda\theta_1=0$, *в частности, на положительной полуоси при* $\operatorname{Re}\theta_1=0$; *в случае а) и на прямой* $\operatorname{Re}\lambda\theta_m=0$, *в частности, на положительной полуоси при* $\operatorname{Re}\theta_m=0$; *в случае б) резольвента оператора* L_a *есть интегральный оператор с ядром* $K(x,\xi,\lambda)$*удовлетворяющим условиям*

$$\int_0^\infty |K(x,\xi,\lambda)|^2 dx < +\infty, \int_0^\infty |K(x,\xi,\lambda)|^2 d\xi < +\infty \qquad (41)$$

Повторяя рассуждения, приведенные в [2] (стр. 227-229) без труда приходим к подобным теоремам:

Теорема 6. *Пусть* $\lambda \in \pi_-$, $-\varepsilon_1 \le \operatorname{Re}\lambda\theta_1 < 0$; $\lambda \in R_k$, $-\varepsilon_1 \le \operatorname{Re}\lambda\theta_m < 0$, $A_{n_1}(\lambda) \ne 0$, $A_m(\lambda) \ne 0$. *Тогда*

$$\|R_\lambda f\| \ge \left[\frac{C_2}{\sqrt{-\operatorname{Re}\lambda\theta_1}} - C_1\right]\|f\|, \ \|R_\lambda f\| \ge$$

$$\ge \left[\frac{C_3}{\sqrt{-\operatorname{Re}\lambda\theta_m}} - C_4\right]\|f\|, C_i = const \qquad (42)$$

Теорема 7. *Все точки* λ, *не являющихся корнем уравнения* $A_{n_1}(\lambda) \ne 0$, $A_m(\lambda) \ne 0$ *лежащие: на прямой* $\operatorname{Re}\lambda\theta_1=0$, *в частности, на положительной полуоси при* $\operatorname{Re}\theta_1=0$; *в случае а) и на прямой* $\operatorname{Re}\lambda\theta_m=0$; *в частности, на положительной полуоси при* $\operatorname{Re}\theta_m=0$; *в случае б) являются точками непрерывного спектра* L_a *для* π_- *или* R_k.

Аналогичные теоремы справедливы и в полуплоскости π_+.

Замечание. Основные результаты, полученные выше, справедливы, если условие *(20)* заменить условием $x^r P_{ki}^{(\nu)}(x) \in L_1(0,\infty)$. Здесь точные значения $r \le 2n-2$ и порядок производных ν легко определяются из уравнения *(17)* для каждого $P_{ik}(x)$.

В заключении автор выражает благодарность М.Г. Гасымову за ценные обсуждения и замечания.

Литература

[1].Фунтаков В.А. *О разложении по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора произвольного порядка на полуоси* $[0,\infty)$, Изв. АН Азерб. ССР, 1960, №6.

[2]. Максудов Ф.Г. *Пучки операторов с непрерывным спектром.* Баку "Элм", 1992.

[3]. Максудов Ф.Г., Магеррамов А.М., Мамедов М.З. *Спектральный анализ пучков дифференциальных операторов специального вида.* Докл. АН СССР, 1990, т. 310, №1.

[4]. Гасымов М.Г., Магеррамов А.М. *О существовании операторов преобразования дифференциальных уравнений высокого порядка, полиномиально зависящих от параметра.* ДАН СССР, 1977, т. 235, №2.

[5]. Наимарк М.А. *Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператор а второго порядка на полуоси.* Труды ММО, 1954, т. 3.

Orucov E.Q.

TƏKRAR XARAKTERİSTİKALI BİR SİNİF ÖZ-ÖZÜNƏ QOŞMA OLMAYAN DİFFERENSİAL OPERATORLARIN YARIMOXDA SPEKTR VƏ REZOLVENTASI

Məqalədə $L_2(0,\infty)$ əmsalları $P_{i(x,\lambda)} = \sum_{k=0}^{i} \lambda^{i-k} R_{i,i-n}(x); i = \overline{1,2n}$ şəklində $l(y) = Y^{(2n)} + \sum_{i=1}^{2n} P_i(x,\lambda) Y^{(2n-i)}$ differensial ifadəsi və sıfrda normallaşmış sərhəd şərtləri ilə təyin edilən operatora baxılır. $l(y) = 0$ tənliyinə uyğun xarakteristik tənliyin kökləri olan halda, operatorun rezolventası və spektri tədqiq olunur.

Orudgev E. G.

A RESOLVENT AND SPECTRUM OF A CLASS OF NONSELFADJOINT DIFFERENTIAL OPERATOR WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS ON SEMI-AXIS

In $L_2(0,\infty)$ it is considered a differential operator $l(y) = Y^{(2n)} + \sum_{i=1}^{2n} P_i(x,\lambda) Y^{(2n-i)}$, $P_{i(x,\lambda)} = \sum_{k=0}^{i} \lambda^{i-k} R_{i,i-n}(x); i = 1,2n$ with coefficients decreasing at infinity and normed boundary conditions in zero. A spectrum and a resolvent of the operator is investigated in the case when corresponding characteristic roots of the equations $l(y) = 0$ are multiple.