1997 ТОМ VI (XIV)

УДК 517.957.

СОЛТАНОВ К.Н., МАМЕДОВ Э.М.

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА.

В работе изучается задача Коши для нелинейного псевдогиперболического уравнения или, так называемого, нелинейного волнового уравнения с сильной диссипацией, а именно, рассматривается задача

$$u_{tt} - \Delta u - \alpha \Delta u_t = f(u) \qquad (1)$$

$$u(x,0) = \omega_0(x),\ u_t(x,0) = \omega_1(x), \qquad (2)$$

где

$x \in R^n$, $n \geq 1$, $w_0 \in W_2^1(R^n)$, $w_1 \in L_2(R^n)$, $f : C(0,l : W_2^1(R^n)) \to C(0,l : W_2^{-1}(R^n))$ некоторое отображение, а $l >> 1$, $\alpha > 0$ - некоторые числа.

Уравнение вида *(1)* при различных условиях на f и α рассмотрено во многих работах. В частности, в работе [1] рассмотрена смешанная задача с однородными условиями Дирихле в ограниченной области $\Omega \subset R^n$ с достаточно гладкой границей, где доказана локальная разрешимость в условиях $n \leq 3, \alpha > 0, f(0) = 0, f : \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \to L_2(\Omega)$, в работе [2] для такой же задачи доказана локальная разрешимость при условии $f(0) = 0, f : L_2(R^n) \to L_2(R^n)$. В работе Д.Д. Анг и А.П.Н. Динг ([3]) доказано существование локального и глобального решения смешанной задачи для уравнения *(1)* с однородными условиями Дирихле при выполнении условий $f \in C^1(R,R)$, $f'(x) \leq C_0$, $f(0) = 0$ и $f : \overset{\circ}{W}{}_2^1 \to W_2^{-1}$ удовлетворяет локальному условию Липшица.

В настоящей работе задача Коши *(1)-(2)* рассматривается при $\alpha > 0$ и несколько общих условиях на f. В первом параграфе при выполнении локального условия Липшица на отображение f доказывается существование локального решения. Во втором параграфе, при наличие локального решения, доказана теорема о поведении решений.

Введем обозначения

$$L_2 = L_2(R^n), \quad W_2^1 = W_2^1(R^n), \quad W_2^{-1} = W_2^{-1}(R^n),$$

здесь $W_2^{-1}(R^n)$- сопряженное пространство к пространству Соболева $W_2^1(R^n)$.

Пусть X - гильбертово пространство. Через $C(0,T:X)$ обозначим пространство непрерывных отображений $t \to u(t):[0,T] \to X$.

§ 1. Существование локального решения

Предположим, что $f: W_2^1(R^n) \to W_2^{-1}(R^n)$ удовлетворяет следующему условию:

B) Для каждого шара B из $W_2^1(R^n)$ существует $K_B > 0$ такое, что для любых $\varphi, \psi \in B$

$$\|f(\varphi) - f(\psi)\|_{W_2^{-1}(R^n)} \le K_B \|\varphi - \psi\|_{W_2^1(R^n)}.$$

Теорема 1. *Предположим, что f удовлетворяет условию (B), а $w_0 \in W_2^1(R^n)$, $w_1 \in L_2(R^n)$ и $\alpha > 0$ - некоторое число. Тогда существует $T > 0$ такое, что задача (1)-(2) имеет единственное решение $u(t,x)$, обладающее следующими свойствами*

а) $u(t,x) \in C(0,T;W_2^1)$

в) $u'(t,x) \in C(0,T;L_2) \cap L_2(0,T;W_2^1)$

и удовлетворяющее уравнению в следующем смысле

$$\frac{d}{dt}(u'(t),\vartheta) + \alpha\, a(u'(t),\vartheta) + a(u(t),\vartheta) = (f(u(t)),\vartheta)$$

для $\forall \vartheta \in W_2^1$, *причем* $u(0) = w_0$, $u'(0) = w_1$, *где* $a(u,\vartheta) = (\nabla u, \nabla \vartheta)$.

Доказательство теоремы 1 проводится также как в [3] с применением последовательных приближений и вытекает из следующих лемм.

Рассмотрим следующую последовательность задач:

$$u_m'' - \alpha\,\Delta u_m' - \Delta u_m + u_m = f(u_{m-1}) + u_{m-1}, \quad u_0 \in C([0,l]; W_2^1(R^n)) \tag{3}$$

$$u_m(0) = w_0, \quad u_m'(0) = w_1, \quad m = 1,2,3,\ldots \tag{4}$$

Лемма 1. *Пусть выполняется условие (B), $\alpha > 0$ - некоторое число. Тогда существует $T > 0$ такое, что для каждого $m = 1,2,3,\ldots$ задача (3)-(4) имеет единственное решение u_m из $C(0,T;W_2^1)$, причем*

$$\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C(0,T;W_2^1), \quad \{u_m'\} \subset C(0,T;L_2) \cap L_2(0,T;W_2^1)$$

и порождают ограниченные множества в этих пространствах.

Доказательство. Пусть $u_0 \in C(0,l;W_2^1(R^n))$, $u_0 \ne 0$-некоторая функция Тогда существуют числа, C_0, C_1 такие, что

$$\|u_0\|_{W_2^1} \le C_0, \quad \|f(u_0)\|_{W_2^{-1}} \le C_1 \qquad \text{для всех} \quad t \in [0,l] \tag{5}$$

Предположим, что $u_0(x,t)$ - нулевой элемент приближения. Для доказательства леммы 1 используем метод математической индукции.

Итак, пусть $m = 1$. Тогда, умножая уравнение *(3)* на $u_1'(x,t)$ скалярно по x и используя интегрирование по частям в третьем и четвертом слагаемых, получим

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_1'(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_1\|^2 + \frac{1}{2}\|u_1(t)\|^2\right] + \alpha\|\nabla u_1'\|^2 = (f_1(u_0), u_1'),$$

здесь (и всюду в дальнейшем): $f_1(\vartheta_m)=f(\vartheta_m)+\vartheta_m$.

Интегрируя это неравенство по t от нуля до t получим

$$\|u_1'\|^2+\|\nabla u_1\|^2+\|u_1\|^2+2\alpha\int_0^t\|u_1'(\tau)\|^2d\tau=2\int_0^t\big(f_1(u_0(\tau)),u_1'(\tau)\big)d\tau+\|w_1(x)\|^2+$$

$$+\|\nabla w_0\|^2+\|w_0\|^2 \qquad (6)$$

Оценим интеграл в правой части. Используя неравенство Юнга с параметром $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{\alpha}}{2}$ и *(5)*, получим

$$2\left|\big(f_1(u_0(\tau)),u_1'(\tau)\big)d\tau\right|\le\frac{4\widetilde{C}_0^2T}{\alpha}+\frac{\alpha}{4}\int_0^t\|u_1'(\tau)\|^2_{W_2^1}d\tau,\quad \text{где}\quad \widetilde{C}_0=C_0+C_1.$$

Учитывая это неравенство в *(6)*, получаем

$$\|u_1'\|^2+\|\nabla u_1\|^2+\|u_1\|^2+\frac{7\alpha}{4}\int_0^t\|\nabla u_1'(\tau)\|^2d\tau\le\frac{\alpha}{4}\int_0^t\|u_1'(\tau)\|^2d\tau+\frac{4\widetilde{C}_0^2T}{\alpha}+$$

$$+\|w_1(x)\|^2+\|\nabla w_0\|^2+\|w_0\|^2. \qquad (7)$$

Следовательно,

$$\|u_1'(t)\|^2\le\frac{\alpha}{4}\int_0^t\|u_1(\tau)\|^2d\tau+\|w_1(x)\|^2+\|\nabla w_0\|^2+\|w_0\|^2+\frac{4\widetilde{C}_0^2T}{\alpha}$$

Отсюда, используя лемму Гронуолла, получаем

$$\|u_1'(t)\|^2\le\left(\|w_1(x)\|^2+\|\nabla w_0\|^2+\|w_0\|^2+\frac{4\widetilde{C}_0^2T}{\alpha}\right)\cdot e^{\frac{\alpha}{4}T}$$

Учитывая это в неравенстве *(7)*, получаем

$$\|u_1'\|^2+\|\nabla u_1\|^2+\|u_1\|^2+\frac{7\alpha}{4}\int_0^t\|\nabla u_1'(\tau)\|^2d\tau\le\frac{\alpha}{4}\left(\|w_1(x)\|^2+\|\nabla w_0\|^2+\|w_0\|^2+\frac{4\widetilde{C}_0^2T}{\alpha}\right)\times$$

$$\times T\cdot e^{\frac{1}{4}\alpha\cdot T}+\frac{4\widetilde{C}_0^2T}{\alpha}+\|w_1(x)\|^2+\|\nabla w_0\|^2+\|w_0\|^2.$$

Отсюда в условиях леммы получаем, что существует *число* M *такое, что*

$$\|u_1'\|^2+\|\nabla u_1\|^2+\|u_1\|^2+\frac{7\alpha}{4}\int_0^t\|\nabla u_1'(\tau)\|^2d\tau\le M^2 \qquad (8)$$

Полученное энергетическое неравенство *(8)* показывает, что, применяя метод Галеркина, точно также как в [5], можно показать разрешимость задачи *(3)-(4)* при $m=1$, причем u_1 в силу полученных оценок, в условиях леммы 1, содержится в классе, указанном в лемме 1. (Поскольку в дальнейшем этот факт будет доказан для произвольного $m\ge1$, мы его для отдельных случаев приводить не будем). Заметим также, что доказательство единственности решения задачи *(1)- (2)* в общем случае будет приведено ниже.

Теперь рассмотрим задачу *(3)*- *(4)* при $m=2$. Проведя аналогичное случаю $m=1$ рассуждение, получим

$$\|u_2'(t)\|^2+\|\nabla u_2\|^2+2\alpha\int_0^t\|\nabla u_2'(\tau)\|^2d\tau+\|u_2\|^2=2\int_0^t(f_1(u_1),u_2')d\tau+$$

$$+\|w_1(x)\|^2++\|\nabla w_0\|^2++\|w_0\|^2 \qquad (9)$$

Оценим интеграл в правой части. Используя условие (B) и априорные оценки для решения задачи *(3)*-*(4)* при $m=1$, получим

$$2\left|\int_0^t(f(u_1),u_2')d\tau\right|\le\frac{4(K_B')^2}{\alpha}\int_0^t\|u_1(\tau)-u_0(\tau)\|^2d\tau+\frac{\alpha}{2}\|u_2'(\tau)\|^2d\tau+\frac{4\widetilde{C}_0^2T}{\alpha}\le$$

$$\le\frac{4(K_B')^2}{\alpha}\int_0^t2\left(\|u_1(\tau)\|_{W_2^1}^2+\|u_0(\tau)\|_{W_2^1}^2\right)d\tau+\frac{\alpha}{2}\|u_2'(\tau)\|^2d\tau+\frac{4\widetilde{C}_0^2T}{\alpha}=$$

$$\le\frac{4(K_B')^2}{\alpha}2\left(\int_0^t\|u_1(\tau)\|_{W_2^1}^2d\tau+C_1^2T\right)+\frac{\alpha}{2}\|u_2'(\tau)\|_{W_2^1}^2d\tau+\frac{4\widetilde{C}_0^2T}{\alpha},$$

где $K_B'=K_B+1$.

Отсюда в силу *(8)* имеем

$$2\left|\int_0^t(f(u_1),u_2')d\tau\right|\le\frac{4(K_B')^2}{\alpha}\left(2M^2+C_1^2\right)T+\frac{4\widetilde{C}_0^2T}{\alpha}+\frac{\alpha}{2}\int_0^t\|u_2'(\tau)\|_{W_2^1}^2d\tau$$

Учитывая это в *(9)*, получим

$$\|u_2'\|^2+\|\nabla u_2\|^2+\frac{3\alpha}{2}\int_0^t\|\nabla u_2'(\tau)\|^2d\tau+\|u_2\|^2\le\frac{8(K_B')^2}{\alpha}\left(2M^2+C_1^2\right)T+\frac{4\widetilde{C}_0^2T}{\alpha}+$$

$$+\frac{\alpha}{2}\int_0^t\|u_2'(\tau)\|^2d\tau+\|w_1(x)\|^2+\|\nabla w_0\|^2+\|w_0\|^2 \qquad (10)$$

Теперь , используя лемму Гронуолла, получаем

$$\|u_2'\|^2\le\left\{\left[2(K_B')^2C_1^2+\widetilde{C}_0^2+4(K_B')^2M^2\right]\frac{2T}{\alpha}+\|w_1\|^2+\|\nabla w_0\|^2+\|w_0\|^2\right\}e^{\frac{\alpha}{2}T}$$

учитывая это неравенство в *(10)*, имеем

$$\|u_2'\|^2+\|\nabla u_2\|^2+\frac{3\alpha}{2}\int_0^t\|\nabla u_2'(\tau)\|^2d\tau+\|u_2\|^2\le\frac{4T}{\alpha}\left(2C_1^2(K_B')^2+\widetilde{C}_0^2+4(K_B')^2M^2\right)+$$

$$+2\left[\left(2C_1^2(K_B')^2+\widetilde{C}_0+4(K_B')^2M^2\right)T+\|w_1\|^2+\|\nabla w_0\|^2+\|w_0\|^2\right]e^{\frac{\alpha}{2}T}\cdot T+\|w_1(x)\|^2+$$

$$+\|\nabla w_0\|^2+\|w_0\|^2.$$

Введем обозначения:

$$(K_1):M^2>3\left(\|w_1(x)\|^2+\|\nabla w_0\|^2+\|w_0\|^2\right)$$

$$(K_2):\frac{2}{3}M^2>\left(2C_1^2(K_A')^2+\widetilde{C}_0^2+4(K_B')^2M^2\right)\frac{4T}{\alpha}+2\left[\left(2C_1(K_B')^2+\widetilde{C}_0^2+\right.\right.$$

$$+4(K_B')^2 M^2\Big)T+\|w_1\|^2+\|\nabla w_0\|^2+\|w_0\|^2\Big]e^{\frac{\alpha}{2}T}T.$$

Тогда имеем

$$\|u_2'\|^2+\|\nabla u_2\|^2+\frac{3\alpha}{2}\int_0^t\|\nabla u_2'(\tau)\|^2 d\tau+\|u_2\|^2\le M^2 \qquad (11)$$

Теперь рассмотрим задачу *(3)-(4)* при произвольном $m\ge 1$ и предположим, что u_{m-1} является решением этой задачи, удовлетворяющим утверждению леммы1 и неравенству вида *(11)*.

Умножая уравнение *(3)* на $u_m'(t,x)$ скалярно по x, интегрируя по t и оценивая интеграл в правой части точно также, как и в случае $m=2$, а затем, применяя неравенство Гронуолла, получим

$$\|u_m'\|^2+\|\nabla u_m\|^2+\frac{3\alpha}{2}\int_0^t\|u_m'(\tau)\|^2 d\tau+\|u_m\|^2\le\frac{4T}{\alpha}\Big(4(K_A')^2M^2+2C_1(K_B')^2+\widetilde{C}_0^2\Big)+$$

$$+2\Big[\Big(4(K_B')^2M^2+2C_1(K_B')^2+\widetilde{C}_0^2\Big)T+\|w_1(x)\|^2+\|\nabla w_0\|^2+\|w_0\|^2\Big]e^{\frac{\alpha}{2}T}T+$$

$$+\|w_1(x)\|^2+\|\nabla w_0\|^2+\|w_0\|^2. \qquad (12)$$

Учитывая обозначение (K_1) и (K_2), отсюда получим

$$\|u_m'\|^2+\|\nabla u_m\|^2+\frac{3\alpha}{2}\int_0^t\|\nabla u_m'(\tau)\|^2 d\tau+\|u_m\|^2\le M^2$$

А, следовательно, получаем, что имеют место следующие оценки

$$\|u_m'\|\le M \qquad (M_1)$$

$$\|\nabla u_m\|\le M \qquad (M_2)$$

$$\frac{3\alpha}{2}\int_0^t\|\nabla u_m'(\tau)\|^2 d\tau\le M^2 \qquad (M_3)$$

$$\|u_m\|\le M \qquad (M_4)$$

Из оценок $(M_1)-(M_4)$, абсолютной непрерывности интеграла Лебега и из приведенной ниже последовательности неравенств вытекает, что $u_m:[0,T]\to W_2^1$ – непрерывно:

$$\|u_m(t_0,x)-u_m(t,x)\|_{W_2^1}=\left\|\int_0^t u_m'(\tau,x)d\tau\right\|_{W_2^1}\le\int_{t_0}^t\|u_m'(\tau,x)\|_{W_2^1}=\int_{t_0}^t\|u_m'\|_{L_2}d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^t\|\nabla u_m'(\tau)\|_{L_2}d\tau.$$

Теперь покажем, что $\|u_m'(t)\|:[0,T]\to R$ непрерывно. Для доказательства этого утверждения умножим уравнение *(3)* на $u_m'(t,x)$ скалярно по x и проинтегрируем по t на $[t_1,t_2]$. Тогда, получим:

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left\|u'_m(\tau)\right\|^2 d\tau+\alpha\int_{t_1}^{t_2}\left\|\nabla u'_m(\tau)\right\|^2 d\tau+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u_m(\tau)\right\|^2 d\tau+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left\|u_m(\tau)\right\|^2 d\tau=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left(f_1\left(u_{m-1}(\tau)\right),u'_m(\tau)\right)d\tau.$$

Отсюда имеем

$$\left\|u'_m(t_2,x)\right\|^2-\left\|u'_m(t_1,x)\right\|^2+2\alpha\int_{t_1}^{t_2}\left\|\nabla u'_m(\tau)\right\|^2 d\tau+\left\|\nabla u_m(t_2,x)\right\|^2-\left\|\nabla u_m(t_1,x)\right\|^2+$$

$$+\left\|u_m(t_2,x)\right\|^2-\left\|u_m(t_1,x)\right\|^2=2\int_{t_1}^{t_2}\left(f_1\left(u_{m-1}(\tau)\right),u'(\tau)\right)d\tau \qquad (13)$$

Из равенства *(13)* следует, что

$$\left|\left\|u'_m(t_2,x)\right\|^2-\left\|u'_m(t_1,x)\right\|^2\right|\le 2\alpha\int_{t_1}^{t_2}\left\|\nabla u'_m(\tau)\right\|^2 d\tau+\left|\left\|u_m(t_2,x)\right\|^2_{W_2^1}-\left\|u_m(t_1,x)\right\|^2_{W_2^1}\right|+$$

$$+2\left|\int_{t_1}^{t_2}\left(f_1\left(u_{m-1}(\tau)\right),u'_m(\tau)\right)d\tau\right| \qquad (14)$$

Оценивая интеграл в правой части (как в предыдущем случае), получаем

$$2\left|\int_{t_1}^{t_2}\left(f_1\left(u_{m-1}(\tau)\right),u'_m(\tau)\right)d\tau\right|\le\frac{8\left(K'_B\right)^2}{\alpha}\left(\int_{t_1}^{t_2}\left\|u_m(\tau)\right\|^2_{W_2^1}d\tau+\int_{t_1}^{t_2}\left\|u_0(\tau)\right\|^2_{W_2^1}d\tau\right)+$$

$$+\frac{\alpha}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left\|u'_m(\tau)\right\|^2_{W_2^1}d\tau+4\widetilde{C}_0^2\left(t_1-t_2\right)\Big/\alpha.$$

Учитывая это неравенство и оценки $(M_1)-(M_4)$ в *(14)*, получим

$$\left|\left\|u'_m(t_2,x)\right\|-\left\|u'_m(t_1,x)\right\|\right|\left(\left\|u'_m(t_2,x)\right\|+\left\|u'_m(t_1,x)\right\|\right)\le\left(4\left(K'_B\right)^2M^2+2\left(K'_B\right)^2C_1^2+\widetilde{C}_0^2\right)\times$$

$$\times\frac{t_2-t_1}{\alpha}+\frac{\alpha}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left\|u'_m(\tau)\right\|^2_{W_2^1}d\tau+2\alpha\int_{t_1}^{t_2}\left\|\nabla u'_m(\tau)\right\|^2_{W_2^1}d\tau+\left|\left\|u_m(t_2,x)\right\|^2_{W_2^1}-\left\|u_m(t_1,x)\right\|^2_{W_2^1}\right|.$$

Итак, используя условие (B), абсолютную непрерывности интеграла Лебега и тот факт, что $u_m:[0,T]\to W_2^1$ непрерывно, получаем непрерывность нормы $\left\|u'_m(t)\right\|:[0,T]\to R$.

Теперь покажем непрерывность $u'_m:[0,T]\to L_2(R^n)$. Умножим обе стороны уравнения *(3)* скалярно на $\vartheta(x)\in W_2^1(R^n)$:

$$\left(u''_m,\vartheta\right)-\alpha\left(\Delta u'_m,\vartheta\right)-\left(\Delta u_m,\vartheta\right)+\left(u_m,\vartheta\right)=\left(f_1\left(u_{m-1}\right),\vartheta\right)$$

Применяя ко второму и третьему слагаемым интегрирование по частям, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(u'_m,\vartheta\right)+\alpha\left(\nabla u'_m,\nabla\vartheta\right)+\left(\nabla u_m,\nabla\vartheta\right)+\left(u_m,\vartheta\right)=\left(f_1\left(u_{m-1}\right),\vartheta\right)$$

Интегрируя это равенство по t на $[t_1,t_2]$, получим

$$\left(u'_m(t_2,x)-u'_m(t_1,x),\vartheta\right)+\alpha\left(\nabla u_m(t_2,x),\vartheta\right)-\alpha\left(\nabla u_m(t_1,x),\vartheta\right)+\int_{t_1}^{t_2}\left(\nabla u_m,\nabla\vartheta\right)d\tau+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\left(u_m,\vartheta\right)d\tau=\int_{t_1}^{t_2}\left(f_1\left(u_{m-1}(\tau)\right),\vartheta\right)d\tau.$$

Отсюда

$$\left|\left(u'_m(t_2,x)-u'_m(t_1,x),\vartheta\right)\right|\le\alpha\left|\left(\int_{t_1}^{t_2}\nabla u'_m(\tau)d\tau,\vartheta\right)\right|+\left|\left(\int_{t_1}^{t_2}\left(\nabla u_m(\tau),\nabla\vartheta\right)d\tau\right)\right|+$$

$$+\left|\int_{t_1}^{t_2}\left(u_m,\vartheta\right)d\tau\right|+\int_{t_1}^{t_2}\left|\left(f_1\left(u_{m-1}(\tau)\right),\vartheta\right)\right|d\tau\ .$$

Рассуждая точно также, как и выше получаем, что для каждого $\vartheta\in W_2^1\left(R^n\right)$ отображение $t\to\left(u'_m(t),\vartheta\right)$- является непрерывным отображением.

Более того, в силу полученных оценок из непрерывности $t\to\left(u'_m(t),\vartheta\right)$ и $t\to\left\|u'_m(t)\right\|$, пользуясь уравнением, получаем, что $u'_m(t)\in C\left(0,T;L_2\right)$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть* $T:0<T<\dfrac{4}{\alpha}$ *удовлетворяет условию* $\left(K_2\right)$ *и пусть, кроме того*

$$4\left(K'_B\right)^2T<\alpha \qquad\qquad \left(K_3\right)$$

Тогда, последовательность $\{u_m$ *, построенная в лемме 1, является фундаментальной в* $C\left(0,T;W_2^1\right)$*, а последовательность* $\{u'_m$ *является фундаментальной в* $C\left(0,T;L_2\right)\cap L_2\left(0,T;W_2^1\right)$

Доказательство. Пусть $\vartheta_m=u_m-u_{m-1}$. Тогда ϑ_m удовлетворяет задаче

$$\vartheta''_m-\Delta\vartheta_m-\alpha\Delta\vartheta'_m+\vartheta_m=\left[f_1\left(u_{m-1}\right)-f_2\left(u_{m-2}\right)\right] \qquad (15)$$

$$\vartheta_m(0)=\vartheta'_m(0)=0 \qquad (16)$$

Умножим уравнение *(15)* на $\vartheta'_m(t)$, скалярно по x, и проинтегрируем по t от нуля до t. После преобразований, аналогичных сделанным при доказательстве леммы 1, получим

$$\left\|\vartheta'_m(t)\right\|^2+\left\|\nabla\vartheta_m(t)\right\|^2+2\alpha\int_0^t\left\|\nabla\vartheta'_m(\tau)\right\|^2d\tau+\left\|\vartheta_m(t)\right\|^2=$$

$$=2\int_0^t\left(f_1\left(u_{m-1}\right)-f_2\left(u_{m-2}\right),\vartheta'_m(\tau)\right)d\tau \qquad (17)$$

Оценим интеграл в правой части. После применения неравенства Юнга с параметром $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{\alpha}}{2}$, учитывая условия (B), получим

$$2\left|\int_0^t \left(f_1(u_{m-1})-f_2(u_{m-2}),\vartheta'_m(\tau)\right)d\tau\right| \le \frac{4(K'_B)^2}{\alpha}\int_0^t \|u_{m-1}-u_{m-2}\|_{W_2^1}^2 d\tau+\frac{\alpha}{4}\int_0^t \|\vartheta'_m(\tau)\|_{W_2^1}^2 d\tau =$$

$$=\frac{4(K'_B)^2}{\alpha}\int_0^t \|\vartheta_{m-1}\|_{W_2^1}^2 d\tau+\frac{\alpha}{4}\int_0^t \|\vartheta'_m(\tau)\|_{W_2^1}^2 d\tau \quad .$$

Учитывая эту оценку в *(17)*, получим

$$\|\vartheta'_m(t)\|^2+\|\nabla\vartheta_m(t)\|^2+\frac{7\alpha}{4}\int_0^t \|\nabla\vartheta'_m(\tau)\|^2 d\tau+\|\vartheta_m(t)\|^2 \le \frac{4(K'_B)^2}{\alpha}\int_0^T \|\vartheta'_{m-1}(\tau)\|_{W_2^1}^2 d\tau+$$

$$+\frac{\alpha}{4}\int_0^T \|\vartheta'_m(\tau)\|^2 d\tau \quad .$$

Отсюда в силу произвольности $t\in[0,T]$ и леммы 1 получаем, что

$$\sup_{0\le t\le T}\left\{\|\vartheta'v_m(t)\|^2+\|\nabla\vartheta_m(t)\|^2+\frac{7\alpha}{4}\int_0^t \|\nabla\vartheta'_m(t)\|^2 d\tau+\|\vartheta_m(t)\|^2\right\}\le$$

$$\le\frac{4(K'_B)^2}{\alpha}\cdot T\sup_{0\le t\le T}\|\vartheta_{m-1}(t)\|_{W_2^1}^2+\frac{\alpha T}{4}\sup_{0\le t\le T}\|\vartheta'_m(t)\|^2.$$

Так как $0<\frac{\alpha T}{4}<1,$ из последнего неравенства следует справедливость неравенства

$$\sup_{0\le t\le T}\|\vartheta_m(t)\|_{W_2^1}\le\frac{4(K'_B)^2T}{\alpha}\sup_{0\le t\le T}\|\vartheta_{m-1}(t)\|_{W_2^1}^2$$

Последовательно применяя это рекурентное неравенство, имеем

$$\sup_{0\le t\le T}\|\vartheta_m(t)\|_{W_2^1}\le\left[\frac{4(K'_B)^2T}{\alpha}\right]^{m-1}\sup_{0\le t\le T}\|\vartheta_1\|_{W_2^1}$$

Отсюда при $m\to\infty$ в условиях леммы получим

$$\sup_{0\le t\le T}\|\vartheta_m(t)\|_{W_2^1}^2\to 0 \qquad (18)$$

т.е.

$$\sup_{0\le t\le T}\|\vartheta_m(t)\|^2\to 0$$

$$\sup_{0\le t\le T}\|\nabla\vartheta_m\|^2\to 0$$

Из *(18)* вытекает, что

$$\sup_{0\le t\le T}\|\vartheta'_m(t)\|\to 0$$

$$\sup_{0\le t\le T}\int_0^t\|\nabla\vartheta'_m(\tau)\|\to 0$$

Из этих соотношений, как нетрудно видеть, следует, что при $m,k\to\infty$ для разности $u_m(t)-u_k(t)$ имеют место соотношения

$$\sup_{0\le t\le T}\left\|u_m(t)-u_k(t)\right\|_{W_2^1}\to 0$$

$$\sup_{0\le t\le T}\int_0^t\left\|\nabla u_m'(\tau)-\nabla u_k'(\tau)\right\|\to 0$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Так как пространство W_2^1 является полным, а последовательность $\{u_m$ является фундаментальной в пространстве $C(0,T;W_2^1)$ в силу леммы 2, существует $u(x,t)$ из $C(0,T;W_2^1)$ такое, что

$$\sup_{0\le t\le T}\int_0^t\left\|\nabla u_m(t)-\nabla u(t)\right\|\to 0,\quad \text{при}\qquad m\to\infty \tag{19}$$

$$u_m'\to u'\qquad *\text{- слабо в } L_\infty(0,T;L_2) \tag{20}$$

$$\text{и}\qquad u_m'\to u'\qquad \text{слабо в } L_2(0,T;W_2^1) \tag{21}$$

Кроме того, в силу леммы 2, имеем

$$\sup_{0\le t\le T}\left\|u_m'(t)-u'(t)\right\|\to 0,\qquad \text{при}\qquad m\to\infty \tag{22}$$

$$\int_0^T\left\|\nabla u_m'(\tau)-\nabla u'(\tau)\right\|d\tau\to 0,\qquad \text{при}\qquad m\to\infty \tag{23}$$

Теперь покажем, что можно переходить к пределу в задаче *(3)-(4)* при $m\to\infty$ в смысле теоремы 1.

Для этого рассмотрим выражение

$$\frac{d}{dt}(u_m'(t),\vartheta)+\alpha(\nabla u_m'(t),\nabla\vartheta)+(\nabla u_m(t),\nabla\vartheta)+(u_m(t),\vartheta)=(f_1(u_{m-1}(t)),\vartheta),$$

где $\vartheta(x)\in W_2^1$ - произвольная функция. После интегрирования этого равенства по t, получаем

$$(u_m'(t),\vartheta)+\alpha\int_0^t(\nabla u_m'(\tau),\nabla\vartheta)d\tau+\int_0^t(\nabla u_m(\tau),\nabla\vartheta)d\tau+\int_0^t(u_m(\tau),\vartheta)d\tau=$$

$$=\int_0^t(f(u_{m-1}(\tau)),\vartheta)d\tau+(w_1,\vartheta)+\int_0^t(u_{m-1}(\tau),\vartheta)d\tau,\quad\forall\vartheta\in W_2^1 \tag{24}$$

Используя здесь соотношения *(20)-(23)* и условие (B) получаем, что можно переходить к пределу при $m\to\infty$ в этом равенстве. Тогда получим

$$(u'(t),\vartheta)+\alpha\int_0^t(\nabla u'(\tau),\nabla\vartheta)d\tau+\int_0^t(\nabla u(\tau),\nabla\vartheta)d\tau=\int_0^t(f(u(\tau)),\vartheta)d\tau+(w_1,\vartheta),$$

$$\forall\vartheta\in W_2^1 \tag{25}$$

Далее, из уравнения и полученных оценок $(M_1)-(M_4)$ вытекает, что u_m'' содержится в классе $L_2(0,T;W_2^{-1})$ и пробегает ограниченное множество в этом пространстве, более того, в пространстве $L_\infty(0,T;W_2^{-1})$. Тогда из *(25)* следует справедливость равенства

$$\frac{d}{dt}(u'(t),\vartheta)+\alpha(\nabla u(t),\nabla\vartheta)+(\nabla u(t),\nabla\vartheta)=(f(u(t)),\vartheta)$$

п.в. в $(0,T)$ и $\forall \vartheta \in W_2^1$.

Другими словами, мы показали, что предельная функция $u(t,x)$ является решением задачи *(1)-(2)* в указанном в теореме 1 смысле.

Теперь покажем единственность решения.

Пусть задача *(1)-(2)* имеет 2 решения: u и ϑ. Тогда для разности $\theta = u - \vartheta$ получаем следующую задачу

$$\theta_{tt} - \Delta\theta - \alpha\,\Delta\theta_t + \theta = f_1(u) - f_1(\vartheta) \tag{26}$$

$$\theta(0) = \theta_t(0) = 0 \tag{27}$$

Умножим уравнение *(26)* на $\theta'(t,x)$ скалярно по x и проинтегрируем по t от нуля до t, тогда после аналогичных преобразований, сделанных при доказательстве леммы 2, получим

$$\|\theta'\|^2 + \|\nabla\theta\|^2 + 2\alpha\int_0^t \|\nabla\theta(\tau)\|^2 d\tau + \|\theta\|^2 = 2\int_0^t (f_1(u) - f_1(\vartheta),\theta)d\tau.$$

Оценим интеграл в правой части. После применения неравенства Юнга с параметром $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{K_B'}}$ и учитывая условие (В), получим

$$\|\theta'\|^2 + \|\nabla\theta\|^2 + \|\theta\|^2 \le K_1 \int_0^t \left(\|\theta'\|^2 + \|\nabla\theta\|^2 + \|\theta\|^2\right)d\tau$$

где $K_1 = \max\left\{\dfrac{(K_B')^2}{2\alpha}, 2\alpha\right\}$.

Применяя к последнему неравенству лемму Гронуолла, получаем

$$\|\theta\| = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \vartheta .$$

Теорема полностью доказана.

§ 2. О разрушении решений задачи *(1)-(2)*.

Пусть $f \in C(R^1, R^1)$- некоторая функция и $f(0) = 0$. Через $F(\tau)$ обозначим первообразную функции f, т.е. $F(\tau) = \int_0^\tau f(s)ds$.

Теорема 2. *Пусть задача (1)-(2) имеет достаточно гладкое локальное решение. Тогда, если для некоторого $\beta > 0$ выполняется неравенство*

$$\tau f(\tau) \ge 2(2\beta + 1)F(\tau), \quad \forall \tau \in R^1, \tag{28}$$

а для начальных функций выполняются неравенства

$$\frac{1}{2}\|w_1(x)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla w_0\|^2 - \int_{R^n} F(w_0)dx \le 0 \tag{29}$$

$$(w_0, w_1) > 0 \tag{30}$$

то, решение задачи (1)-(2) разрушается за конечное время, т.е. существует $0 < t_0 < \infty$ такое, что

$$\|u(x,t)\|^2+\alpha\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|^2d\tau\to\infty$$

при $t\to t_0\le\dfrac{\|w_0\|^2+\alpha l\|\nabla w_0\|^2}{2\beta\ (w_0,w_1)}$, *где* $l>>1$ - *некоторое число,*

$\beta_0=\sup\{\beta|\tau f(\tau)\ge 2(2\beta+1)F(\tau),\quad\forall\tau\in R^1\}$

Доказательство. Умножим скалярно на u_t по x обе части уравнения *(1)*. Тогда, после интегрирования по частям, получим

$$\frac{d}{dt}E(t)+\alpha\|\nabla u_t\|^2=0, \qquad (31)$$

где $E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\int_{R^n}F(u)dx.$

Интегрируя это равенство по t от нуля до t, получаем

$$E(t)+\alpha\int_0^t\|\nabla u_\tau(\tau)\|^2d\tau=E_0\,, \qquad (32)$$

где $E_0=\frac{1}{2}\|w_1(x)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla w_0\|^2-\int_{R^n}F(w_0)dx.$

Введем следующую функцию

$$\Phi(t)=\|u(x,t)\|^2+\alpha\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|^2d\tau+(l-t)\|\nabla w_0\|^2,\quad l>>1-const \qquad (33)$$

Нетрудно видеть, что

$$\Phi'(t)=2(u,u_t)+2\alpha\int_0^t(\nabla u,\nabla u_\tau)d\tau \qquad (34)$$

$$\Phi''(t)=2\|u_t\|^2+2(u,u_{tt})+2\alpha(\nabla u,\nabla u_t)$$

Применяя к последнему слагаемому интегрирование по частям, получаем

$$\Phi''(t)=2\|u_t\|^2+2(u,u_{tt})-2\alpha(u,\Delta u_t)=2\|u_t\|^2+2(u,u_{tt}-\Delta u_t).$$

Учитывая то , что $u(t,x)$ является решением задачи *(1)-(2),* отсюда имеем

$$\Phi''(t)=2\|u_t\|^2-2\|\nabla u\|^2+2(u,f(u))$$

Прибавляя к обеим сторонам этого равенства $4(2\beta+1)E_0$, получим

$$\Phi''(t)=4(2\beta+1)\|u_t\|^2-4\beta\|\nabla u\|^2+2\left[(u,f(u))-2(2\beta+1)\int_{R^a}F(u)dx\right]+$$

$$+4\alpha(2\beta+1)\int_0^t\|\nabla u_\tau(\tau)\|^2d\tau-4(2\beta+1)E_0\,.$$

Учитывая здесь условия *(28), (29)* теоремы 2, получаем следующее неравенство

$$\Phi''(t) \geq 4(\beta+1)\left[\|u_t\|^2 + \alpha\int_0^t \|\nabla u_\tau(\tau)\|^2 d\tau\right] \qquad (35)$$

Используя значение $\Phi(t)$из *(33)*, а $\Phi'(t)$ из *(34)* и оценку для $\Phi''(t)$ из *(35)*, нетрудно видеть, что

$$\Phi(t)\Phi''(t) - (1+\beta)[\Phi'(t)]^2 \geq 4(\beta+1)\left\{\left[\|u(x,t)\|^2 + \alpha\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|^2 d\tau\right]\times\right.$$

$$\left. + \left[\|u_t\|^2 + \alpha\int_0^t \|\nabla u_\tau(\tau)\|^2 d\tau\right] - \left[(u,u_t) + \alpha\int_0^t (\nabla u, \nabla u_\tau) d\tau\right]^2\right\} \geq 0 \qquad (36)$$

Теперь применим лемму Левина, которая является частным случаем леммы из работы [4]. Для этого покажем, что функция Φ удовлетворяет всем условиям этой леммы. Из определения Φ нетрудно видеть, что $\Phi(0) > 0$, а из *(34)* в силу условия *(30)* следует, что $\Phi'(0) > 0$. Выполнение основного неравенства уже показано в *(36)*. Тогда применяя указанную лемму к $\Phi(t)$ получаем, что существует $t_0 \leq \dfrac{\Phi(0)}{\beta_0 \Phi'(0)}$ такое, что $\Phi(t) \to \infty$, при $t \to t_0$. Теорема 2 доказана.

Литература

[1]. G.F. Webb. *Existence and asymptotic behavior for a strongly damped nonlinear wave equations.* Can J. Math. Vol. XXXII, № 3, 1980, p. 631-643.

[2]. J.T. Sandefur. *Existence and uniqueness of solution of second order differential equations.* SIAM, J. Math., 14(1983), p. 477-487.

[3]. D.D. Ang and A.P.N. Dinh. *On the strongly Damped equation.* SIAM, J. Math. Anal, Vol. 19, № 6, 1988, p. 1409-1418.

[4]. В.К. Калантаров, О.А. Ладыженская. *Выявление коллапсов для квазилинейных гиперболических уравнений.* Записки науч. семин., ЛОМИ им. В.И. Стеклова, 1977, т.10, с. 77-102.

[5]. Ж.Л. Лионс. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* М., Мир, 1972.

Soltanov K.N., Məmmədov E.M.

ÜÇÜNCÜ TƏRTİB TƏNLİK ÜÇUN KOŞİ MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

İşdə güclü dissipasiyalı qeyri- xətti dalğa tənliyi üçün Koşi məsələsi öyrənilmişdir. Baxılan məsələ üçün lokal həllin varlığı, yeganəliyi isbat olunmuş, həllin özünü aparması tədqiq olunmuşdur.

Soltanov K.M., Mamedov E.M.

ON PROBLEM CAUCHY'S FOR THE EQUATION OF THE THIRD ORDER

The results of investigation of the Cauchy's problem for nonlinear wave equation with strong damping were presented in this paper. In this issue existence of the local solution, uniqueness has been proved and behavior of solution was investigated.