УДК 517.98

ТАГИ-ЗАДЕ А.Т.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭНТРОПИЯ ОГРАНИЧИВАЕТ СВЕРХУ МЕТРИЧЕСКУЮ ЭНТРОПИЮ ДЛЯ ДЕЙСТВИЙ ЛОКАЛЬНО-КОМПАКТНЫХ УНИМОДУЛЯРНЫХ АМЕНАБЕЛЬНЫХ (ЛКУА) ГРУПП

В работе для действий ЛКУА групп ([1]) доказано вариационное неравенство для топологической энтропии. Энтропия введена в соответствии с работой ([2]).

Для действия T группы G в компактном метрическом пространстве X обозначим через $\mathcal{M}(X,T)$ множество всех T- инвариантных борелевских нормированных мер на X.

Пусть, далее, $P(X)$ - множество всех конечных измеримых разбиений пространства (X,β). Для конечного подмножества K группы G и $\zeta=\left(C_\zeta^l,\dots,C_\zeta^n\right)\in P(X)$ положим:

$$\zeta^K:=\left\{\bigcap_{g\in k}T^{g^{-1}}C_\zeta^{i(g)}\neq\varnothing\middle|C_\zeta^{i(g)}\in\zeta,g\in K\right\}.$$

Из непрервности T и конечности K имеем, что $\zeta^K\in P(X)$

Зафиксируем произвольную последовательность Фельнера $\mathcal{F}=\{F_n\}_{n=1}^\infty$ ([1]). В дальнейшем будем считать ее данной, специально не оговаривая это дополнительно. Для $c\in R^+$ обозначим через $\mathcal{K}(\mathcal{F},c)$ множество всех последовательностей $\mathcal{K}=\{K_n\}_1^\infty$, $K_n\subset F_n$, удовлетворяющих следующему условию: $card\ K_n\le c\cdot|F_n|$ при $n=1,2,\dots$, где $|F_n|$- мера Хаара множества F_n. Далее, введем множество

$$BK(F)=\bigcup_{0<c<\infty}\mathcal{K}(\mathcal{F},c)$$

Для $\mu\in\mathcal{M}(X,T),\zeta\in P(X)$ и $\mathcal{K}=\{K_n\}_1^\infty\in B\mathcal{K}(\mathcal{F})$ положим:

$$h_\mu^{\mathcal{K}}(T,\zeta)=\overline{\lim_{n\to\infty}}|F_n|^{-1}H_\mu\left(\zeta^{Kn}\right)$$

(здесь $H_\mu(\zeta)=-\sum_{c_\zeta\in\zeta}\mu(C_\zeta)\log\mu(C_\zeta)$- энтропийная функция):

$$h_\mu^{\mathcal{F}}(T,\zeta)=\sup_{\mathcal{K}\in B\mathcal{K}(\mathcal{F})}h_\mu^{\mathcal{K}}(T,\zeta);h_\mu^{\mathcal{K}}(T):=\sup_{\zeta\in P(X)}h_\mu^{\mathcal{K}}(T,\zeta)\ .$$

Определение 1. *Метрическую энтропию* $h_\mu^{\mathcal{F}}(T)$ *действия* T *относительно меры* $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ *для усредняющей последовательности Фельнера* $\mathcal{F}$ *определим равенством:*

$$h_\mu^{\mathcal{F}}(T) := \sup_{\zeta \in P(X)} h_\mu^{\mathcal{F}}(T,\zeta).$$

Замечание. Не приводя повторно соответствующих определений будем считать заданными величины ζ^K, $h_\mu^{\mathcal{K}}(T,\zeta)$, и $h_\mu^{\mathcal{F}}(T,\zeta)$ для μ-дизъюнктных покрытий. (Напомним, что покрытие $\zeta = (c_\zeta^1,\dots,c_\zeta^n)$ пространства X называется μ-дизъюнктным если

$$\mu\left(\bigcup_{1\le i<j<n}\left(c_\zeta^i \cap c_\zeta^j\right)\right) = 0\,).$$

Предложение1. *Пусть* $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$, A- *замкнутое,* μ- *дизъюнктное покрытие пространства* X. *Тогда для любой последовательности* $\mathcal{K} = \{K_n\}_1^\infty \in B\mathcal{K}(\mathcal{F})$ *верно неравенство*

$$h_\mu^{\mathcal{K}}(T,A) \le h^{\mathcal{K}}(T,A).$$

Доказательство. Для $A = (c_A^1,\dots,c_A^n)$ обозначим через $\zeta(A) = (c_\zeta^1,\dots,c_\zeta^k)$ разбиение из $P(X)$ построенное по A следующим образом:

$$c_\zeta^1 = c_A^1, c_\zeta^i = c_A^i \setminus \bigcup_{j<i} c_A^j \qquad \text{при} \qquad i=\overline{2,n}.$$

Зафиксируем число $\varepsilon > 0$, последовательность $\mathcal{K} = \{K_n\}_1^\infty \in B\mathcal{K}(\mathcal{F})$ и $n \in N$. Так как A является μ- дизъюнктным, то

$$|F_n|^{-1} H_\mu\left(\zeta(A)^{K_n}\right) = |F_n|^{-1} H_\mu\left(A^{K_n}\right).$$

Из свойств энтропийной функции $H_\mu(\cdot)$ следует, что

$$H_\mu\left(\zeta(A)^{K_n}\right) \le \ln N\left(\zeta(A)^{K_n}\right) \le \ln N\left(A^{K_n}\right).$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и $n \in N$ имеем

$$h_\mu^{\mathcal{K}}(T,\zeta(A)) = h_\mu^{\mathcal{K}}(T,A) \le h^{\mathcal{K}}(T,A).$$

Предложение 2. *Пусть* $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$, A- *конечное, замкнутое,* μ- *дизъюнктное покрытие пространства* X. *Тогда для любого* $0 < c < \infty$ *и любой последовательности* $\mathcal{K} = \{K_n\}_1^\infty$ *из* $\mathcal{K}(\mathcal{F},c)$ *верно неравенство*

$$h^{\mathcal{K}}(T,A) \le h^{\mathcal{F}}(T) + c \cdot \log p(A),$$

где $p(A)$ – *кратность покрытия* A.

Доказательство. Так как A- конечное замкнутое покрытие компактного пространства X кратности $p(A)$, то найдется число $\delta > 0$, такое что любой шар радиуса δ в пространстве X пересекается не более чем с $p(A)$ элементами покрытия A. Пусть $\widetilde{A}$ - некоторое конечное открытое покрытие X, такое, что $diam\,\widetilde{A} < \delta$.

Докажем, что для любого конечного множества $K \subset G$ верно неравенство

$$N\left(\widetilde{A}^K\right)\cdot\left(p(A)\right)^{card\,K} \geq N\left(A^K\right).$$

С этой целью докажем более общее утверждение, а именно покажем, что для любого подпокрытия v покрытия $\widetilde{A}^K$ найдется подпокрытие u покрытия A^K, такое что верно неравенство

$$card v\cdot\left(p(A)\right)^{cardK} \geq card u.$$

Для доказательства этого утверждения сопоставим каждому элементу a_0 покрытия $\widetilde{A}^K$ набор $B(a_0)$ элементов покрытия A^K по следующему правилу:

1) для каждого $a_0 \in \widetilde{A}^K$ выберем такую функцию

$$i_0 = \left(i_0(g), g \in K\right) \in \left\{1,\ldots,card\widetilde{A}\right\}^K,$$

что $a_0 = \bigcap\limits_{g\in K} T^{g-1}C_{\widetilde{A}}^{i_0(g)}$.

(Напомним, что $\{1,\ldots,l\}^K = \{(i(g), g \in K) | i(g) \in \{1,\ldots,l\}$ при $g \in K$, для $l \in N$).

2) через $M(a_0)$ обозначим следующее множество функций из $\{1,\ldots,card A\}^K$

$M(a_0) = \{i \in \{1,\ldots,card A\}^K|$ для любого $\forall g \in K C_A^{i(g)} \bigcap C_{\widetilde{A}}^{i_0(g)} \neq \varnothing\}$.

3) и, наконец, положим

$$B(a_0) = \left\{\bigcap_{g\in K} T^{g^{-1}} C_A^{i(g)} \neq \varnothing \middle| i = \left(i(g), g \in K\right) \in M(a_0)\right\}$$

Из выбора $\widetilde{A}^K$ следует, что

$$card B(a_0) \leq card M(a_0) \leq \left(p(A)\right)^{cardK}.$$

Кроме того, из построения $B(a_0)$ имеем истинность включения

$$a_0 \subset \bigcup_{b\in B(a_0)} b.$$

Следовательно для любого подпокрытия $\mathcal{V}$ покрытия $\widetilde{A}^K$ набор

$$\mathcal{U} = \{b | b \in B(a), a \in v$$

является покрытием пространства X и, при этом, верно неравенство

$$card\,\mathcal{U} \leq card\,\mathcal{V}\cdot\left(p(A)\right)^{card\,K}.$$

Отсюда, и из того, что последовательность $\mathcal{K} = \{K_n\}_1^\infty$ принадлежит $\mathcal{K}(\mathcal{F}, c)$ имеем для любого $n \in N$

$$|F_n|^{-1}\log N\left(A^{K_n}\right)\le |F_n|^{-1}\log N\left(\widetilde{A}^{K}\right)+|F_n|^{-1} card K_n\cdot\log p(A)\le$$
$$\le |F_n|^{-1}\log N\left(\widetilde{A}^{K}\right)+c\cdot\log p(A).$$

Простым следствием предложений 1 и 2 является следующее

Предложение 3. *Пусть* $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$, ξ *- конечное, замкнутое,* μ*-дизъюнктное покрытие пространства* X, $p(\zeta)$ *- кратность покрытия* ξ.

$$h_\mu^{\mathcal{K}}(T,\zeta)\le h(T)+c\cdot log\, p(\zeta).$$

Перед формулировкой следующего утверждения введем обозначения: для $m\in N$ *и* $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$ *положим* $X^{(m)}=(X\times)^m;\mu^{(m)}=(\mu\times)^m$ *и определим* $T_{(m)}: X^{(m)}\to X^{(m)}$ *такого, что для* $x=(x_1,\dots,x_m)\in X^{(m)}$ *и* $g\in G$

$$T^g_{(m)}(x)=\left(T^g x_1,\dots,T^g x_m\right).$$

Предложение 4. *Пусть* $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$ *и* $m\in N$. *Тогда выполняются равенства*

$$h\left(T_{(m)}\right)=m\cdot h(T)$$
$$h_{\mu(m)}\left(T_{(m)}\right)=m\cdot h_\mu(T).$$

Доказательство. Для $A\in\Pi(X)$, $\zeta\in P(X)$ и $m\in N$ положим

$$A_{(m)}=\left\{C_A^{i_1}\times\ldots\times C_A^{i_m}\middle| C_A^{i_j}\in A \quad \text{при} \quad j=\overline{1,m}\right.,$$
$$\zeta_{(m)}=\left\{C_\zeta^{i_1}\times\ldots\times C_\zeta^{i_m}\middle| C_\zeta^{i_j}\in \zeta \quad \text{при} \quad j=\overline{1,m}\right..$$

Непосредственно проверяется, что для любого $\mathcal{K}\in B\mathcal{K}(\mathcal{F})$ верны равенства

1) $h^{\mathcal{K}}_{\mu(m)}\left(T_{(m)},\zeta_{(m)}\right)=m\cdot h^{\mathcal{K}}_\mu(T,\xi);$

2) $h^{\mathcal{K}}\left(T_{(m)},A_{(m)}\right)=m\cdot h^{\mathcal{K}}(T,A).$

Отсюда и из того, что топологическую (метрическую) энтропию действия можно вычислить по любой последовательности покрытий (разбиений) диаметры которых стремятся к нулю, получаем истинность предложения 4. (Доказательство этих утверждений совершенно аналогично приведенному в [3] для случая действий счетных групп).

Лемма 1. *Пусть* X *-* $n-$ *мерное связное компактное метрическое пространство,* μ *- борелевская вероятностная мера на* X. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *найдется такое замкнутое* μ*- дизъюнктное конечное покрытие* ζ *пространства* X, *что:*

1) $diam\,\zeta<\varepsilon$ *и*

2) $p(\zeta)\le n+1$,

где $p(\zeta)$ *– кратность покрытия* ζ.

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon>0$ из того, что X-метрический $n-$ мерный компакт следует существование конечного открытого покрытия $\mathcal{U}=(u_1,\dots,u_k)$ пространства X, для которого $diam\mathcal{U}<\varepsilon$ и $p(\mathcal{U})\le n+1$.

Пусть λ - лебегово число покрытия $\mathcal{U}$. Тогда для любого $x\in X$ найдется $u(x)\in\mathcal{U}$ такое, что $B_\lambda(x)\subset u(x)$. (Здесь $B_\lambda(x)$ шар радиуса λ в пространстве X). Далее, в силу связности пространства X и регулярности меры μ найдется число $\tau(x)\in\left[\lambda/3,\lambda/2\right]$ такое, что

$$\mu\left(\partial B_{\tau(x)}(x)\right)=0.$$

Для каждого x из X выберем такие $u(x)$ и $\tau(x)$.

Из открытого покрытия $\left\{B_{\lambda/4}(x)\middle| x\in X\right.$ прстранства X выберем конечное подпокрытие

$$\left\{B_{\lambda/4}(x_1),\dots,B_{\lambda/4}(x_m)\right\}.$$

Для каждого $i=\overline{1,k}$ построим замкнутые множества V_i по правилу:

$$V_i=\bigcup_{j\in\left\{1\le j\le m\middle|u(x_j)=u_i\right\}}\overline{B_{\tau(x_j)}(x_j)}.$$

Из построения имеем, что $\mathcal{V}=(\vartheta_1,\dots,\vartheta_k)$ является замкнутым покрытием X, причем

$$diam\,\mathcal{V}\le\varepsilon \quad \text{и} \quad p(\mathcal{V})\le n+1. \qquad (5)$$

Теперь зададим искомое покрытие ξ следующим образом

$$C_\xi^1=V_1, C_\xi^i=\overline{V_i\Big/\bigcup_{j<i}V_j} \quad \text{при} \quad i=\overline{2,k}.$$

Из построения имеем, что для любых $1\le i,j\le n, i\ne j$

$$C_\xi^i\cap C_\xi^j\subset\left(\bigcup_{i=1}^m\partial B_{\tau(x_i)}(x_i)\right)$$

Поэтому замкнутое пространство покрытие ξ является μ - дизъюнктным. Из *(5)* следует, что

$$diam\,\zeta<\varepsilon \quad \text{и} \quad p(\zeta)\le n+1.$$

Теорема 1. *Пусть T действие ЛКУА группы G в конечномерном компактном метрическом пространстве X. Для любого $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$ верно неравенство*

$$h_\mu(T)\le h(T).$$

Доказательство. Пусть $dim\,X=k$. Для $m\in N$ в пространстве $X^{(m)}=(X\times)$ зададим метрику следующим образом:

для $x=(x_1,\dots,x_m), y=(y_1,\dots,y_m)\in X^{(m)}$ положим

$$\rho_{(m)}(x,y)=\max_{1\le i\le m}\rho(x_i,y_i).$$

Зафиксируем число $c \in (0,\infty), \varkappa = \{K_n\}_1^\infty \in \varkappa(R^q, C)$ и последовательность $\{\xi_n^{(m)}\}$ – замкнутых, $\mu^{(m)}$ – дизъюнктных конечных покрытий пространства $X^{(m)}$ таких, что

$$p(\zeta_n^{(m)}) \le mk+1 \quad \text{и} \quad diam\zeta_n^{(m)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

(Существование такой последовательности разбиений следует из леммы 1 и компактности пространства X).

В силу предположения 3 имеем

$$h_{\mu^{(m)}}^{\varkappa}\left(T_{(m)}, \zeta_n^{(m)}\right) \le h\left(T_{(m)}\right) + c \cdot \log(mk+1) \ ,$$

где действие $T_{(m)}$ группы G в $X^{(m)}$ определено также, как в предложении 4.

Так как энтропия вычисляется по любой последовательности разбиений диаметры которых стремятся к 0, то

$$m \cdot h_\mu^{\varkappa}(T) = h_{\mu^{(m)}}^{\varkappa}\left(T_{(m)}\right) = \overline{\lim_{n\to\infty}} h_{\mu^{(m)}}^{\varkappa}\left(T_{(m)}, \zeta_n^{(m)}\right) \ .$$

Отсюда, и из предыдущего неравенства получаем, что

$$m \cdot h_\mu^{\varkappa} \le m \cdot h(T) + c \cdot \log(mk+1) \ .$$

В силу произвольности m имеем, что для любого числа $c \in (0,\infty)$ и любого $\varkappa \in \varkappa(\overline{R}^q, C)$ верно неравенство

$$h_\mu^{\varkappa}(T) \le h(T) \ .$$

Следовательно

$$h_\mu^{\mathcal{F}}(T) \le h^{\mathcal{F}}(T) \ .$$

Литература

[1]. Ornstein D., Weiss B. *Ann of math.*, 1987, ¹3, p. 3-257.

[2]. Таги-заде А.Т. Математические заметки, 1991, №3, с. 305-311.

[3]. Таги-заде А.Т. " *Функциональный анлиз и его применение* ", Баку, 1978, с. 168-183.

Tagı-zadə A.T.

LOKAL- KOMPAKT UNİMODULYAR AMENADEL QRUPLARIN TƏSİRİ ÜÇÜN TOPOLOJİ ENTROPİYA METRİK ENTROPİYANI YUXARIDAN MƏHDUDLAŞDIRIR

Məqalədə lokal- kompakt unimodulyar amenabel qrupların təsiri halında topoloji entropiya üçün variasiya bərəbərsizliyi isbat olunub.

Tagi-zade A.T.

TOPOLOGICAL ENTROPY GENERATES MEASURE-THEORETIC ENTROPY FOR LOCAL COMPACT UNIMODULAR AMENABLE GROUPS ACTING

In article it is proved variation inequality for topological entropy for local compact unimodular amenable groups actions.