УДК 517.98

ФЕЙЗИЕВ А.С.

СЛОЖНОСТЬ ТРАЕКТОРИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ (Д.С) ДЛЯ ДЕЙСТВИЙ НЕКОММУТАТИВНЫХ ГРУПП

Целью данной работы является исследование для некоммутативных групп преобразований связей между сложностью траекторий д.с. и такими характеристиками теории д.с. как метрическая энтропия и эргодические компоненты.

Впервые зависимость между энтропией и сложностью описания сообщений дискретного эргодического источника отметил Шеннон, правда без точного определения второй величины. Строгое определение сложности конечного слова было дано Колмогоровым ([1]). Определение понятия сложности траекторий д.с. и исследование связи этой новой величины с энтропией для случая действия одного преобразования было сделано Брудно ([2]). Тагизаде ([3]) ввел соответствующее определение для действия счетной группы и для символических систем доказал теорему о равенстве топологической энтропии естественного действия группы сдвигами с алгоритмической сложностью конфигурационного пространства.

Введем необходимые определения и понятия.

Под метрической д.с. (X,T) с фазовым пространством X и временем G будем понимать следующее: (X,M,μ) - пространство с мерой, G - счетная аменабельная группа ([4]), T - измеримое отображение $(x,g)\mapsto T^g x$, действующее из $X\times G\to X$ такое, что $T^{g_1g_2}x = T^{g_1}T^{g_2}x$ $\forall g_1,g_2\in G$, $\forall x\in X$.

Пусть $EM(X,T)$ - множество всех нормированных, эргодических, T-инвариантных мер на X, $F=\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ - последовательность Фельнера ([5]) на группе G.

Пусть $\aleph=\{A_i\}_{i\in I}$ - конечное измеримое разбиение X, $\Omega_I=\left\{\omega=\{\omega_g\}_{g\in G}\Big|\omega_g\in I\right\}$ - пространство конфигураций, снабженное топологией произведения, σ - естественное действие группы G в Ω_I сдвигами, т.е. $\sigma: G\times\Omega_I\to\Omega_I$:

$$\widetilde{\omega}=\sigma^g\omega \iff \widetilde{\omega}_h=\omega_{g^{-1}h} \quad \text{для } g\in G \quad \forall h\in G.$$

Определим отображение $\varphi_\aleph: X\to\Omega_I$ таким образом:

$$\omega = \{\omega_g\}_{g \in G} = \varphi_{\aleph}(x) \Leftrightarrow T^g x \in A_{\omega_g} \text{ для всех } g \in G$$

Д.с. $(\Omega_{\aleph}, \sigma)$ называется символической, если $\Omega_{\aleph}$ - инвариантное относительно σ, замкнутое подмножество Ω_I, а σ - ограничение на $\Omega_{\aleph}$ ([6]).

Для любого конечного подмножества H группы G назовем штампом конфигурацию $\omega^H = \{\omega_g\}_{g \in H}$, а через

$$C(\omega^H) = \left\{ \tilde{\omega} = \{\tilde{\omega}_g\}_{g \in G} \middle| \tilde{\omega}_g = \omega_g \text{ при } g \in H \right\}$$

обозначим цилиндр в пространстве Ω_I.

Аддитивная функция множества $\tilde{\mu}$ определенная на цилиндрах $\{C(\omega^H): \omega \in \Omega_{\aleph}, H \subset G, card H < \infty\}$ пространства $\Omega_{\aleph}$ соотношением $\tilde{\mu}(C(\omega^H)) = \mu\left(\bigcap_{g \in H} (T^g)^{-1} A_{\omega_g}\right)$ может быть продолжена до меры $\mu_{\aleph}$ в пространстве Ω_I причем если $\mu \in EM(X, T)$, то $\mu_{\aleph} \in EM(\Omega_I, \sigma)$.

Определим понятие сложности траекторий символической д.с.

Пусть A-вычислимая функция (алгоритм), определенная на некотором подмножестве всех конечных двоичных слов p и принимающая значения во множестве штампов, $l(p)$ - количество двоичных знаков в p. В соответствии с определением сложности конечного объекта ([1]) определим сложность $K_A(\omega^H)$ штампа ω^H относительно вычислимой функции A:

$$K_A(\omega^H) = \begin{cases} \inf_p l(p): A(p) = \omega^H & \textit{если } \{p: A(p) = \omega^H\} \neq \emptyset \\ \infty & \textit{в противном случае} \end{cases}$$

Определение ([3]). *Сложностью $K_A^F(\omega)$ последовательности $\omega \in \Omega_{\aleph}$ относительно вычислимой функции A и последовательности F назовем величину:*

$$K_A^F(\omega) = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{|F_n|} K_A(\omega^{F_n}),$$

где $|\cdot|$ - число элементов множества.

В ([1]) доказано существование такой вычислимрй функции A, что для любой другой вычислимой функции B существует константа $C_{A,B}$ такая,что для любого штампа $\omega^H: K_A(\omega^H) \leq K_B(\omega^H) + C_{A,B}$.

Такая функция A называется асимптотически оптимальной функцией (а.о.ф). Верна следующая

Лемма ([3]). *Величина $K_A^F(\omega)$ не зависит от выбора а.о.ф. A.* Поэтому мы можем зафиксировать какую-либо одну а.о.ф. А и определить такую величину: $K^F(\omega) = K_A^F(\omega)$.

Объединение штампов будем интерпретировать как произведение конечных конфигураций, т.е. обозначим $\omega^K\omega^H =: \omega^K \bigcup \omega^H$. Пусть $(\Omega_\aleph, \sigma)$ - метрическая д.с. В работе доказано, что если G - счетная аменабельная группа обладающая свойством периодической аппроксимации (PA)([7]), то сложность почти всех последовательностей по произвольной эргодической мере μ, равно величине метрической энтропии по той же мере.

Нам потребуется несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Пусть $(\Omega_\aleph, \sigma)$-символическая д.с., G- счетная аменабельная группа, $F = \{F_i\}_{i=1}^\infty$- последовательность Фельнера. Если $\widetilde{\omega} = \sigma^g\omega$ для некоторого $g \in G$, то $K^F(\widetilde{\omega}) = K^F(\omega)$.*

Доказательство. Пусть A- произвольная а.о.ф. Определим вычислимую функцию $A' = A'(p)$, принимающую значения во множестве штампов $\{\omega^{g^{-1}F_n}, \omega \in \Omega_\aleph\}$ по следующим правилам: 1. Выписываем штамп $A(p)$; 2. Действуем на него преобразованием G^g; 3. В конце функция A' стирает элементы не попавшие в область значений и заполняет пустые. Обозначим через $B(F_n) = F_n \setminus g^{-1}F_n$ и $\widetilde{B}(F_n) = gF_n \setminus F_n$. По определению последовательности Фёльнера для $\forall\varepsilon > 0$ при $n >> 1$ $|B(F_n)| < \varepsilon\,|F_n|$, $|\widetilde{B}(F_n)| < \varepsilon\,|F_n|$. Пусть теперь слово p таково, что $A(p) = \omega^{F_n \cup g^{-1}F_n} = \omega^{\widetilde{B}(F_n)}\omega^{F_n}$. Тогда $A'(p) = \omega^{g^{-1}F_n} = \widetilde{\omega}^{F_n}$. Так как $|B(F_n)| < \varepsilon\,|F_n|$, то можно построить ([3]) вычислимую функцию A_0 такую, что $A_0(p) = \omega^{\widetilde{B}(F_n)}, l(p) = [\log\varepsilon\,|F_n|] + 1$. Тогда

$$K^F(\widetilde{\omega}) \le K^F_{A'}(\widetilde{\omega}) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|F_n|}\left(K_{A_0}\left(\omega^{\widetilde{B}(F_n)}\right) + K_A\left(\omega^{F_n \cup g^{-1}F_n}\right)\right) \le$$

$$\le \overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{1}{|F_n|}\left([\log\varepsilon\,|F_n| + 1]\right) + \frac{K_A\left(\omega^{F_n \cup g^{-1}F_n}\right)}{|F_n \cup g^{-1}F_n|}\cdot\frac{|F_n \cup g^{-1}F_n|}{|F_n|}\right] = K^F_A(\omega) = K^F(\omega).$$

Для получения обратного неравенства строим вычислимую функцию $A'' = A''(p)$ принимающую значения во множестве штампов $\{\omega^{F_n}, \omega \in \Omega_\aleph\}$ по правилу: 1. Выписываем штамп $A(p)$; 2. Действуем на него преобразованием $(G^g)^{-1}$; 3. В конце функция A'' и стираем элементы не попавшие в область значений и заполняет пустые места и берем $A(p) = \omega^{B(F_n)}\omega^{g^{-1}F_n}$.

Простым следствием леммы 1 является

Лемма 2. *Множества* $\overline{\overline{A_t}} = \{\omega : K^F(\omega) = t\}, \check{A}_t = \{\omega : K^F(\omega) < t\}$, $\hat{A}_t = \{\omega : K^F(\omega) > t\}$ *- инвариантны относительно σ, где $t \in R^+$ - произвольное.*

Лемма 3. *Множества* $\overline{\overline{A}}_t$, $\check{A}_t$, $\hat{A}_t$ *-измеримы*.

Доказательство. Покажем измеримость множества $\check{A}_t$ (для других множеств это делается аналогично). Действительно $\check{A}_t = \{\omega : K^F(\omega) < t\} =$

$\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n>N}\left\{\omega : K\left(\omega^{F_n}\right) < \left(t - \frac{1}{k}\right)\cdot|F_n|\right\}$. Но при фиксированных k и n множество в фигурных скобках является объединением конечного числа цилиндров и так как цилиндрические множества образуют σ-алгебру в пространстве $\Omega_{\aleph}$ а значит измеримо и множество $\check{A}_t$.

Лемма 4. *Если* $(\Omega_{\aleph}, \sigma)$ *- символическая д.с.,* G -счетная аменабельная группа, $F = \{F_i\}$ - последовательность Фёльнера, $\mu \in EM(\Omega_{\aleph}, \sigma)$, то для μ-почти всех $\omega \in \Omega_{\aleph}$ $K^F(\omega) \geq h_\mu^F(\sigma)$, где $h_\mu^F(\sigma)$ метрическая энтропия ([7]).

Доказательство. Предположим противное. Пусть $Q = \{\omega : K^F(\omega) < h_\mu^F(\sigma)\}$ и $\mu(Q) \neq 0$. В силу лемм 2 и 3 множество Q инвариантно и измеримо, следовательно $\mu(Q) = 1$ (в силу эргодичности меры μ). Имеет место разложение $Q = \bigcup_{r\in Z} Q_r$, $Q_r = \left\{\omega : K^F(\omega) < h_\mu^F - \frac{1}{r}\right\}$. Так как множества Q_r также измеримы и инвариантны и $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq \ldots \bigcup_{r\in Z} Q_r = Q$, то найдется $R \in Z^+$ такое, что $\mu(Q_R) = 1$. В свою очередь

$$Q_R = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{R,k}\text{, где } Q_{R,k} = \left\{\omega : K\left(\omega^{F_l}\right) < \left(h_\mu^F(\sigma) - \frac{1}{R}\right)|F_l| \text{ для всех } k < l\right\}.$$

Аналогично, найдется K такое, что при $k > K$ верно $\mu(Q_{R,k}) > 1 - \delta$ $(\delta > 0$ произвольна).

Пусть $\varepsilon < \min\left(\frac{1}{R}, 1 - \delta\right)$, число $N = N(\varepsilon)$ и множества A^{F_n} и B^{F_n} удовлетворяют условию следствия теоремы Шеннона-Мак Миллана-Бреймана ([8]), т.е. $\forall n > N(\varepsilon)$ $\Omega^{F_n} = \left\{\Omega = \{\omega_g\}_{g\in F_n}\right\} = A^{F_n} \cup B^{F_n}$, причем

1) $\mu\left(\left\{\omega^{F_n} : \omega^{F_n} \in A^{F_n}\right\}\right) < \varepsilon$. 2) для $\omega^{F_n} \in B^{F_n}$ имеем $2^{-|F_n|\left(h_\mu^F(\sigma)+\varepsilon\right)} \leq$ $\leq \mu\left(c\left(\varpi^{F_n}\right)\right) \leq 2^{-|F_n|\left(h_\mu^F(\sigma)-\varepsilon\right)}$. Положим $Q_{R,k}^A = Q_{R,k} \cap A^{F_n}$, $Q_{R,k}^B = Q_{R,k} \cap B^{F_n}$.

Так как $Q_{R,k}^A \subseteq A^{F_n}$, то при всех $k > \max\{K, N(\varepsilon)\}$ $\mu\left(Q_{R,k}^A\right) \leq \mu\left(A^{F_k}\right) < \varepsilon$

и $\mu\left(Q^B_{R,k}\right)=\mu\left(Q_{R,k}\right)-\mu\left(Q^A_{R,k}\right)>1-\delta-\varepsilon>0$ *(*)*. С другой стороны, если $\omega^{F_k}\in Q^B_{R,k}$, то $K\left(\omega^{F_k}\right)\le|F_k|\cdot\left(h^F_\mu(\sigma)-\frac{1}{R}\right)$ следовательно

$$card\left\{\omega^{F_k}:\omega^{F_k}\in Q^B_{R,k}\right\}\le 2^{|F_k|\cdot\left(h^F_\mu(\sigma)-\frac{1}{R}\right)+1}.$$

Кроме того, если $\omega\in Q^B_{R,k}$, то $\omega\in B^{F_k}$, и в силу предыдущего неравенства $\mu\left(Q^B_{R,k}\right)\le 2^{|F_k|\left(h^F_\mu-\frac{1}{R}\right)+1}\cdot 2^{-|F_k|\left(h^F_\mu-\varepsilon\right)}\le 2^{|F_k|\left(\varepsilon-\frac{1}{R}\right)+1}$.

Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}\mu\left(Q^B_{R,k}\right)=0$, что противоречит (*).

Лемма 5. *Если $\left(\Omega_\aleph,\sigma\right)$ - символическая д.с. G - счетная аменабельная группа обладающая свойством PA, $F=\left\{F_i\right\}$ - последовательность Фёльнера, $\mu\in EM\left(\Omega_\aleph,\sigma\right)$, то для μ-почти всех $\omega\in\Omega_\aleph$*

$$K^F(\omega)\le h^F_\mu(\sigma).$$

Доказательство. В работе ([9]) показано, что если группа G обладает свойством PA, то можно построить такую последовательность Фёльнера $F=\left\{F_i\right\}$, что для любой пары натуральных чисел m и n, $m<n$ существует конечное множество центров $Q^n_m=Q^n_m\left(F_n,F_m,\varepsilon_m\right)$ такое, что множество F_n допускает замещение с точностью до ε_m сдвигами множества F_m на элементы множества Q^n_m, т.е.

$$\left|F_n\Delta Q^n_mF_m\right|\le\varepsilon_m|F_n|;|F_n|(1+\varepsilon)\ge\left|Q^n_m\right||F_m|;q_1,q_2\in Q^n_m$$

$$q_1\ne q_2\left|q_1F_m\cap q_2F_m\right|\le\varepsilon_m|F_m|.$$

Зафиксируем m,n, $m<n$, $g\in F_m$ и нумерацию в F_m, т.е. $F_m=\left\{g_1,\dots,g_{|F_m|}\right\}$. Обозначим $A^n_m(g)=F_n\left|Q^n_mgF_m\right.$. Из $\left|F_n\Delta Q^n_mF_m\right|\le\varepsilon_m|F_n|$ и $\left|gF_m\Delta F_mg\right|\le\varepsilon_m|F_m|$ получаем, что $\left|A^n_m(g)\right|\le 4\varepsilon_m|F_n|$.

Можно выбрать такое подмножество $\widetilde{F}_m\subset F_m$, что $\left\{q_ig\widetilde{F}_m\right\}$, $i=\overline{1,\left|Q^n_m\right|}$ попарно не пересекаются и $\widetilde{F}_m$ опять является множеством Фельнера.

Пусть задано слово $\omega\in\Omega_\aleph$. Рассмотрим его конечное подслово ω^{F_n}. Этот штамп можем записать как $\omega^{F_n}=\omega_0^{A^n_m(g)}\omega_1^{q_1\cdot g\cdot F_m}\dots\omega_{|Q^n_m|}^{q_{|Q^n_m|}\cdot g\cdot F_m}$, где $Q^n_m=\left\{q_1,\dots,q_{|Q^n_m|}\right\}$.

Пусть число всевозможных слов алфавита I длиною $|F_m|$- равно M, т.е. $M=(cardI)^{|\widetilde{F}_m|}$. Пронумеруем их каким-либо образом. Пусть j-ое из них встречается среди $\omega_s^{q,g\widetilde{F}_m}\left(s=\overline{1,|Q_m^n|}\right)$ равно $s_j=s_j\left(\omega^{F_n}\right)$ раз.

Обозначим через $h\left(\omega^{F_n}\right)$ логарифм числа слов $\overline{\omega}^{F_n}$, имеющих тот же набор $\left\{s_j\left(\omega^{F_n}\right)\right\}_{j=1}^{M}$ что и ω^{F_n}, т.е. $h\left(\omega^{F_n}\right):=\log\dfrac{|Q_m^n|!}{s_1!\ldots s_M!}$
а через $NM\left(\omega^{F_n}\right)$- номер ω^{F_n} среди всех таких $\overline{\omega}^{F_n}$.

В работе ([3]) показано, что существует вычислимая функция A_0 такая, что $K_{A_0}\left(\omega_0^{A_m^n(g)}\right)\leq\left[\log(cardI)^{4\varepsilon_m|F_n|}\right]+1$.

Таким образом слово ω^{F_n} однозначно восстанавливается по набору $\left\{|Q_m^n|,|\widetilde{F}_m|,s_1,\ldots,s_m,|A_m^n(g)|,A_0^{-1}\left(\omega_0^{A_m^n(g)}\right),NM\left(\omega^{F_n}\right)\right.$ или, то же самое, по двоичному слову

$$p=|Q_m^n|\ \ |\widetilde{F}_m|S_1\ldots S_m|A_m^n(g)|A_0^{-1}\left(\omega_0^{A_m^n(g)}\right)NM\left(\omega^{F_n}\right)$$

где эти целые числа записаны в двоичной записи.

Обозначим через A^* вычислимую функцию, осуществляющую кодирование слова ω^{F_n} в слово p. Таким образом

$$K_{A^*}\left(\omega^{F_n}\right)\leq l\left(|Q_m^n|\right)+l\left(|F_m|\right)+\sum_{j=1}^{M}l\left(S_j\right)+l\left(|A_m^n(g)|\right)+\left[\log(cardI)^{4\varepsilon_m|F_n|}\right]+$$
$$+1+\left[\log NM\left(\omega^{F_n}\right)\right]+1\leq h\left(\omega^{F_n}\right)+\overline{O}\left(|F_n|\right).$$

Применяя формулу Стирлинга получаем:

$$h\left(\omega^{F_n}\right)\leq-|Q_m^n|\sum_{j=1}^{M}\frac{S_j\left(\omega^{F_n}\right)}{|Q_m^n|}\log\frac{S_j\left(\omega^{F_n}\right)}{|Q_m^n|}$$

Обозначим через $\beta^{\widetilde{F}_m}=\left\{c\left(\omega^{\widetilde{F}_m}\right)\right\}_{\omega\in\Omega_{\aleph}}$ разбиение пространства $\Omega_{\aleph}$ на всевозможные цилиндры длины $|\widetilde{F}_m|$. Так как число этих цилиндров равно M, элементы этого разбиения обозначим через $\beta^{\widetilde{F}_m}=\{B_1,\ldots,B_m$. Тогда $\sum_{q\in Q_m^n}\chi_{Bj}\left(\sigma^{gq}\omega\right)$, где χ_{Bj} - характеристическая функция Bj будет означать, число тех из $\omega_s^{q,g\widetilde{F}_m}\ s=\overline{1,|Q_m^n|}$ которые принадлежат Bj или иначе говоря $Sj\left(\omega^{F_n}\right)$. Значит

$$Sj\left(\omega^{F_n}\right)=\sum_{q\in Q_m^n}\chi_{Bj}\left(\sigma^{gq}\omega\right)$$
$$\sum_{g\in\widetilde{F}_m}Sj\left(\omega^{F_n}\right)=\sum_{g\in\widetilde{F}_m}\sum_{q\in Q_m^n}\chi_{Bj}\left(\sigma^{gq}\omega\right)$$

$$\frac{Sj\left(\omega^{F_n}\right)}{\left|Q_m^n\right|}=\frac{1}{\left|\widetilde{F}_m\right|}\cdot\frac{1}{\left|Q_m^n\right|}\sum_{g\in\widetilde{F}_m}\sum_{q\in Q_m^n}\chi_{Bj}\left(\sigma^{gq}\omega\right)$$

По свойству PA F_n допускает замещение сдвигами $\widetilde{F}_m$ на элементы Q_m^n и поэтому $\frac{Sj\left(\omega^{F_n}\right)}{\left|Q_m^n\right|}=\frac{1}{\left|F_n\right|}\sum_{d\in F_n}\chi_{Bj}\left(\sigma^d\omega\right)+\overline{O}\left(\left|F_n\right|\right)$.

По индивидуальной эргодической теореме Бирхоффа ([8]) для μ-почти всех $\omega\in\Omega_{\aleph}$ $\frac{1}{\left|F_n\right|}\sum_{d\in F_n}\chi_{Bj}\left(\sigma^d\omega\right)\underset{n\to\infty}{\to}\mu(Bj)$. Тогда

$$K^F(\omega)\le K_{A^*}^F(\omega)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\left|F_n\right|}K_{A^*}\left(\omega^{F_n}\right)\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{h\left(\omega^{F_n}\right)}{\left|F_n\right|}\le$$

$$\le\overline{\lim}\frac{1+\varepsilon}{\left|\widetilde{F}_m\right|}\left(-\sum_{j=1}^{M}\mu(Bj)\log\mu(Bj)\right)=\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{\left|\widetilde{F}_m\right|}H_\mu\left(\beta^{\widetilde{F}_m}\right)=$$

$$=h_\mu^F\left(\sigma,\beta^{F_m}\right)=h_\mu^F(\sigma),$$

так как $\beta^{\widetilde{F}_m}$ является образующим разбиением ([5]).

Утверждения лемм 4 и 5 показывают, что верна

Теорема 1. *Пусть* $\left(\Omega_{\aleph},\sigma\right)$- *символическая д.с.,* G- *счетная аменабельная группа обладающая свойством* PA, $F=\left\{F_i\right\}$ *– последовательность Фёльнера,* $\mu\in FM\left(\Omega_{\aleph},\sigma\right)$, *тогда для* μ-*почти всех* ω

$$K^F(\omega)=h_\mu^F(\sigma).$$

Сейчас дадим определение сложности траекторий метрической д.с.

Определение 2. *Пусть* $\beta=\left\{B_1,\ldots,B_K\right\}$- *конечное измеримое разбиение* X. *Величину* $K^F(x,T\setminus\beta)=K^F\left(\varphi_\beta(x)\right)$ *будем называть сложностью траектории точки* x *относительно последовательности* F *и разбиения* β.

Докажем одно важное свойство величины $K^F(x,T/\beta)$.

Свойство 1. *Если* $\beta_1\le\beta_2$, *то* $K^F\left(x,T/\beta_1\right)\le K^F\left(x,T/\beta_2\right)$.

Пусть

$\beta_1=\left\{\beta_1,\ldots,\beta_k\right\}$, $\beta_2=\left\{\beta_2',\ldots,\beta_l'\right\}$, $\beta_1\le\beta_2$ т.е. $\forall B_j'\in\beta_2\exists B_i\in\beta_1$ $B_j'\le B_i$.

Очевидно, существует вычислимая однозначная функция $A^0:\{1,\ldots,l\}\to$ $\to\{1,\ldots,k\}$ такая, что $A^0(j)=i$, если $B_j'\subseteq B_i$. Пусть A- произвольная а.о.ф., тогда $\widetilde{A}=A_0^0A$- вычислима и кроме того, если $A(p)=\left(\varphi_{\beta_2}(x)\right)^{F_n}$, то $\widetilde{A}(p)=\left(\varphi_{\beta_1}(x)\right)^{F_n}$. Следовательно

$$K^F(x,T/\beta_1) = K^F(\varphi_{\beta_1}(x)) \le K^F_{\tilde{A}}(\varphi_{\beta_1}(x)) \le$$
$$\le K^F(\varphi_{\beta_2}(x)) = K^F(x,T/\beta_2)$$

Подобно тому как для почти всех последовательностей символической д.с. их сложность равна энтропии этой системы, сложность относительно разбиения почти всех траекторий метрической д.с. (X,T) равна метрической энтропии действия относительно этого разбиения.

Теорема 2. *Пусть (X,T) - метрическая д.с., G- счетная аменабельная группа со свойством PA, F- последовательность Фёльнера, $\mu \in EM(X,T)$, β - конечное измеримое разбиение X, тогда для μ - почти всех $x \in X$*

$$K^F(x,T/\beta) = h^F_\mu(X,T)$$

Доказательство. Как было отмечено, если $\mu \in EM(X,T)$, то $\mu_\beta \in EM(\Omega_\beta,\sigma)$, где μ_β - мера перенесенная с помощью отображения $\varphi_\beta : X \to \Omega_\beta$; легко показать, что при этом $h^F_\mu(T,\beta) = h^F_{\mu_\beta}(\sigma)$. Тогда в силу теоремы 1, имеем $\mu_\beta\left(Q_\beta = \left\{\omega \in \Omega_\beta : K^F(\omega) = h^F_{\mu_\beta}(\sigma)\right\}\right) = 1$. Положим $Q = \varphi_\beta^{-1}(Q_\beta)$. Тогда $\forall x \in Q \quad K^F(x,T/\beta) = K^F(\varphi_\beta(x)) = h^F_\mu(T,\beta)$, следовательно $\mu(Q) = \mu_\beta(Q_\beta) = 1$.

Опредление 3. *Сложностью траектории точки $x \in X$ относительно последовательности F и исчерпывающего семейства возрастающих разбиенений $\beta = \{\beta_i\}_{i \in Z^+}$ т.е. $\beta_1 \le \beta_2 \le \ldots$ и $\bigvee_{i \in Z^+} \mathfrak{M}(\beta_i) \nearrow \mathfrak{M}$ назовем величину $K^F(x,T/\beta) = \lim_{i\to\infty} K^F(x,T/\beta_i)$.*

Замечание. Величина $K^F(x,T/\beta)$ существует в силу свойства 1, возможно $K^F(x,T/\beta) = \infty$.

Можно показать (это будет следовать из доказанной далее теоремы 3), что если $\beta = \{\beta_i\}_{i \in Z^+}$ и $\beta' = \{\beta_i'\}_{i \in Z^+}$ два семейства исчерпывающих разбиений, то множество $Q = \left\{x : K^F(x,T/\beta) \ne K^F(x,T/\beta')\right\}$ - инвариантной меры нуль ([10]). Поэтому целесообразно зафиксировать некоторое семейство $\beta = \{\beta_i\}$ и сложность траектории точки x относительно этого семейства обозначить через $K^F(x,T)$.

Теорема 3. *Пусть $X^F_t = \{x \in X : K^F(x,T) = t\}$, тогда $X = \bigcup_{t \in R^+} X^F_t$, причем:*

1) множества X^F_t - инвариантны и измеримы при всех t;

2) $X_t^F \cap X_{t'}^F = \varnothing$ *если* $t \neq t'$;

3) если $\mu \in EM(X,T)$ *и* $h_\mu^F(T) = t$, *то* $\mu(X_t^F) = 1$.

Свойства 1) и2) очевидны, свойство 3) является следствием теоремы 2 и хорошо известного свойства энтропии $h_\mu^F(T) = \lim\limits_{i\to\infty} h_\mu^F(T,\beta_i)$, если $\mathfrak{m}(\beta_i) \nearrow \mathfrak{m}$.

В заключении выражаю глубокую благодарность А. Тагизаде и К. Солтанову за постоянную помощь и внимание к работе.

Литература

[1]. Колмогоров А.Н. *Три подхода к определению понятия количество информации.* Проблемы передач информации, т.1, №1, 1965, с. 3-11.

[2]. Брудно А.А. *О сложности траекторий д.с.* УММ т. 32. №1, 1978.

[3]. Тагизаде А.Т. *О сложности символических систем на некоммутативных группах.* Линейные операторы и их применение. АГУ, 1984, с. 105-110.

[4]. Гринлиф Ф. *Инвариантные средние на топологических группах и их приложение.* Мир, 1973.

[5]. Тагизаде А.Т. *Об энтропийных характеристиках аменабельных групп.* ДАН Аз.ССР, т.34, №8, 1978, с. 11-14.

[6]. Алексеев А.Т. *Символическая динамика.* ИМ АН УССР, 1976.

[7]. Тагизаде А.Т. *Энтропия действия аменабельных групп.* ДАН Аз. ССР, 1978, т.34, №6.

[8]. Степин А.М. *Равнораспределенность энтропии преобразований аменабельных групп.* ДАН Аз.ССР, 1978, т.34, с. 3-7.

[9]. Тагизаде А.Т. *Энтропийные свойства действий аменабельных групп.* Функциональный анализ и его применение, 1978, №3.

[10]. Denker M., Grillenberger C., Sigmund K. *Lecture notes in mathematics.* Ergodic theory on compact sets. v.527, 1976.

Feyziyev A.S. **QEYRİ KOMMUTATİV QRUPLARIN TƏSİRİ HALI ÜÇÜN DİNAMİK SİSTEMLƏRİN (D.S.) TRAYEKTORİYALARININ MÜRƏKKƏBLİYİ**

D.s. nəzəriyyəsinə alqoritmik yanaşma nəzərdən keçirilir. Qeyri- kommutativ qrupların təsiri halı üçün d.s. trayektoriyalarının mürəkkəbliyi anlayışının xassələri öyrənilir. Bu anlayışın d.s. metrik entropiyası ilə üst-üstə düşməsi haqqında teorem şərh edilir və isbat olunur.

Feyziyev A.S.

TRAJECTORY'S COMPLEXITY OF DYNAMIC SYSTEMS FOR NON-COMMUTATIVE GROUPS ACTING

The article considers an algorithmic approach to dynamic systems theory. The properties of the notion of trajectory's complexity of dynamic systems for non-commutative groups acting are studied.

The theorem on coincidence of this notion with metric entropy of dynamic systems is formulated and proved.