УДК 517.927.25

АХМЕДОВ А.М.

О БЕЗУСЛОВНОЙ СХОДИМОСТИ КРАТНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ И ПРИСОЕДИНЕННЫМ ФУНКЦИЯМ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В $L_2[a,\infty)$

Известно, что установление безусловной сходимости кратных разложений по собственным и присоединенным функциям опеределенных классов дифференциальных и других операторов представляет большой интерес (см напр.[1]). В настояшей работе вышеуказанный вопрос исследуется для некоторых классов дифференциальных операторов в пространстве $L_2[a,\infty)$.

Прежде чем перейти к изложению результатов приведем нужные нам определения и утверждения.

Скажем, что оператор-функция $A(\lambda)$ обладает своиством (β_n), если безусловно сходятся n-кратные разложения со скобками по системе собственных и присоединенных элементов оператор-функции $A(\lambda)$.

Линейный оператор A называется дискретным, если резольвета $(\lambda I - A)^{-1}$ компактна при некотором $\lambda \in \rho(A)$, где $\rho(A)$ – резольвентное множество оператора A.

Теорема 1[2]. *Пусть* $L = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i D^i P_i D^i$ *и существуют числа* $c > 0$ *и* $t > 0$ *такие, что* $P_0(x) \geq cx^t$ *для всех* $x \in [a_1,\infty)$, *где* $a_1 > a$ *и они оба заданные числа. Предположим, что каждая* P_i *-бесконечно-дифференцируема и неотрицательна на* $[a,\infty)$ *и* $P_n \geq b > 0$ *для некоторого положительного числа b. Пусть k- некоторое натуральное число, такое, что* $2^k \leq n$ *и обозначим* $k_0 = 2^k$. *Пусть H- любое самосопряженное расширение минимального оператора, порожденное выражением L в пространстве* $L_2[a,\infty)$ *и* $\{\lambda_n\}$ $(n = 1,2,\ldots)$*-спектр оператора H, занумерованные в порядке возрастания. Тогда верны утверждения:*

1) $\lambda_j = O(j^{2n})$,

2) существует положительное число C_1, *такое , что при достаточно больших* j $\lambda_j \geq c_1 j^{2tk_0/(t+2k_0)}$

Важной является следуюшая.

Теорема 2. *Пусть* $L=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i D_i P_i D_i$, *где* $n=2^k$ *и k- целое число, большое 1. Пусть , кроме того,* $\lim_{k\to\infty} P_0(x)/x^t=\infty$ *для всех* $t>\frac{2n}{n-1}$. *Предположим, что все функции* $P_i(x)$ $i=1,2,\dots,n)$ *неотрицательны и бесконечно-дифференцируемы на* $[a,\infty)$, *а* $P_0(x)\ge b_2>0$ *на* $[a,\infty)$ *для некоторых чисел* b_1 *и* b_2. *Если* $M=\sum_{i=0}^{n} q_i D^i$, *где* $q_i(x)$ *бесконечно-дифференцируемы на* $[a,\infty)$ *и* $q_i=O(P_i^{1/2}+1)$ *при достаточно больших x, то оператор* $L+M$ *обладает свойством* (β_1), *где* L_F*-расширение Фридрихса выражения L в пространство* $L_2[a,\infty)$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что L_F является дискретным оператором в $L_2[a,\infty)$.

Собственные значения этого оператора обозначим через λ_j $(j=1,2,..)$. Из теоремы 1 следует, что

$$\lambda_j\ge c_1,\quad j^{2m}/(t+2n), \qquad (1)$$

где $c_1=const$.

Покажем, что оператор $ML_F^{-1/2}$ ограничен. Для этого достаточно показать, что операторы $(q_iD^i)L_F^{-1/2}$ $(i=0,1,\dots,n)$ ограничены.

При каждом фиксированном i функция q_iD^i умножается на финитную бесконечно дифференцируемую функцию. Тогда $q_iD^iL_F^{-1/2}$ также ограничен как произведение ограниченной C^∞-функции на C^∞-функцию. Можем считать, что функции $q_i(x)$ тождественное не равны нулю на $[a,\infty)$.

Действительно , если $u\in D(L_F)$ и

$$\|u\|_1\overset{def}{=}\sum_{i=0}^{n}\left\|P_i^{1/2}D^iu\right\|^2,$$

то используя условия теоремы на функции q_i, можно показать, что

$$\|Mu\|\le c_2\|u\|_1, \qquad (2)$$

где $\|\cdot\|$ понимается в смысле $L_2[a,\infty)$ и $c_2=const$.

С другой стороны, имеем

$$\|u\|_1=(Lu,u)=\left\|L_F^{1/2}u\right\|^2$$

Отсюда, учитывая (2), получим

$$\|Mu\|\ \le c_2\left\|L_F^{1/2}u\right\|^2$$

Но так как $L_F^{1/2}(D(L_F))$ всюду плотно в $L_2[a,\infty)$, то отсюда получим, что оператор $ML_F^{1/2}$ ограничен в $L_2[a,\infty)$.

Теперь к оператору $L_F + M$ применим общую теорему 4 из [3]. В нашем случае $\alpha = \frac{1}{2}$.

Учитывая (1), проверим условие 2) теоремы 4 из [3]

$$\lim_{j\to\infty}\frac{j}{\lambda_j^{1/2}} \le \frac{1}{c_1}\lim_{j\to\infty}\frac{j}{\lambda_j^{1/2}} \le \frac{j}{[j^{2tk_0}/(t+2k_0)]^{1/2}} = \frac{1}{c_1}\lim_{j\to\infty}\frac{1}{j^{tn/(t+2n)-1}} = 0,$$

так как $t > \frac{2n}{n-1}$.

Итак, оператор $L_F + M$ обладает своиством (β_2).

Теорем доказана.

Отметим, что в указанных выше теоремах функции могут быть комплекснозначными.

Теорема 3. *Пусть* $L = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i D^i p_i D^i$, *где* $n = 2^k$ *определен на интервале* $[a,\infty)$, $a > 0$.

Пусть, кроме того, каждый p_i является конечной суммой действительных степеней по x с действительными коэффициентами, неотрицателен и $P_n \ge b_1 > 0$, $P_0 \ge b_2 > 0$ для некоторых чисел b_1 и b_2. Пусть z степень функции P_0 и $t = \frac{z}{n}$. Предположим, что степень $P_i \le (n-1)t$ для каждого $i (i = 1,2,\dots,n)$. Обозначим $\alpha = 2tn/(t+2n)$ и пусть $\alpha \ge 3$. Если $M = \sum_{i=0}^{2^{k-k_0}} q_i D^i$, где k_0 такой номер, что $2^{k_0} > \frac{\alpha}{\alpha - 2}$, q_i -бесконечно-дифференцируемые комплекснозначные функции на $[a,\infty)$ и

$$q_i(x) = O\left(x^{(n-2^{k_0}i)/2^{k_0}} + 1\right)$$

при достаточно больших x, то $L_F + M$ обладает свойством (β_1).

Доказательство. Из условии теоремы следует, что L_F является дискретным положительно –опеределенным самосопряженным оператором. Его собственные значения обозначим через $\lambda_m (m = 1,2,\dots)$. Из теоремы 1 следует, что

$$\lambda_m \ge c_1 m^\alpha \quad (c_1 = const)$$

при достаточно больших m.

Покажем, что $ML_F^{-\frac{1}{2^{k_0}}}$ ограниченный оператор. Для этого достаточно показать, что $(q_i D_i) L_F^{-1/2^{k_0}}$ ограниченный оператор для каждого i. Не теряя обшности, можем предполагать, что все q_i тождественно не обрашаются в нуль.

Рассмотрим следуюшие дифференциальные выражения

$$N_1 = L,$$

$$N_{m+1} = \sum_{i=0}^{2^{k-m}} (-1)^i D^i \left(x^{(n-2^m i)t/2^m} \right) D^i, \quad m = 1,2,\ldots,k .$$

Нетрудно показать, что

$$\|N_1 u\| \le K_1 (N_1 u, u)^{1/2} = K_1 (Lu, u)^{1/2} = K_1 \|L_F^{1/2} u\| \qquad (K_1 = const).$$

Кроме того, при $i = 2,3,\ldots 2^{n-m}$ имеем

$$\|N_{i+1} u\| \le K_i (N_i u, u)^{1/2} = K_i \|L_F^{1/2} u\|, \qquad K_i = const \quad (i = 2,3,\ldots,2^{k-m}).$$

Из результатов Кауффмана [2] следует, что

$$\|Mu\| \le K' \|L_F^{-1/2^{k_0}} u\| \qquad (K' = const).$$

Итак,

$$\|ML_F^{1/2^{k_0}} u\| \le const$$

Обозначим $p = 2^{-K_0}$. По условию теоремы $p < \frac{\alpha - 2}{\alpha}$. Тогда $\alpha(1-p) > 2$.

Кроме того,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m}{\lambda_m^{1-p}} \le c \lim_{m\to\infty} \frac{m}{m^{\alpha(1-p)}} = c \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m^{\alpha(1-p)-1}} = 0,$$

где $c = const$.

Применяя теоремы 4 из [3], получим утверждение настояшей теоремы.

Теперь рассмотрим полиноминальные дифференциальные операторные пучки.

Теорема 4. *Пусть* $L = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i D^i p_i D^i$, *где* $n = 2^k$ *и к- целое число, большое 1.*

Пусть, кроме того ,

$$\lim_{x\to\infty} p_0(x)\Big|_{x^t} = \infty$$

для всех $t > \frac{2n}{n-1}$. *Предположим, что все функции* $p_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$ *неотрицательны и бесконечно-дифференцируемы на* $[a,\infty)$, *а* $p_n(x) \ge b_1$ *и* $p_0(x) \ge b_2 > 0$ *на* $[a,\infty)$ *для некоторых чисел* b_1 *и* b_2. *Если* $M_j = \sum_{i=0}^{n} q_{ij} D^i$, $j = 1,2$, *где* q_{ij} $(i = 0,1,\ldots n)$ – *комплекснозначные дифференцируемые функции на* $[a,\infty)$ *и*

$$|q_{ij}| = O\left(p_i^{1/2} + 1\right)$$

при достаточно больших x, то опрераторный пучок

$$L_F - M_1 - \lambda M_2 - \lambda^2 I$$

обладает своиствои (β_2).

Доказательство. Не треяя обшности, будем считать, что дискретный оператор L_F ограниченно-обратим.

В нашем случае $p = \frac{1}{2}$. Тогда как показано в теореме3, замыкание оператора $M_j L_F^{-1/2}$ $(j = 1,2)$ является ограниченным оператором в $L_2[a,\infty)$. Кроме того, из этой теоремы следует, что

$$\lim \frac{m}{\lambda_m^{1/2}} = 0,$$

так как $t > 2n/(n-1)$. Тогда по теореме 4 из [3] операторный пучок

$$L_F - M_1 - \lambda M_2 - \lambda^2 I$$

обладает своиством (β_2).
Этим теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть* $L = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i D^i p_i D^i$, *где* $n = 2^k$ *определей на интервале* $[a,\infty)$, $a > 0$. *Пусть, кроме того, каждая функция* p_i *является конечной суммой действительных степеней по x с действительными , коэффициентами неотрицательна и* $p_n \geq b > 0$, $p_0 \geq b_2 > 0$ *для некоторых чисел* b_1 *и* b_2.

Пусть z- степень функции p_0 *и* $t = z/n$. *Предположим, что степень* $p_i \leq (n-i)t$ *для каждого* i $(i = 1,2,\ldots,n)$. *Обозначим* $\alpha = 2tn/(t+2n)$ *и пусть* $\alpha \geq 3$. *Если* $M_j = \sum_{i=0}^{2} q_{ij} D^i$, $j = 1,2$, *где* k_0 *такой номер, что* $2^{k_0} > \frac{\alpha}{\alpha - 2}$ *и* q_{ij} – *дифферен-цируемые функции на* $[a,\infty)$ *и*

$$\left|q_{ij}\right| = O\left(x^{(n-2^{K_0}i)t/2^{K_0+1}}\right) \qquad (j = 1,2)$$

при достаточно больших x, то пучок

$$L_F - M_1 - \lambda M_2 - \lambda^2 I$$

обладает своиством (β_2).

Доказательство. Не теряя общности, будем считать, что дискретный оператор L_F ограниченно- обратим.

Обозначим $p = \frac{1}{2^{K_0}}$, где k_0 – натуральное число из предыдушей теоремы.Тогда из того, что

$$M_j L_F^{-1/2} = M_j L_F^{-p} L_F^{-(1/2-p)}$$

то

$$M_j L_F^{-1/2} \in \sigma_\infty, \quad j = 1,2,\ldots$$

Рассмотрим уравнение

$$L_F x - M_1 x - \lambda M_2 x - \lambda^2 x = f$$

где f-заданный элемент.

Обозначим $y = L_F x$. Тогда имеем

$$y - M_1 L_F^{-1} y - \lambda M_2 L_F^{-1} y - \lambda^2 L_F^{-1} y = f.$$

Рассмотрим операторы $M_j L_F^{-1}$ $(j=1,2)$:

$$M_j L_F^{-1} = M_j L_F^{-1/2} L_F^{-1/2} = A_j S^{\gamma+1},$$

где $A_j = M_j L_F^{p} \in \sigma_\infty$, $\gamma = \dfrac{1}{2} - p$, $S = L_F^{-1/2}$.

Тогда пучок

$$I - M_1 L_F^{-1} - \lambda M_2 L_F^{-1} - \lambda^2 L_F^{-1}$$

представляется в виде

$$S(\lambda) = I - A_1 S^{\gamma+1} - \lambda A_2 S^{\gamma+1} - \lambda^2 S^2.$$

Для пучка $S(\lambda)$ проверим условия теоремы 4 из [4].

Как выше показали $A_j \in \sigma_\infty$ $(j=1,2)$.

Кроме того,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m}{\lambda_m^{\gamma}} \le \lim_{m\to\infty} \frac{m}{m^{\alpha\gamma}} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m^{\alpha\gamma-1}} = 0,$$

так как из условия $\dfrac{\alpha-2}{2\alpha} > p$ следует, что

$$\alpha\gamma - 1 = \alpha\left(\frac{1}{2} - p\right) - 1 > 0.$$

Теорема доказана.

Литература

[1]. Дж.Э.Аллахвердиев, А.М., Ахмедов. Матем .сборник. т. 180. №5,1989.с.603-624.
[2]. R.M.Kauffman. Proc.London Math .Soc., (3)40. 1980, p.476-506.
[3]. А.М.Ахмедов. ДАН СССР .т.293, 1987, №3.
[4]. А.М.Ахмедов. ДАН СССР .т.292, 1987, №5.

Əhmədov Ə.M. **BƏZİ SİNİF DİFERENSİAL OPERATORLARIN MƏXSUSİ VƏ QOŞMA FUNKSİYALARININ $L_2[a,\infty)$ FƏZASINDA ŞƏRTSİZ COXQAT YIĞILMASI HAQQINDA**

İşdə $L_2[a,\infty)$ fəzasında bir sinif öz-özünə qoşma olmayan diferensial operatorlar üçün ayrılış teoremləri isbat olunmuşdur. Alınan nəticələr məlum nəticələrlə müqayisədə yenidirlər.

Akhmedov A.M.

ON MULTIPLE UNCONDITIONAL EXPANSIONS IN THE SUSTEM OF EIGENFUNCTIONS AND ASSOCIATED FUNCTIONS OF SOME CLASS DIFFERENTIAL OPERATORS IN $L_2[a,\infty)$

In this work the expansion theorems for some class nonself-adjoint differential operators in $L_2[a,\infty)$ are proved. Note that the obtaining results are new than the corresponding known results before.