1997 ТОМ VI(XIV)

УДК 517.518

ШАФИЕВ М.Ф.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО, СВЯЗАННОЕ С μ-АНИЗОТРОПНОЙ МАКСИМАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ ХАРДИ-ЛИТТЛВУДА

Пусть $R^n - n-$ мерное эвклидово пространство, $x=(x_1,\dots,x_n)$, $\xi = =(\xi_1,\dots,\xi_n)$- векторы в R^n, $x\cdot\xi = x_1\xi_1+\dots+x_n\xi_n$, $|x|=(x\cdot x)^{1/2}$, $R_0^n = = R^n|\{0\}$, $\sum = \{x\in R^n : |x|=1\}$

Рассмотрим действительную $(n\times n)$- матрицу A с собственными числами λ_j, $\operatorname{Re}\lambda_j>0$ и $\gamma = trA$ - след матрицы (см. [1]). Матрица A определяет однопараметрическую группу $A_t=\exp(A\ln t)$, $t\in R_+ = \{\tau\in R;\tau\}$, невырожденных преобразований пространства R^n. Через $\operatorname{diag}\{l_1,\dots,l_n\}$ будем обозначать матрицу с числами $l_1,\dots,l_n$ на главной диагонали и нулевыми недиагональными элементами. С группой A_t связана гладкая в R_0^n. A_t - однородная метрика

$$\rho : R_0^n \to R_+,\quad \rho(A_t x) = t\rho(x)$$

Если $x\in R^n$ и $r>0$, то шаром (сферой) с центром в точке x и радиусом $r>0$ называется множество

$$B(x,r)=\{y:\rho(x-y)\le r\}\quad (S(x,r)=\{y:\rho(x-y)=r\}).$$

Через $L_p(R^n)$ обозначим пространство измеримых функций $f(x)$, $x\in R^n$ с конечной нормой

$$\|f\|_p \equiv \|f\|_{L_p(R^n)} = \left(\int_{R^n}|f(x)|^p dx\right)^{1/p},\quad 1\le p<\infty$$

при $p=\infty$ имеется в виду обычная модификация.

Пусть функция $\mu(r)$, определенная на $(0,\infty)$, положительная и монотонно возрастающая. Будем предполагать, что она стремится к нулю при $r\to 0$ и к бесконечности при $r\to\infty$. Для локально суммируемой функции $g(x)$, $x\in R^n$ рассмотрим следующую анизотропную μ максимальную функцию Харди- Литтлвуда

$$M_\mu(g)(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{\mu(r)}\int_{B(x,z)}|g(y)|dy$$

при $\mu(r) = c_n \cdot r^\gamma$, M_μ превращается в максимальную функцию

$$Mf(x) = (Mf)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy,$$

а при $\mu(r) = \frac{\Omega_n}{n} \cdot r^n$ и $A = diag\{1, \dots 1\}$.

M_μ - превращается в обычную максимальную функцию. (Здесь Ω_n есть площадь единичной сферы в R^n).

Пусть $\varphi \in L_1(R_n)$, $\int\limits_{R^n} \varphi(x) dx = a_0 < \infty$, $\psi(x) \sup |\varphi(y)|$ при $\rho(y) \geq \rho(x)$.

Очевидно, что функция $\psi(x)$, $x \in R^n$ фактически зависит от $\rho(x)$. Поэтому мы в дальнейшем часто будем пользоваться обозначением

$$\widetilde{\psi}(t) = \psi(x) \qquad \text{при} \qquad \rho(x) = t$$

На функцию $\widetilde{\psi}(r)$, $r \geq 0$ будем налагать следующее условие

$$\mu(r) \cdot \widetilde{\psi}(r) \to 0 \qquad \text{при} \qquad r \to 0 \text{ и } r \to \infty \tag{1}$$

Теорема. *Если* $\mu(r), \varphi(r)$ *и* $\widetilde{\psi}(r)$ *определены как выше и удовлетворяется условие (1), то имеет место оценка*

$$\int\limits_{R^n} |g(x)\varphi(x)| dx \leq M_\mu(g)(0) \int_0^\infty \widetilde{\psi}(r) \cdot \mu'(r) dr. \tag{2}$$

Замечание. Очевидно, что *(2)* можно написать и в таком виде

$$\int\limits_{R^n} |g(x)\varphi(x)| dx \leq \frac{1}{s} M_\mu(g)(0) \int\limits_{R^n} \psi(x) \cdot \frac{\mu'(\rho(x))}{[\rho(x)]^{\gamma-1}} dx.$$

Доказательство. Если от декартовых координат перейти к обобщенным полярным координатам $x = A_t \theta$, где $\rho(x) = t$, $\rho(\theta) = 1$, то $dx = t^{\gamma-1} dt d\sigma(\theta)$, $d\sigma(\theta) = |(A\theta, \theta)| d\theta$ (см.[1]). Тогда имеем

$$\int\limits_{R^n} |g(x)\varphi(x)| dx \leq \int\limits_{R^n} |g(x)| \cdot \psi(x) dx = \int_0^\infty t^{\gamma-1} \left\{ \int_{\rho(\theta)=1} |g(A_t \theta)| \cdot \widetilde{\psi}(g(A_t \theta)) \cdot d\sigma(\theta) \right\} dt$$

и учитывая ρ - радиальность функции $\psi(x)$, будем иметь

$$\int\limits_{R^n} |g(x)\varphi(x)| dx \leq \int_0^\infty t^{\gamma-1} \widetilde{\psi}(t) \cdot \left\{ \int_{\rho(\theta)=1} |g(A_t \theta)| \cdot d\sigma(\theta) \right\} dt \tag{3}$$

Обозначим

$$\lambda(t) = \int_{\rho(\theta)=1} |g(A_t \theta)| d\sigma(\theta) \qquad \text{и} \qquad \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau) \tau^{\gamma-1} d\tau$$

Тогда нетрудно видеть, что

$$\Lambda(t) = \int_{\rho(\theta) \leq t} |g(x)| dx$$

Из *(3)* имеем

$$\int\limits_{R^n} |g(x)\varphi(x)| dx \leq \int_0^\infty t^{\gamma-1} \widetilde{\psi}(t) \lambda(t) dt = \int_0^\infty \widetilde{\psi}(t) d\Lambda(t) =$$

$$= \widetilde{\psi}(t) \cdot \Lambda(t) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \Lambda(t) d(-\widetilde{\psi}(t)) \tag{4}$$

Так как

$$\Lambda(t) \le M_\mu(g)(0) \cdot \mu(t),$$

то учитывая условие *(1)*, получаем, что

$$\Lambda(t) \cdot \widetilde{\psi}(t) \to 0 \qquad \text{при} \qquad t \to 0 \text{ и } t \to \infty$$

Тогда из *(4)* имеет

$$\int_{R^n} |g(x)\varphi(x)| dx \le M_\mu(g)(0) \int_0^\infty \mu(t) \cdot d(-\widetilde{\psi}(t)) = M_\mu(g)(0) \cdot \{-\mu(t)\widetilde{\psi}(t)|_0^\infty +$$

$$+ \int_0^\infty \widetilde{\psi}(t) \cdot \mu'(t) dt\} = M_\mu(g)(0) \int_0^\infty \widetilde{\psi}(t) \cdot \mu'(t) dt.$$

Теорема доказана.

Следствие 1.

$$\int_{R^n} |g(x^0 - x)\varphi(x)| dx \le M_\mu(g)(x^0) \int_0^\infty \widetilde{\psi}(t) \mu'(t) \cdot dt \tag{5}$$

(5) получается из (2) при помощи замены функции $g(x)$ *на функцию* $g(x^0 - x)$, *где* $x^0 \in R^n$ *фиксированная точка.*

Следствие 2. *Если* $\mu(t) = \dfrac{t^{\gamma+\alpha}}{\gamma+\alpha}$, $\alpha \ge 0$, *то*

$$\int_{R^n} |g(x^0 - x)\varphi(x)| dx \le M_\mu(g)(x^0) \int_0^\infty \widetilde{\psi}(t) t^{\gamma-1+\alpha} dt \tag{6}$$

Оценки (5) и (6) применяются для нахождения порядка сходимости семейств сингулярных интегралов, зависящих от некоторых параметров.

Оттметим, что теорема в случае $a = diag\{a_1, \ldots, a_n$ содержит соответствующий результат из [2].

Выражаю благодарность проф. В.С. Гулиеву за оказанную помощь и обсуждения.

Литература

[1]. Гулиев В.С. *Двухвесовые неравенства для интегральных операторов в* L_p *- пространствах и их приложения.* Тр. МИАН СССР, 1993, т. 204, с. 113-135.

[2]. Шафиев М.Ф. *Обобщенный вариант максимальной функции Харди- Литтлвуда и его применения к вопросам аппроксимации.* Деп. ВИНИТИ, 1986, №1542, В86.

Şafiyev M.F.

XARDİ- LİTTLVUDUN μ - ANİZOTROP MAKSİMAL FUNKSİYASI İLƏ BAĞLI İNTEQRAL BƏRABƏSİZLİK

Məqalədə Xardi- Littlvudun μ - anizotrop maksimal funksiyası ilə bağlı inteqral bərabərsizlik alınmışdır.

Shafiev M.F.

INTEGRAL INEQUALITIES CONNECTED WITH HARDY- LITTLEWOOD'S μ - ANISOTROPIC MAXIMAL FUNCTION

Integral inequality connected with Hardy- Littlewood's μ - anisotropic maximal function is obtained in the paper.