УДК 517.977

ЯГУБОВ Г.Я., МУСАЕВА М.А.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ В НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА

В данной работе исследуются вопросы корректности постановки задачи оптимального управления потенциальной функцией в нелинейном уравнении Шредингера и необходимых условий оптимальности. Такие задачи часто встречаются в нелинейной оптике, теории сверхпроводимости и в других областях современной физики [1]. Ранее подобные задачи в других постановках изучены, например, в работах [2-4].

Пусть D - ограниченная область евклидово пространства E^3, Γ - граница области с, которая предполагается достаточно гладкой, $T>0$ -заданное число, $0\le t\le T$, $\Omega_t = D\times(0,t)$, $\Omega=\Omega_T$, $S=\Gamma\times(0,T)$, $x=(x_1,x_2,x_3)$- произ-вольная точка области D, $C^0([0,T],B)$- банахово пространство, состоящее из всех определенных и непрерывных на $[0,T]$ функций со значениями в банаховом пространстве B, $W(\Omega)\equiv\left\{\psi:\psi\in L_\infty\left(0,T;W_2^2(D)\right),\ \dfrac{\partial\psi}{\partial t}\in L_\infty\left(0,T;L_2(D)\right)\right\}$, пространства $L_p(D)$, $L_\infty(0,T;B)$, $W_p^k(D)$, $W_p^{k,m}(\Omega)$, $p\ge 1$, $k,m\ge 0$, определены, например в [5,6], символ $\overset{\circ}{\forall}$ означает, что данное свойство имеет место почти для всех значений переменной величины.

Рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$J_\alpha(v)=\|\psi(\cdot,T)-y\|^2_{L_2(D)}+\alpha\|v-w\|^2_{W_2^{1,1}(\Omega)} \tag{1}$$

на множестве $V\equiv\left\{v: v=v(x,t),\ v\in W_2^{1,1}(\Omega),\ |v(x,t)|\le b_0,\ \left\|\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right\|_{E_3}\le b_1,\ \left|\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right|\le b_2,\ \overset{\circ}{\forall}(x,t)\in\Omega\right\}$ приусловиях

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j^2}-v(x,t)\psi+ia_1|\psi|^2\psi=f(x,t) \tag{2}$$

$$\psi(x,0)=\varphi(x),\quad x\in D,\quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|_S=0 \tag{3}$$

где $i = \sqrt{-1}$, $\alpha \geq 0$, a_0, $a_1 > 0$, $b_i > 0$, $i = 0,1,2$ - заданные числа, $\varphi \in W_2^2(D)$, $\left.\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right|_S = 0$, $f \in W_2^{1,1}(\Omega)$ - заданные функции, ν - направление внешней нормали границы Γ, $y \in L_2(D)$ - заданная функция, $w \in W_2^{1,1}(\Omega)$ - заданный элемент.

Ниже всюду перечисленные выше условия считаются выполненными.

Под решением краевой задачи *(2)*, *(3)* при заданном $v \in V$ будем понимать функциию $\psi(x,t)$, принадлежащую пространству $W(\Omega)$ и удовлетворяющую *(2)*, *(3)* для $\overset{\circ}{\forall}(x,t) \in \Omega$.

Методом Галеркина доказано, что краевая задача *(2)*, *(3)* имеет единственное решение идля этого решения справедлива оценка:

$$\|\psi\|_{W(\Omega)} \leq c_1 \left(\|\varphi\|_{W_2^2(D)} + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^3_{W_2^1(D)} + \|f\|^3_{W_2^{1,0}(\Omega)} \right) \tag{4}$$

где $c_1 > 0$ - постоянная.

Теорема 1. *При* $\alpha = 0$ *задача оптимального управления (1)-(3) имеет хотя бы одно решение.*

Доказательство теоремы проводится аналогично, как и в работах [3, 4].

При $\alpha > 0$ имеет место:

Теорема 2. *Сущетсвует плотное подмножество* G *из пространства* $W_2^{1,1}(\Omega)$ *такое, что для любого* $w \in G$ *при* $\alpha > 0$ *задача оптимального управления (1)-(3) имеет единственное решение.*

Теперь укажем необходимое условие в виде вариационного неравенства. Пусть $\Delta v \in W_2^{1,1}(\Omega)$- приращения на элементе $v \in V$ такое, что $v + \Delta v \in V$ и $\Delta\psi = \psi(x,t;v+\Delta v) - \psi(x,t;v)$. Из *(2)*, *(3)* следует, что функция $\Delta\psi = \Delta\psi(x,t)$ является решением следующей краевой задачи:

$$i\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + a_0 \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \Delta\psi}{\partial x_j^2} - (v + \Delta v)\Delta\psi + ia_1(\psi_\Delta + \psi)\overline{\psi}_\Delta \Delta\psi + ia_1\psi^2 \Delta\overline{\psi} = \Delta v \psi(x,t;v) \tag{5}$$

$$\Delta\psi(x,0) = 0, \quad x \in D, \quad \left.\frac{\partial \Delta\psi}{\partial \nu}\right|_S = 0 \tag{6}$$

где $\psi_\Delta = \psi(x,t;v+\Delta v)$, а $\psi(x,t;v)$- решение краевой задачи *(2)*, *(3)* соответствующее управлению $v \in V$.

При принятых предложениях относительно данных задачи *(2)*, *(3)*, как и в работе [3] можно установить справедливость оценок:

$$\|\Delta\psi(\cdot,t)\|_{L_2(D)} \leq C_2 \|\Delta v \psi\|_{L_2(\Omega)} \tag{7}$$

$$\left\|\frac{\partial \Delta\psi(\cdot,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(D)} + \|\Delta\psi(\cdot,t)\|_{W_2^2(D)} \leq C_3 \|\Delta v \psi\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} \tag{8}$$

для $\overset{\circ}{\forall} t \in (0,T)$, где $C_2, C_3 > 0$ - постоянные, независящие от Δv.

Пусть функция $\phi = \phi(x,t)$ является решением следующей сопряженной задачи:

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} + a_0\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j^2} - v(x,t)\phi - ia_1\left(2|\psi|^2\phi - \psi^2\overline{\phi}\right) = 0\,, \qquad (9)$$

$$\phi(x,t) = -2i(\psi(x,T) - y(x)), \quad x \in D, \quad \left.\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|_S = 0 \qquad (10)$$

где $\psi = \psi(x,t:v)$ - решение краевой задачи *(2)*, *(3)* при $v \in V$.

Под решением сопряженной задачи *(9)*, *(10)* будем понимать функцию $\phi(x,t)$ из пространства $C^0([0,T], L_2(D))$, которая является обобщенным решением из $C^0([0,T], L_2(D))$.

Доказано, что сопряженная задача имеет единственное решение из пространства $C^0([0,T], L_2(D))$ и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\phi(\cdot,t)\|_{L_2(D)} \le C_4\|\psi(\cdot,T) - y\|_{L_2(D)}, \qquad (11)$$

для любого $t \in [0,T)$, $C_4 > 0$ - некоторая постоянная.

Рассмотрим приращение функционала $J_0(v)$. Ясно, что оно представляется в ивде:

$$\Delta J_0(v) = J_0(v+\Delta v) - J_0(v) = 2\int_D \mathrm{Re}[(\psi(x,T) - y(x))\Delta\psi(x,T)]dx + \|\Delta\psi(\cdot,T)\|^2_{L_2(D)} \qquad (12)$$

С помощью краевых задач *(5)*, *(6)* и *(9)*, *(10)* можно установить справедливость равенства:

$$2\int_D [(\psi(x,T) - y(x))\Delta\psi(x,T)]dx = -\int_\Omega \mathrm{Re}(\psi\overline{\phi})\cdot\Delta v dxdt + R_1\,, \qquad (13)$$

где $R_1 = -\int_D \mathrm{Re}[\Delta\psi\overline{\phi}]\Delta v dxdt - \int_\Omega \left[\mathrm{Im}\left(2a_1|\Delta\psi|^2\psi\overline{\phi}\right) + \mathrm{Im}\left(2a_1(\Delta\psi)^2\overline{\psi}\overline{\phi}\right) + \right.$

$$\left. + \mathrm{Im}\left(a_1|\Delta\psi|^2\Delta\psi\overline{\phi}\right)\right]dxdt\,. \qquad (14)$$

Тогда имеет место:

Теорема 3. *Для любой функции* $W = W(x,t) \in W_\infty^{1,1}(\Omega)$ *справедливо выражения для вариации функционала* $J_0(v)$:

$$\delta J_0(v,W) = -\int_\Omega \mathrm{Re}[\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t)]W(x,t)dxdt \qquad (15)$$

где $\psi(x,t)$ *и* $\phi(x,t)$ *являются решениями задач (2), (3) и (9), (10) соответственно.*

Доказательство теоремы приводится с помощью соотношения *(13)* и оценок *(4)*, *(7)*, *(8)*, *(11)* с использованием формулы *(12)*.

Используя утверждение этой теоремы доказано необходимое условие в виде вариационного неравенства

Теорема 4. *Пусть* $V_* \equiv \left\{v^* : v^* \in V, J_0(v^*) = J_{0*} = \inf_{v\in V} J_0(v)\right\}$ *является множеством решений задачи оптимального управления (1)- (3) при* $\alpha = 0$. *Тогда в любой точке* $v^* \in V_*$ *выполняется условие:*

$$\int_{\Omega} \mathrm{Re}\left[\psi^*(x,t)\bar{\phi}^*(x,t)\right]\left(v(x,t)-v^*(x,t)\right)dxdt \le 0$$

при всех $v \in V$, где $\psi^*(x,t)$, $\phi^*(x,t)$ есть решения задач (2), (3) и (9), (10) при $v^* \in V_*$.

Получены результаты и при $\alpha > 0$.

Литература

[1]. ВоронцовМ.А., Шмальгаузен В.И. *Принципы адаптивной оптики.* М.: Наука, 1985. –336 с.

[2]. Искендоров А.Д., Ягубов Г.Я. –ДАН СССР. –1988. –Т. 303, №5. –С. 1044-1048.

[3]. Ягубов Г.Я., Мусаева М.А. *Дифференциальные уравнения.* –1997. –Т. 33, №12.

[4]. Ягубов Г.Я., Мусаева М.А. –Изв. АН Азерб., Сер. Физ. техн. и матем., 1994, т. XV, № 5-6, с. 58-61.

[5]. Лионс Ж.Л. *Управление сингулярными распределенными системами.* –М: Наука, 1987. –368 с.

[6]. Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики.* –М.: Наука, 1975.

Yaqubov Q.Y., Musayeva M.A.

QEYRİ XƏTTİ ŞREDİNGER TƏNLİYİNDƏ POTENSİAL FUNKSİYA İLƏ OPTİMAL İDARƏETMƏ

İşdə baxılan optimal idarəetmə məsələsinin qoyuluşunun korrektliyi tədqiq olunmuş, həllin varlığı və yeganəliyi üçün teoremlər isbat edilmişdir. Bundan başqa optimallıq üçün variasiya bərabərsizliyi şəklində zəruri şərt alınmışdır.

Yagubov G.Y., Musaeva M.A.

OPTIMAL CONTROL BY POTENTIAL FUNCTION IN NONLINEAR SHRÖDINGER EQUATION

For considering optimal control problem investigated quations of correctness of defination and necessary conditions of optimality.