УДК 539.3

АХУНДОВ М.Б., ГУЛИЕВ Р.С.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ПОВРЕЖДАЮЩЕМСЯ НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ТЕЛЕ.

В настоящее время большинство конструкций работает в условиях динамического нагружения. Проблема динамического нагружения конструкций одна из актуальных проблем механики. В данной работе рассмотрен удар о жесткую преграду и процесс распространения многомерных волн разрушения и деформаций при ударном нагружении однородных стержней конечной длины, поведение которых описывается моделью линейно- упругого повреждающегося тела с эффектом залечивания дефектов.

Определяющие уравнения имеют вид [1]:

$$2\mu\, э_{ij} = S_{ij} + L^{*}S_{ij} + M^{*}S_{ij}\ ,$$
$$3K\varepsilon = \sigma;\quad i;\ j = 1,2,3;$$

здесь $э_{ij}$, S_{ij} - девиаторы, а ε и σ - шаровые части тензоров деформаций и напряжений, соответственно; μ и K - мгновенные значения модуля сдвига и модуля объемного сжатия, L^{*} и M^{*} - оператор вязкого течения и оператор повреждаемости, так что

$$L^{*}S_{ij}(x_k,t) = \int_0^t L(t-\tau)S_{ij}(x_k,\tau)d\tau\ ;$$

$$M^{*}S_{ij}(x_k,t) = \begin{cases} H(x_k,t_n^{+});\ t \in (t_n^{+},t_{n+1}^{-}]; \\ H(x_k,t_n^{+}) + \int\limits_{t_{n+1}^{-}}^{t} M(t-\tau)S_{ij}(x_k,\tau)d\tau;\ t \in (t_{n+1}^{-},t_{n+1}^{+}]; \end{cases}$$

$$H(x_k,t_n^{+}) = \sum_{m=1}^{n} \Phi(\varepsilon_i(x_k,t_m^{+}))\int\limits_{t_m^{-}}^{t_m^{+}} M(t_m^{+}-\tau)S_{ij}(x_k,\tau)d\tau\ ;$$

$$L(t-\tau) = \frac{\lambda^{*}}{(t-\tau)^{\alpha}};\quad M(t-\tau) = \frac{\chi^{*}}{(t-\tau)^{\beta}};\quad (0 \le \alpha,\beta \le 1),$$

$(t_m^{-},t_m^{+}]$- интервалы времени, в которых идет процесс накопления повреждений, определяемый условием $\dot{\sigma}_i \ge 0$; ε_i и σ_i - соответственно, интенсивности деформаций и напряжений, Φ - функция залечивания дефектов, так что

$$\Phi(\varepsilon_i(x_k,t_m^{+})) = \begin{cases} 0; & \varepsilon_i(x_k,t_m^{+}) \le \varepsilon_i^{1} \\ 1; & \varepsilon_i(x_k,t_m^{+}) > \varepsilon_i^{1} \end{cases}$$

где ε_i^1 - предельная деформация, ниже уровня которой прявляется свойство залечивания дефектов.

Введем следующие безразмерные величины:

$$\frac{r}{L_0} \to r, \quad \frac{z}{L_0} \to z, \quad t \cdot \frac{c_{01}}{L_0} \to t, \quad \frac{\sigma_{ij}}{(\lambda_0 + 2\mu_0)\varepsilon_0} \to \sigma_{ij};$$

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0} \to \varepsilon_{ij}, \quad \frac{V_i}{C_{01}\varepsilon_0} \to V_i, \quad \lambda^*\left(\frac{c_{01}}{L_0}\right)^{\alpha-1} \to \lambda^*, \quad \chi^*\left(\frac{c_{01}}{L_0}\right)^{\beta-1} \to \chi^*,$$

где c_{01}-скорость распространения продольных упругих волн и $c_{01} = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$, ρ_0 - плотность материала в недеформированном состоянии, λ_0 и μ_0- коэффициенты Ламе, ε_0 - предел упругой деформаций, L_0- начальная длина цилиндрического бруса.

В качестве критерия разрушения примем: $\sigma_i + M^*\sigma_i = \sigma_{i0}$, здесь σ_{i0}- некоторая константа материала.

В безразмерных величинах система уравнений для процесса распространения волн будет:

$$\begin{cases}
V_{r,t} - \sigma_{rr,r} - \sigma_{rz,z} = \frac{1}{2}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}), \\
V_{z,t} - \sigma_{rz,r} - \sigma_{zz,z} = \frac{1}{r}\sigma_{rz}, \\
\sigma_{rr,t} - (\bar\lambda + 2\bar\mu)\cdot V_{r,r} - \bar\lambda V_{z,z} = \bar\lambda \cdot \frac{V_r}{r} - \frac{1}{3}T^*(2\sigma_{rr,t} - \sigma_{\varphi\varphi,t} - \sigma_{zz,t}), \\
\sigma_{\varphi\varphi,t} - \bar\lambda \cdot V_{r,r} - \bar\lambda \cdot V_{z,z} = (\bar\lambda + 2\bar\mu)\cdot \frac{V_r}{r} - \frac{1}{3}T^*(2\sigma_{\varphi\varphi,t} - \sigma_{zz,t} - \sigma_{rr,t}), \\
\sigma_{zz,t} - \bar\lambda \cdot V_{r,r} - (\bar\lambda + 2\bar\mu)\cdot V_{z,z} = \bar\lambda \cdot \frac{V_r}{r} - \frac{1}{3}T^*(2\sigma_{zz,t} - \sigma_{rr,t} - \sigma_{\varphi\varphi,t}), \\
\sigma_{rz,t} - \bar\mu \cdot V_{z,r} - \bar\mu \cdot V_{r,z} = -T_*(\sigma_{rz,t})
\end{cases}$$

здесь $T^* = L^* + M^*$,

$$\bar\lambda = \frac{\lambda}{\lambda_0 + 2\mu_0} = \eta \cdot \frac{\zeta \cdot \nu_0}{(1 - \nu_0)} \cdot \frac{(1 + \nu_0)\cdot(1 - 2\nu_0)}{(1 + \zeta \cdot \nu_0)(1 - 2\zeta \cdot \nu_0)}$$

$$\bar\mu = \frac{\mu}{\lambda_0 + 2\mu_0} = \frac{1}{2}\eta \cdot \frac{(1 - 2\nu_0)\cdot(1 + \nu_0)}{(1 - \nu_0)(1 + \zeta \cdot \nu_0)},$$

$$\eta = \frac{E}{E_0} \quad \text{или} \quad \eta = \begin{cases} 1; & \sigma_i + M^*\sigma_i < \sigma_{i0} \\ \eta'; & \sigma_i + M^*\sigma_i \ge \sigma_{i0} \end{cases}$$

$$\zeta = \frac{\nu}{\nu_0} \quad \text{или} \quad \zeta = \begin{cases} 1; & \sigma_i + M^*\sigma_i < \sigma_{i0} \\ \zeta'; & \sigma_i + M^*\sigma_i \ge \sigma_{i0} \end{cases}$$

$$\eta' = \frac{E'}{E_0}; \qquad \zeta' = \frac{\nu'}{\nu_0},$$

здесь $0,001 \le \eta' \le 0,1$; $0 \le \zeta' \le 1$; E_0 и ν_0 - модуль Юнга и коэффициент Пуассона до разрушения, E' и ν' - модуль Юнга и коэффициент Пуассона после разрушения, и E и ν - модуль Юнга и коэффициент Пуассона, λ и μ - мгновенные коэффициенты Ламе.

Начальные условия примем нулевыми:

$$V_r\big|_{t=0} = V_z\big|_{t=0} = \sigma_r\big|_{t=0} = \sigma_\varphi\big|_{t=0} = \sigma_z\big|_{t=0} = \sigma_{rz}\big|_{t=0} = 0$$

На левом торце бруса заданы напряжения:

$$\sigma_{zz}\Big|_{z=0} = \begin{cases} \sigma^*; & 0 < t \le t_0; \\ 0; & t > t_0; \end{cases} \qquad \sigma_{zr}\big|_{z=0} = 0$$

На боковой поверхности:

$$\sigma_{rr}\big|_{r=R} = 0; \qquad \sigma_{rz}\big|_{r=R} = 0;$$

где R - радиус круга поперечного сечения бруса.

На правом торце условия же контакта с абсолютно жесткой преградой имеет вид:

$$V_r\Big|_{z=L_0} = 0; \qquad V_z\Big|_{z=L_0} = 0$$

Ввиду осесимметричности задачи на оси симметрии, получим:

$$V_r\big|_{r=0} = 0; \quad \sigma_{rz}\big|_{r=0} = 0; \quad \sigma_{\varphi\varphi}\big|_{r=0} = \sigma_{rr}\big|_{r=0} .$$

Система уравнений представляет собой систему квазилинейных гиперболических уравнений и совместно с граничными, начальными условиями определяет математическую постановку решаемой задачи. Ввиду ее сложности предпочтительным является численный путь решения. Для ее реализации использована модификация устойчивой конечно-разностной схемы и основана на методе характеристик [2]. Построенная разностная схема может рассматриваться как вариант схемы Куранта- Изаксона- Рисса, и достаточное условие устойчивости имеет вид:

$$\frac{\delta t}{h} \le 1$$

где h - шаг по пространственной координате, δt - по временной.

В качестве основных значений параметров приняты следующие:

$$R/L_0 = 0,5; \eta = 1, \zeta = 1, \lambda^* = \chi^* = 0,6; \sigma_* = -0,05; \alpha = \beta = 0,8; \nu_0 = 0,35;$$

$$\sigma_{i0}/\sigma_0 = 2,5; \varepsilon_i^1 = 0,1; \delta t = h = \frac{1}{6},$$

здесь σ_0 - предел упругости.

Распределение напряжения σ_z по z приведены на рис.1а, для времен $t = 1$. С увеличением r, соответственно, максимумы профиля увеличиваются (сплошная, штриховая штрих-пунктирная линия соответствует, случаю $r = 0, r = \frac{1}{3}$ и $r = \frac{1}{2}$). На рис.1б приведено распределение радиального напряжения σ_r по r, для времен $t = 1$. С увеличением z, соответственно, максимумы профиля уменьшаются (сплошная и штриховая линия соответствует случаю $z = 0$ и $z = \frac{1}{2}$).

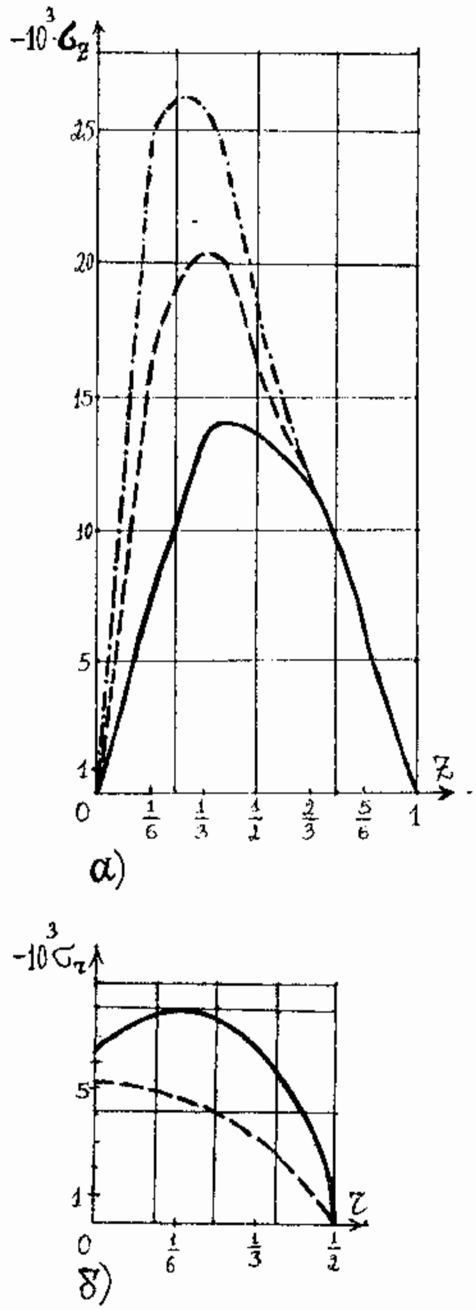

Рис. 1.

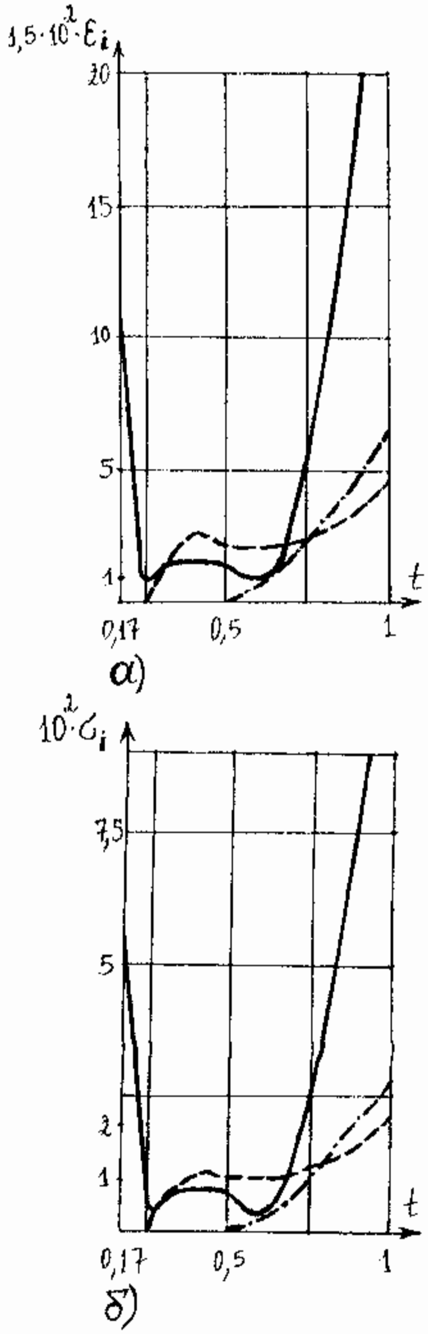

Рис. 2

На рис. 2а, 2б приведены, соответственно, зависимости интенсивности деформаций и напряжения от времени (сплошная, штриховая и штрих- пунктирная линия соответствует, точкам $r=0,\ z=0;\ r=\frac{1}{6}, z=\frac{1}{2}$ и $r=\frac{1}{2}, z=1$).

Литература

[1]. Суворова Ю.В., Ахундов М.Б. *Длительное разрушение изотропной среды в условиях сложного напряженного состояния.* Машиноведение, 1986, №4, с. 40-46.

[2]. Кондауров В.И., Кукуджанов В.Н. *Численное решение неодномерных задач динамики* упруго-*пластических сред.* В сб. "Избранные проблемы прикладной механики". М. ВИНИТИ, 1974, с. 421-433.

Axundov M.B., Quliyev R.S.

ZƏDƏLİ İRSİ-ELASTİKİ SİLİNDİRİK SİRİMDƏ ZƏRDƏ DALĞASININ YAYILMASI

Materialı özlü-elastiki və zədələnən olan bircins sonlu uzunluqlu silindirik tirin dinamik yüklənməsinə baxılmışdır. Özlülük və zədələnmə prosesləri irsi operatorlar vasitəsilə təsvir olunmuşdur. Həmçnin, defektlərin bərpası şərti də nəzərə alınmışdır. Məsələni riyazi olaraq xarakterizə edən kvazixətti hiperbolik diferensial tənliklər sistemi tərə xarakteristik metodun köməyi ilə bixarakteristik münasibətlərə gətirilərək sonlu-fərqlər üsulu ilə təqribi həll edilimişdir.

Akhundov M.B., Guliyev R.S.

A SPREADING OF PERCUSSION WAVE IN A DAMAGING HEREDITARY ELASTIC CYLINDRICAL BODY

We consider the percussion loading of homogeneous finite length rod, whose matrials arer linear tough-elastic and possess the property of damage. The processes of tough current and damage are described by hereditary operators. The condition of healing of defects is also taken into account. It has been assumed that the known damage criterion is fulfilled on the damage front. Solution of the system is reduced to the set of quasilinear equation, which are hyperbolic in a sense and whose right side contains heritage type integral terms. Numerical method has been employed to implement the alove solution.