УДК 539.4

ЗАМАНОВ А.Д., СОЛТАНОВА С.М.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОГО ТЕЛА, АРМИРОВАННОГО ОДИНОЧНЫМ ПРЯМЫМ ВОЛОКНОМ С ОБОЛОЧКОЙ

В классической и современной механике исследование задачи устойчивости всегда играло большую роль. Этой проблеме посвящены работы многих авторов.

Одним из важнейших в этом направлении являются задачи об устойчивости армированных волокнами композитных тел.

В работах [4, 5] исследована задача устойчивости одиночного волокна в упругой матрице. В работах [1, 2] проведено исследование устойчивости двух волокон в упругой матрице. Наличие оболочки у волокна с механической точки зрения имеет важное значение, ибо оно сильно влияет на параметры устойчивости волокна в матрице, например, на значения критической деформации. Но до сих пор наличие оболочки у волокна не учитывалось.

В данной работе на основе трехмерной линеаризированной теории устойчивости упругих тел исследован процесс устойчивости одиночного упругого волокна, имеющего оболочку из другого материала, в изотропной упругой матрице. При этом на контакте волокна и оболочки, а также оболочки и матрицы предполагаются непрерывными как усилия, так и перемещения. Следуя обозначениям, принятым в [6, 7], эти условия представляются в виде:

$$
\begin{aligned}
&P^{вол}_{\substack{r\\ \theta\\ 3}}\Big|_{r=a} = P^{обол}_{\substack{r\\ \theta\\ 3}}\Big|_{r=a}; \qquad && U^{вол}_{\substack{r\\ \theta\\ 3}}\Big|_{r=a} = U^{обол}_{\substack{r\\ \theta\\ 3}}\Big|_{r=a} \\
&P^{обол}_{\substack{r\\ \theta\\ 3}}\Big|_{r=a+h} = P^{м}_{\substack{r\\ \theta\\ 3}}\Big|_{r=a+h}; \qquad && U^{обол}_{\substack{r\\ \theta\\ 3}}\Big|_{r=a+h} = U^{м}_{\substack{r\\ \theta\\ 3}}\Big|_{r=a+h}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь приняты следующие обозначения: a - радиус волокна; h - толщина оболочки; P_r, P_θ, P_3 - проекции усилия на оси и, в свою очередь, U_r, U_θ, U_3 - радиальное, трансверсальное и осевое перемещения.

Для сжимаемых тел при малых докритических деформациях соотношения между усилиями и перемещениями имеют вид:

$$P_r=(a_{11}+\sigma_{11})\frac{\partial U_r}{\partial r}+a_{12}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U_2}{\partial\theta}+\frac{1}{r}U_r\right);$$

$$P_\theta=\mu_{12}\left[\left(1+\sigma_{11}\mu_{12}^{-1}\right)\frac{\partial U_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial\theta}-\frac{1}{r}U_\theta\right]; \tag{2}$$

$$P_3=\mu_{13}\left[\frac{\partial U_r}{\partial x_3}+\left(1+\sigma_{11}\mu_{13}^{-1}\right)\frac{\partial U_3}{\partial r}\right];$$

где $U_r=\frac{1}{r}\frac{\partial}{U_\theta}\Psi-\frac{\partial^2}{\partial r\partial x_3}\mathcal{X}$;

$$U_\theta=-\frac{\partial}{\partial r}\Psi-\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\,\partial x_3}\mathcal{X};$$

$$U_3=A\left(\Delta+B\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\mathcal{X}.$$

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \tag{3}$$

$$A=\frac{a_{11}}{a_{13}+\mu_{13}};\quad B=\frac{\mu_{13}+\sigma_{33}}{a_{11}}$$

Функции Ψ и X являются решением уравнений *(3)*, которые для матрицы представлены в виде:

$$\Psi=\gamma\sin\gamma\,x_3A_1K_1(\xi_1\gamma\,r)\sin\theta$$
$$\mathcal{X}=\cos\gamma\,x_3\left[B_1K_1(\xi_2\gamma\,r)+C_1K_1(\xi_3\gamma\,r)\right]\cos\theta; \tag{4}$$

для оболочки волокна:

$$\Psi^{(1)}=\gamma\sin\gamma\,x_3\left[A_1^{(1)}I_1\left(\xi_1^{(1)}\gamma\,r\right)+A_2^{(1)}K_1\left(\xi_1^{(1)}\gamma\,r\right)\right]\sin\theta$$
$$\mathcal{X}^{(1)}=\cos\gamma\,x_3\left[B_1^{(1)}I_1\left(\xi_2^{(1)}\gamma\,r\right)+B_2^{(1)}K_1\left(\xi_2^{(1)}\gamma\,r\right)+C_1^{(1)}I_1(\xi_3\gamma\,r)+\right.$$
$$\left.+C_2^{(1)}K_1\left(\xi_3^{(1)}\gamma\,r\right)\right]\cos\theta \tag{5}$$

для волокна:

$$\Psi^{(0)}=\gamma\sin\gamma\,x_3A_1^{(0)}I_1\left(\xi_1^{(0)}\gamma\,r\right)\sin\theta$$
$$\mathcal{X}^{(0)}=\cos\gamma\,x_3\left[B_1^{(0)}I_1\left(\xi_2^{(0)}\gamma\,r\right)+C_1\,I_1\left(\xi_3^{(0)}\gamma\,r\right)\right]\cos\theta; \tag{6}$$

где $I_n(x)$- функции Бесселя чисто мнимого аргумента;

$K_n(x)$- функции Макдональда;

A_n, $A_n^{(1)}$, $A_n^{(0)}$ и B_n, $B^{(1)}$, $B^{(0)}$- неизвестные постоянные;

$\gamma=\frac{\pi}{l}$, $\chi=\pi\,R/l$, χ - параметр волнообразования;

l- длина полуволны формы потери устойчивости;

$$\frac{\pi}{l}(a+h)=\frac{\pi}{l}a+\frac{\pi}{l}h=\chi+\chi_1$$

Значения величин A,B и постоянные ξ_i $(i=1,2,3)$ для второго варианта теория малых докритических деформаций взяты из [7].

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{33}^{м} = E^{м}\varepsilon, \quad \sigma_{33}^{обол} = E^{обол}\varepsilon, \quad \sigma_{33}^{вол} = E^{вол}\varepsilon.$$

Здесь $E^{м}$, $E^{обол}$, $E^{вол}$ - модули упругости матрицы, оболочки и волокна; ε - минимальное укорочение, которое мы называем критической деформацией [7].

В уравнениях *(2)* и *(3)* выражения для коэффициентов системы уравнения a_{11}, a_{12}, a_{13}; μ_{12}, μ_{13} определяются согласно [7].

Подставляя *(4), (5), (6)* последовательно в *(3)* и *(2),* решаем уравнение *(1),* после некоторых преобразований получаем систему двенадцати алгебраических уравнений с двенадцатью неизвестными постоянными. Тогда из условия существования нетривиальных решений получаем характеристическое уравнение в форме

$$\det\left\|\alpha_{ij}\right\| = 0, \qquad i,j = \overline{1,12} \qquad (7)$$

Ввиду громоздкости выражения для α_{ij} здесь не приводятся. Ввиду невозможности аналитического решения характеристического уравнения оно решалось численно. В таблице 1 приведены полученные значения критической деформации для различных значений толщины оболочки при $E^{вол} = 10^2 \cdot E^{обол}$, $E^{обол}/E^{м} = 50$. Как следует из данных, приведенных в этой таблице, с ростом толщины оболочки значения критической деформации уменьшаются. Нужно отметить, что это уменьшение незначительно при малости отношения $H\pi/l$. С ростом этого отношения значение критической деформации сильно понижается. Влияние отношения модулей упругости оболочки и матрицы на значение критической деформации определяется данными таблицы 2. Там принято $E^{вол} = 10^2 \cdot E^{обол}$, $H\pi/l = 0{,}25$. С ростом отношений $E^{обол}/E^{м}$ значение критической деформации увеличивается и при малых значениях этих отношений это увеличение более существенное.

Таблица 1.

$E^{вол} = 10^2 \cdot E^{обол}$, $E^{обол}/E^{м} = 50$.

$H\pi/l$	0.05	0.15	0.25	0.35	1.0	1.5	2.0	5.0
ε	0.08515	0.08484	0.08451	0.08416	0.07652	0.06102	0.04429	0.04124

Таблица 1'.

$E^{вол}/E^{обол} = 50$ и $E^{обол}/E^{м} = 2$.

$H\pi/l$	0.05	0.15	0.25	0.35	0.5	1.0	1.5	2.0	5.0
ε	0.09632	0.0948	0.0933	0.09248	0.08968 5	0.08968 82	0.0745	0.0684	0.04087

Таблица 2.

$E^{вол}/E^{обол} = 100$, $\dfrac{h}{r} = 0.25$

$E^{обол}/E^{м}$	5	10	20	50	100
ε	0.0780	0.0817	0.0844	0.0845	0.0848

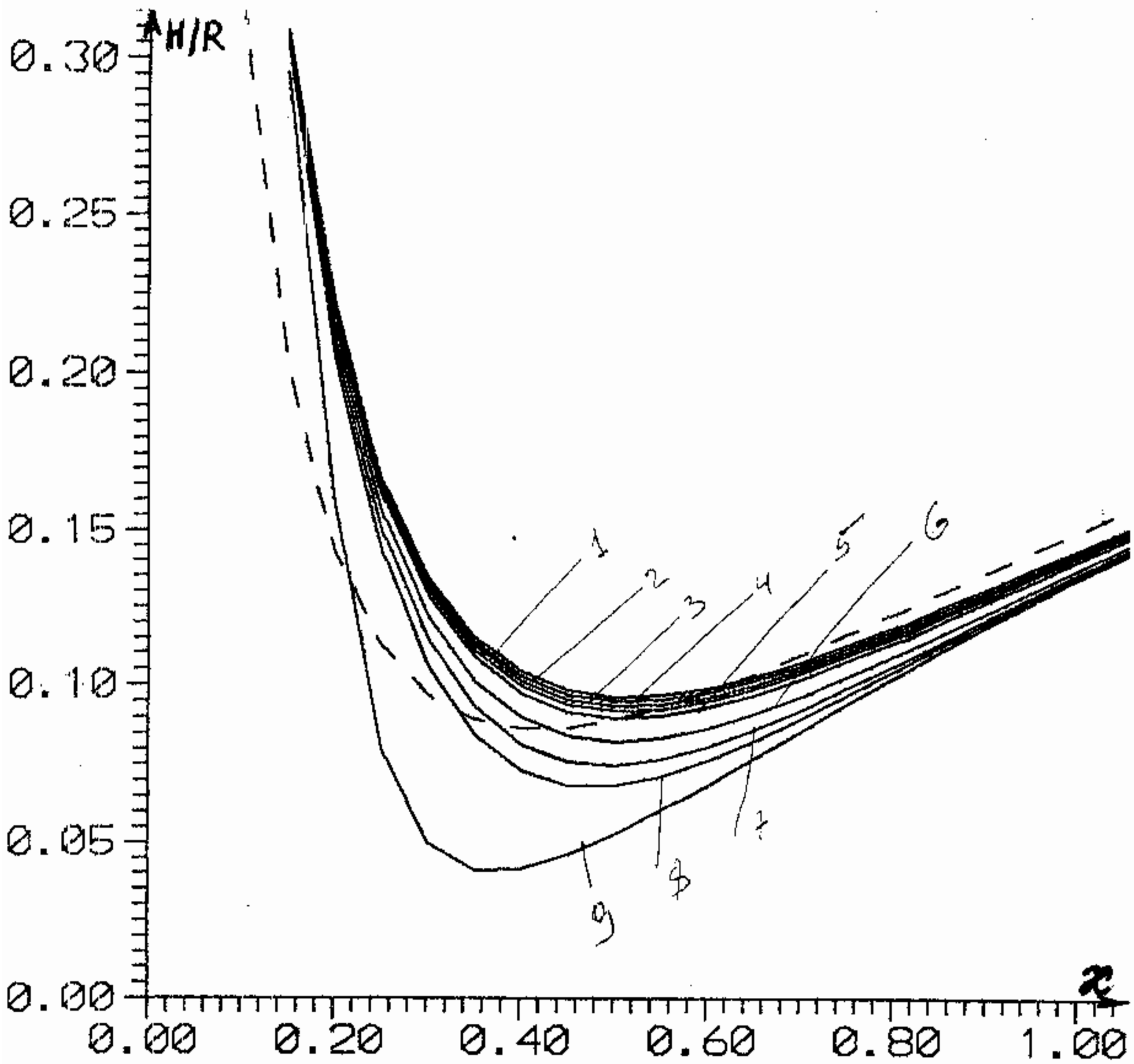
На рисунке приведены сравнительные графики зависимости критической деформации ε от относительной толщины оболочки H для различных отношений модулей упругости, построенные на основе данных таблиц 1, 1', а также других значений модулей упругости:

$$E^{вол}/E^{обол} = 50, \qquad E^{вол}/E^{м} = 5;\ 10;\ 20;\ 50.$$

$$E^{вол}/E^{обол} = 100, \qquad E^{вол}/E^{м} = 5;\ 10;\ 20;\ 50;\ 100.$$

$$E^{вол}/E^{обол} = 50, \qquad E^{вол}/E^{м} = 0{,}1;\ 0{,}5.$$

Для сравнения там же приведена кривая (пунктирная) для случая отсутствия оболочки у волокна.



Литература

[1]. Акбаров С.Д. *Об устойчивости двух волокон в матрице при малых деформациях.* Прикладная механика, 1981, т.XVII, В.6, с.129-131.

[2]. Акбаров С.Д. *О потере устойчивости двух волокон в упругой матрице при высокоэластических деформациях.* Прикладная механика, 1981, т. XVII, В.7, с. 30-35.

[3]. Бабич И.Ю.,Гузь А.Н. *К теории упругой устойчивости сжимаемых и несжимаемых композитных сред.* Механика полимеров, 1972, №2, с. 267-275.

[4]. Бабич И.Ю., Гузь А.Н. *Трехмерная задача об устойчивости волокна в матрице при высокоэластических деформациях.* Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1973, №3, с. 44-48.

[5]. Бабич И.Ю. *Об устойчивости волокна в матрице при малых деформациях.* Прикладная механика, 1973, т. 9, В. 4, с. 29-35.

[6]. Гузь А.Н. *О линеаризированных задачах теории упругости.* Прикладная механика, 1970, т. 6, В. 2, с.3-11.

[7]. Гузь А.Н. *Устойчивость трехмерных деформируемых тел.* К.: Наукова думка, 1971, с. 276.

[8]. Ватсон Дж.Н. *Теория бесселевых функций.* 4. I.- М.: ИЛ., 1949, с.798.

Soltanova S.M.

ÖRTÜKLÜ BİR DÜZ LİFLƏ ARMİRƏ OLUNMUŞ ELASTİKİ CİSMİN DAYANIQLIĞI

Məqalədə elastiki cisimlərin xəttirəşdirilmiş üçölçülü dayanıqlıq nəzəriyyəsi əsasında izotrop elastiki matrisdə digər materialdan olan bir elastiki lifin dayanıqlıq məsələsi tədqiq edilir.

Soltanova S.M.

ON STABILITY OF ELASTIC BODY, ARMOURED BY A SINGLE STRAIGHT FIBRE WITH A COVER

In this work on the base of three-dimensional linearized theory of stability of elastic bodies the process of stability of a single elastic fibre, which have a cover from the other material, in the izotrop elastic matrix has been investigated.