УДК 539.3

ИСАЕВ Ф.К., МУСАЕВ Р.М.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХСЛОЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК

Рассмотрим двухслойную прямоугольную пластинку, находящуюся под действием внешних нагрузок T_{11}, T_{22}, T_{12}. Материалы слоёв считаются непрерывно неоднородными и анизотропными. Координатная система выбрана следующим образом: оси OX и OY расположены в срединной плоскости, разделяющей слои пластинки, ось OZ - направлена перепендикулярна им.

Как известно [3] связь между компонентами напряжений и деформаций с учётом обобщенного закона Гука записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11}^{(i)} = a_{11}^{(i)}\varepsilon_{11} + a_{12}^{(i)}\varepsilon_{22} + a_{13}^{(i)}\varepsilon_{12} \quad ,\\
&\sigma_{22}^{(i)} = a_{21}^{(i)}\varepsilon_{11} + a_{22}^{(i)}\varepsilon_{22} + a_{23}^{(i)}\varepsilon_{12} \quad , \qquad\qquad (1)\\
&\sigma_{12}^{(i)} = a_{31}^{(i)}\varepsilon_{11} + a_{32}^{(i)}\varepsilon_{22} + a_{33}^{(i)}\varepsilon_{12} \quad , \qquad (i = 1,2).
\end{aligned}$$

Здесь предполагается, что упругие характеристики материала слоёв пластинки являются непрерывными функциями координат срединной плоскости и толщины и они представляются в следующем виде:

$$a_{ij}^{(k)}(x,y,z) = \alpha_{ij}^{(k)}(x,y)\cdot a_j^{(k)}(z), \quad (k = 1,2) \qquad (2)$$

Предположим, что гипотеза Кирхгофа-Лява справедлива по всей толщине элемента, т.е.

$$\varepsilon_{11} = l_{11} - z\chi_{11}, \quad \varepsilon_{22} = l_{22} - z\chi_{22}, \quad \varepsilon_{12} = l_{12} - z\chi_{12} \quad , \qquad (3)$$

где l_{11}, l_{22}, l_{12} и $\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}$ - соответственно бесконечно малые изменения деформации, кривизны и кручения срединной плоскости пластинки.

Как известно, компоненты усилий и моментов вычисляются по формулам:

$$T_{ij} = \int_{-h_2}^{0}\sigma_{ij}^{(2)}dz + \int_{0}^{h_1}\sigma_{ij}^{(1)}dz\,, \quad M_{ij} = \int_{-h_2}^{0}\sigma_{ij}^{(2)}zdz + \int_{0}^{h_1}\sigma_{ij}^{(1)}zdz \quad , \qquad (4)$$

здесь h_2, h_1 - толщины соответствующих слоёв.

С учётом *(1)-(3)* из *(4)* получим:

$$T_{11} = \alpha_{11}^2(x,y)A_{11}^0 l_{11} + \alpha_{12}^2(x,y)A_{12}^0 l_{22} + 2\alpha_{13}^2(x,y)A_{13}^0 l_{12} -$$

$$-\alpha_{11}^{2}(x,y)A_{11}^{1}\chi_{11}-\alpha_{12}^{2}(x,y)A_{12}^{1}\chi_{22}-2\alpha_{13}^{2}(x,y)A_{13}^{1}\chi_{12}\quad, \tag{5}$$

....

$$M_{11}=\alpha_{11}^{2}(x,y)A_{11}^{1}l_{11}+\alpha_{12}^{2}(x,y)A_{12}^{1}l_{22}+2\alpha_{12}^{2}(x,y)A_{13}^{1}l_{12}-$$
$$-\alpha_{11}^{2}(x,y)A_{11}^{2}\chi_{11}-\alpha_{12}^{2}(x,y)A_{12}^{2}\chi_{22}-2\alpha_{12}^{2}(x,y)A_{13}^{2}\chi_{12}\quad, \tag{6}$$

....

В этих формулах введены следующие обозначения:

$$A_{11}^{0}=\int_{-h_2}^{0}a_1^2(z)dz+\frac{\alpha_{11}^{1}}{\alpha_{11}^{2}}\int_{0}^{h_1}a_1^1(z)dz\,,$$

$$A_{11}^{0}=\int_{-h_2}^{0}a_1^2(z)zdz+\frac{\alpha_{11}^{1}}{\alpha_{11}^{2}}\int_{0}^{h_1}a_1^1(z)zdz\,, \tag{7}$$

$$A_{11}^{0}=\int_{-h_2}^{0}a_1^2(z)z^2dz+\frac{\alpha_{11}^{1}}{\alpha_{11}^{2}}\int_{0}^{h_1}a_1^1(z)z^2dz\,,$$

... .

Полная система уравнений равновесия состоит из следующих:

уравнения относительно усилий:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x}+\frac{\partial T_{12}}{\partial y}=0\,,\quad \frac{\partial T_{12}}{\partial x}+\frac{\partial T_{22}}{\partial y}=0\ ; \tag{8}$$

уравнения относительно моментов:

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2}+T_{11}\chi_{11}+2T_{12}\chi_{12}+T_{22}\chi_{22}=0\ ; \tag{9}$$

уравнения совместности деформации:

$$\frac{\partial^2 l_{11}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 l_{22}}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 l_{12}}{\partial x\partial y}=0\ . \tag{10}$$

Введём функцию напряжений ϕ соотношениями:

$$T_{11}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\,,\quad T_{22}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\,,\quad T_{12}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\ . \tag{11}$$

В этом случае система *(8)* удовлетворяется тождественно.

Для преобразования уравнений *(9)* и *(10)* к необходимому виду поступаем следующим образом: определяем l_{ij} из *(5)* с помощью T_{ij} и χ_{ij}, учитывая эти выражения в *(10)* получим уравнения совместности деформации. Подставляя выражения для l_{ij} в *(6)* и *(9)* получим уравнения относительно моментов. Таким образом в общем виде получается система двух дифференциальных уравнений четвёртого порядка с переменными коэффициентами относительно прогиба (w) и функции напряжения (ϕ). Из за громоздкости эти уравнения в общем виде здесь не приводятся.

Теперь рассмотрим различные конкретные случаи.

Пусть материалы слоёв являются ортотропными и упругие характеристики слоёв изменяются по закону:

$$a_{ij}^{(n)} = a_{ij}^{0n} \cdot \alpha(x,y) \cdot a^n(z) .$$

В этом случае имеет место:

$$a_{13}^i = a_{23}^i = a_{31}^i = a_{32}^i = 0 \ ; \quad A_{13}^i = A_{23}^i = A_{31}^i = A_{32}^i = 0 \ . \qquad (12)$$

Предположим, что функции неоднородности изменяются по следующему закону:

$$\alpha(x,y) \equiv 1; \quad a_1^2(z) = 1 + \mu_2 \frac{z}{h_2}, \quad a_1^1(z) = 1 + \mu_1 \frac{z}{h_1},$$

$$a_3^2(z) = 1 + \mu_{32} \frac{z}{h_2}, \quad a_3^1 = 1 + \mu_{31} \frac{z}{h_1} \ . \qquad (13)$$

При этом, для коэффициентов A_{ij}^n из *(7)* находятся следующие формулы:

$$A_{11}^0 = h_2\left(1 - \frac{\mu_2}{2}\right) + \frac{a_{11}^{01}}{a_{11}^{02}} h_1 \left(1 + \frac{\mu_1}{2}\right), \ A_1^0 = h_2\left(1 - \frac{\mu_2}{2}\right) + \frac{a_{12}^{01}}{a_{12}^{02}} h_1 \left(1 + \frac{\mu_1}{2}\right),$$

$$A_{11}^1 = h_2^2\left(\frac{\mu_2}{3} - \frac{1}{2}\right) + \frac{a_{11}^{01}}{a_{11}^{02}} h_1^2 \left(\frac{\mu_1}{3} + \frac{1}{2}\right), \ A_{12}^1 = h_2^2\left(\frac{\mu_2}{3} - \frac{1}{2}\right) + \frac{a_{12}^{01}}{a_{12}^{02}} h_1^2 \left(\frac{\mu_1}{3} + \frac{1}{2}\right),$$

$$A_{11}^2 = h_2^3\left(\frac{1}{3} - \frac{\mu_2}{4}\right) + \frac{a_{12}^{01}}{a_{12}^{02}} h_1^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{\mu_1}{4}\right), \ A_{12}^2 = h_2^3\left(\frac{1}{3} - \frac{\mu_2}{4}\right) + \frac{a_{12}^{01}}{a_{12}^{02}} h_1^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{\mu_1}{4}\right),$$

$$A_{12}^0 = A_{21}^0, \quad A_{12}^1 = A_{21}^1, \quad A_{12}^2 = A_{21}^2 \ . \qquad (14)$$

$$A_{22}^0 = h_2\left(1 - \frac{\mu_2}{2}\right) + \frac{a_{22}^{01}}{a_{22}^{02}} h_1 \left(1 + \frac{\mu_1}{2}\right), \ A_{22}^1 = h_2^2\left(\frac{\mu_2}{3} - \frac{1}{2}\right) + \frac{a_{22}^{01}}{a_{22}^{02}} h_1 \left(\frac{\mu_1}{3} - \frac{1}{2}\right),$$

$$A_{22}^2 = h_2^3\left(\frac{1}{3} - \frac{\mu_2}{4}\right) + \frac{a_{22}^{01}}{a_{22}^{02}} h_1^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{\mu_1}{4}\right), \ A_{33}^0 = h_2\left(1 - \frac{\mu_{32}}{2}\right) + \frac{a_{33}^{01}}{a_{33}^{02}} h_1 \left(1 + \frac{\mu_{31}}{2}\right),$$

$$A_{33}^1 = h_2^2\left(\frac{\mu_{32}}{3} - \frac{1}{2}\right) + \frac{a_{33}^{01}}{a_{33}^{02}} h_1^2 \left(\frac{\mu_{31}}{3} - \frac{1}{2}\right), \ A_{33}^2 = h_2^3\left(\frac{1}{3} - \frac{\mu_{32}}{4}\right) + \frac{a_{33}^{01}}{a_{33}^{02}} h_1^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{\mu_{31}}{4}\right).$$

В рассматриваемом случае система уравнений *(9)* и *(10)* после некоторых преобразований приводится к следующему виду:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{13} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + D_{21} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + D_{23} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} +$$

$$+ T_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2T_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \ , \qquad (15)$$

$$d_{11} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + d_{13} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + d_{12} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + d_{21} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + d_{23} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + d_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \ . \qquad (16)$$

Здесь коэффициенты d_{ij} и D_{ij} известным образом выражаются через жесткостные характеристики пластинки *(14)*.

Рассмотрим случай шарнирного закрепления краёв пластинки. В этом случае для прогиба (w) и функции напряжения (ϕ) примем следующие выражения:

$$w = w_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \ , \qquad (17)$$

$$\phi = \phi_0 \sin\frac{m\pi x}{a}\cdot \sin\frac{n\pi y}{b} \quad , \tag{18}$$

здесь m и n число полуволн вдоль соответствующих сторон. Подставляя *(17)* и *(18)* в *(15)* получим:

$$\phi_0 = -D_0 w_0\,;\, D_0 = \frac{d_{21}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + d_{23}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + d_{22}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4}{d_{11}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + d_{13}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + d_{12}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4} \quad . \tag{19}$$

При двустороннем сжатии прямоугольных двухслойных пластинок с учётом *(17)-(19)* из *(15)* для определения комбинаций критических нагрузок получим следующую формулу:

$$T_{11}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + T_{22}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = D_{11}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + D_{13}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + D_{12}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 -$$

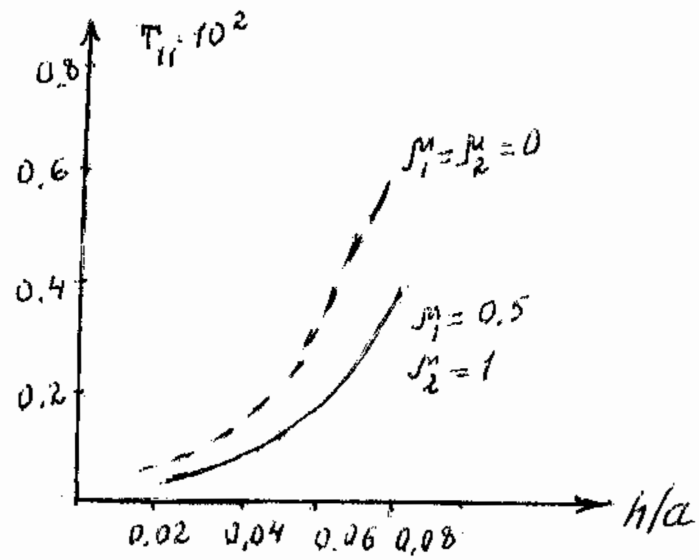
$$-D_0\left[D_{21}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + D_{23}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + D_{22}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4\right] \quad . \tag{20}$$

Если рассмотреть цилиндрический изгиб сжатой пластинки тогда из *(20)* можно получить:

$$T_{11} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 D_{11}\left(1 - \frac{d_{21}\cdot D_{21}}{d_{11}\cdot D_{11}}\right) \quad . \tag{21}$$

Непосредственной проверкой можно показать, что в частном случае $(h_1 = h_2,\ \mu_1 = \mu_2)$ из *(21)* получается известное классическое решение для изотропной пластинки [1].

При различных значениях характерных параметров произведены численные расчёты, определены жёсткостные характеристики двухслойных пластинок для различных вариантов и найдены критические нагрузки(рис. 1).



$E_{10}^{1}=5{,}7\cdot 10^{5}$	$E_{10}^{2}=5{,}2\cdot 10^{5}$	
$E_{20}^{1}=1{,}4\cdot 10^{5}$	$E_{20}^{2}=1{,}1\cdot 10^{5}$	$a=1$;
$G_{12}^{01}=0{,}57\cdot 10^{5}$	$G_{12}^{02}=0{,}40\cdot 10^{5}$	$b=2$
$\nu_{1}^{1}=0{,}277$	$\nu_{1}^{2}=0{,}25$	$h_1/h_2=2/3$
$\nu_{2}^{1}=0{,}25$	$\nu_{2}^{2}=0{,}22$	
$\mu_{32}=1$	$\mu_{32}=1$	

Рис.1

Литература

[1]. Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем.* М., Наука, 1967.
[2]. Ломакин В.А. *Теория упругости неоднородных тел.* М., Изд-во МГУ, 1978.
[3]. Лехтецкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела.* М., Наука, 1977.

İsayev F.K., Musayev R.M.

QEYRİ BİRCİNS ANİZOTROP LÖVHƏLƏRİN DAYANIQLIQLI HAQDA

Ümumi şəkildə qeyri biricins anizotrop materialdan hazırlanmış iki laylı düzbucağlı lövhələrin dayanaqlıq məsələsi tədqiq edilir. Məsələnin həlli üçün Bubnov-Qalyorkin üsulundan istifadə edilir.

Isayev F.K., Musayev R.M.

ON STABILITY OF NONHOMOGENEOUS ANISOTHROPIC PLATES

All basic relations and motion equations are obtained in a general form. Bubnov-Galerkins method is used in solving concrete problems. Solution of the problem on stability of rectengular plates made of nonhomogeneous orthotropic material is obtained.