1997 ТОМ VI (XIV)

УДК 539. 3.

КАСУМОВ А.К.

ОБ УЧЕТЕ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НЕЖЕСТКОГО СОЕДИНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ

Одной из причин широкого применения метода конечных элементов (МКЭ) является то, что этим методом можно рассчитывать конструкцию, состоящую из «разноразмерных» элементов. Например: конструкцию, состоящую из двух цилиндрических оболочек, соединенных между собой стержнями (соединение «двухмерных» элементов с «одномерным»). Такого типа конструкции встречаются в оптико-механической технике, когда сплошные пространственные элементы соединяются между собой одномерными-стрежнями. При расчете таких конструкций, одним из важных моментов является учет связи, осуществляющей совместность работы отдельных элеметов.С технологической точки зрения эта связь может быть разнообразной: сварка, болтовое соединение, пайка и т.д.[I]. Причем, каждый из типов связи так же может иметь свои разновидности, например, сварка может быть осуществлена точечно, используя «косынки»и т.д. С точки зрения надежности соединения, возможности взаимного перемещения, соединяемых элементов, связь характеризуется набором параметров. Число параметров зависит от технологии соединения и от постановки задачи. Из вышесказанного следует, что расчет узла соединения является самостоятельной задачей. Сложность этой задачи определяется, в определенной степени, точностью расчета констркуции. В самом деле, рассмотрим болтовые соединения двух элементов. Описание поведения болтового соединения представляется сложной задачей. Например, при растяжении в зависимости от характеристик материалов соединяемых элементов и болта, оно может характеризоваться или растяжением болтов или изгибом флянцев. Поэтому, если точность расчета конструкции сопоставима с точностью расчета соединения, то нельзя предположить жесткость соединения. В этом случае возникает необходимость моделирования поведения соединения.

Рассмотрим суть моделирования соединения стрежней встречающегося при расчете стережневых конструкций модифицированным МКЭ [3]. В модифицированном МКЭ за конечный элемент берется элемент конструкции, а именно, прямолинейный стержень. Из теории тонкостенных конструкций известно, что вид торцевой нагрузки влияет на напряженно-деформированное состояние лишь в окрестности концов стержня. Отсюда следует, что при работе в линейно-упругой области виды соединения двух элементов отличаются друг от друга лишь в окрестности узла соединения.

Из вышеперечисленных следуют выводы, размеры соединений малы по сравнению с размерами элементов конструкций и поведение их можно описать методами механики деформируемого твердого тела. Эти выводы позволяют узловое соединение представить в виде линейного упругого соединения, т.е. упругих пружин, коэффициент жесткости которых зависит от вида соединения и его параметров. Линейный характер поведения соединения продиктован постановкой всей задачи расчета конструкции и существованием «линейного участка» поведения соединения. Так же, можно объяснить упругий характер поведения узлового соединения. Замена одной модели (соединения) поведения другой моделью (пружиной) возможно для «внутренних» точек элемента , далеко стоящих от контактной поверхности. Так как рассматриваевые элементы достаточно длинные, то такая замена хорошо описывает влияние соединения на поведение элементов.

Предлагаемая замена узлового соединения системой пружин позволяет установить связь между приложенной нагрузкой и соответсвующим ему перемещением. В рамках модифицированного МКЭ [3] приложенная нагрузка характеризуется вектором $\{\sigma\}$, а перемещение-вектором $\{u\}$, где

$$\begin{aligned}\{\sigma\} &= \{N;Q_y;Q_z;M;M_y;M_z\}^T \\ \{u\} &= \{u;v;W;\psi_x;\psi_y;\psi_z\}^T\end{aligned} \qquad (1)$$

где $\{\sigma$ -вектор-столбец, характеризующий напряженное состояние,

$\{u$ -вектор-столбец, характеризующий перемещение точек торца.(В виду очевидности обозначений компонент векторов, их значения не приводятся). В общем случае, в рамках линейной теории, для различных видов соединений искомую связь можно представить в виде [2]

$$\{\sigma\} = \{k\}_c\left[\{u\}^{II}\Big|_{\xi=0} - \{u\}^{I}\Big|_{\xi=1}\right] \qquad (2)$$

где $\{k\}_c$-матрица жесткости соединения, ξ – обезразмеренная координата точки элемета, верхний индекс означает номер рассматриваемого элемента соединения. Отметим, что соотношение (2) предполагает, что действующее усилие без изменения передается от одного элемента к другому. В случае, если в узле соединяются несколько элементов, то соотношение (2) выписывается для каждой пары. Матрица $\{k\}_c$ зависит от параметров, характеризующих соединение. В общем случае матрица $\{k\}_c$ является симметричной, что следует из физической сути ее элементов. Соотношение (2) является обобщением модели Винклера для случая, когда перемещение вызывается не только вертикальной нагрузкой, а произвольно приложенной силой и моментами.Отметим, что случай жестокого соединения можно получить из (2) как частный случай: $\{k\}_c = \infty$.В самом деле, т.к. усилия в соединениях всегда существуют, то для их ограниченности при $\{k\}_c = \infty$

необходимо, чтобы сомножитель матрицы соединения был бы равен нулю т.е. $\{u\}^T\Big|_{\xi=0} = \{u\}^{II}\Big|_{\xi=1}$. Полученное равенство есть условие жесткого соединения.

Покажем, как при учете упругого соединения формируется матрица жесткости.

Предположим, что контакт осуществляется для i- го элемента на торце $\xi = 1$. Введем в рассмотрение некоторый конечный элемент, начало которого расположено в точке глобальной системы координат, определяемой
$\xi = 1$ для j-го элемента, а конец- в точке, соответствующей $\xi = 0$ для i-го элемента. Вектор узловых перемещений этого упругого элемента обозначим через $\{u_c^0\}$.Представим его в виде:

$$\{u_c^0\}^T = \{\{u_{c0}^0\}\{u_{c1}^0\}\}$$

$\{u_{c0}^0\}$ -вектор перемещений в начале рассматриваемого элемента, $\{u_{c1}^0\}$ - вектор перемещений в конце этого элемента. Определим $\{\sigma_1\}$ -усилия, действующие в начале стержня. Основываясь на соотношение (2) имеем:

$$\{\sigma_1\} = \{k\}_c^{ij}\left[\{u_{c1}^0\}\{u_{c0}^0\}\right]$$

или с учетом вида вектора $\{u_c^0\}$

$$\{\sigma_1\} = \left\{-\{k\}_c^{ij};\{k\}_c^{ij}\right\}\begin{Bmatrix}\{u_{c0}^0\}\\ \{u_{c1}^0\}\end{Bmatrix} \qquad (3)$$

где $\{k\}_c^{ij}$ -матрица жесткости соединения между элементами i и j.Усилия, действующие на другом торце стержня $\{\sigma_2\}$ определяются соотношением (3) ,что предопределено моделью упругого соединения. Определим матрицу жесткости рассматриваемого упругого элемента, используя матрицу жесткого соединения. Так как она устанавливает связь между усилиями, действующими на торцах и узловыми перемещениями, то, основываясь на (3) получим:

$$\begin{Bmatrix}-\{\sigma_1\}\\ \{\sigma_2\}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\{k\}_c^{ij} & -\{k\}_c^{ij}\\ -\{k\}_c^{ij} & \{k\}_c^{ij}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{u_{c0}^0\}\\ \{u_{c1}^0\}\end{Bmatrix} = [k]_c^{ij}\{u_c^0\}$$

где $[k]_c^{ij}$ – матрица жесткости элемента, моделирующего упругое соединение.

Итак, упругое соединение двух конечных элементов можно представить как жесткое соединение трех элементов: двух рассматриваемых конечных элементов и одного элемента, расположенного между ними и представленного в виде конечного элемента, т.е. с помощью матрицы жесткости.

Такой подход к упругому соединению позволяет построить матрицу жесткости всей конструкции.

Литературы

[1]. Боряшинов С.В. *Основы строительной механики машин.* М., «Машиностроение». 1973, 456 с.
[2]. Вольмир А.С. *Статика и динамика сложных структур»* «Машинстроение». М.,1989, 247 с.
[3]. Касумов А.К. *Модификация метода конечных элементов для расчета стрежневых конструкции.* Баку, Изд. «Азербайджан» 1966 152 с.

Qasımov A.Q. **ELEMENTLƏRİN QEYRİ-SƏRT BİRLƏŞMƏLƏRİ ÜÇÜN SONLU EOEMENTLƏR METODU HAQQINDA**

Üç elementin sərt birləşməsi şəklində iki sonlu elementin elastiki birləşməsi: aralarındakı əlaqə sonlu elementlər şəklində və sərtlik matrisinin köməyi ilə baxılır. Elsatiki birləşməyə belə baxış konstruksiyanın sərtlik matrisinə baxmaga gətirir.

Kasumov A.K. **ON CALCULASTION OF NONRIGID COMBINATION OF ELEMENTS IN A FINITE ELEMENTS METHOD**

Elastic combination of two finite elements is represented as a rigid combination of theree elements: two of considered finite elemenets and one element arranged between them and presented in the from of finite elements. I.e. by means of rigidity matrix. Such an approach to elastic combination admits to construct a rigidity matrix for construction.