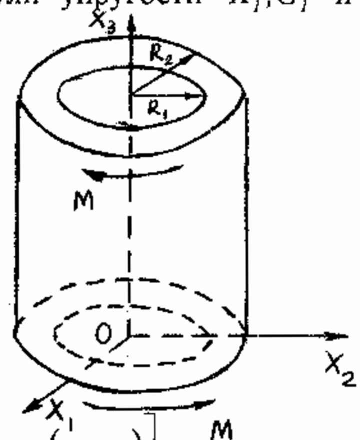
1997 ТОМ VI (XIV)

УДК 539.374

КЯЗИМОВА Р.А.

НЕЛИНЕЙНОЕ КРУЧЕНИЕ КРУГЛОГО СТЕРЖНЯ, АРМИРОВАННОГО ПРОДОЛЬНЫМ КРУГОВЫМ СТЕРЖНЕМ

Рассмотрим геометрически нелинейное кручение физически линейного упругого круглого стержня, армированного продольным круговым стержнем из другого материала. Пусть поперечное сечение V стержня состоит из области S_1, ограниченной окружностью с радиусом R_1 и области S_2, ограниченной окружностью с радиусом R_2, охватывающей первую. Пусть первой области соответствуют модули упругости K_1, G_1 и второй K_2, G_2.



Окружности l_1, l_2 концентричны и начало координат выбрано в центре.

Предполагается, что на стержень действуют крутящий момент M и, быть может продольная сила P.

Перемещения приняты в виде [1]

$$u_1(x_1,x_2,x_3) = -\theta x_2 x_3 + \theta^2\left[-\frac{1}{2}x_1 x_3^2 + V_1(x_1,x_2)\right],$$

$$u_2(x_1,x_2,x_3) = \theta x_1 x_3 + \theta^2\left[-\frac{1}{2}x_2 x_3^2 + V_2(x_1,x_2)\right],$$

$$u_3(x_1,x_2,x_3) = \theta\varphi(x_1,x_2) + \theta^2 c x_3.$$

где θ – угол крутки, $V_1(x_1,x_2), V_2(x_1,x_2)$ – искомые функции, c - постоянная, подлежащая определению, $\varphi(x_1,x_2)$ – функция кручения, соответствующая линейной задаче кручения.

Компоненты тензора деформации вычисляются в форме.

$$2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} + u_{s,i} + u_{s,j} \left(i, j, s = 1,2,3\right)$$

Так как здесь предполагается, что материал стержня физически линейно упругий, то потенциал напряжения берем в классической форме

$$W = 0{,}5K_n(3e)^2 + 3G_n з^2 \qquad \left(n = \overline{1,2}\right)$$

где

$$3e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$$

$$3\,э^2 = \left(e_{ij} - \delta_{ij} e\right)\left(e_{ij} - \delta_{ij} e\right) \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

При этом компоненты напряжения вычисляются соотношениями

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}$$

Запишем вариационное уравнение равновесия Лагранжа для данного случая [2].

$$\iiint \delta W dx_1 dx_2 dx_3 = h \cdot \left(M + \theta^2 P \delta c\right).$$

Используя вариационное уравнение равновесия Лагранжа, получено уравнение равновесия, граничные условия на боковой поверхности и на поверхности стыка и два интегральных условия на торцах стержня. При этом задача распадается на две задачи [4]. Первая из них- классическая задача для решения задачи кручения, ее решение известно [3].

Вторая задача соответствует вторичным эффектам при кручении. Она является модифицированной плоской задачей для определения $V_1(x_1, x_2)$ и $V_2(x_1, x_2)$ и состоит из следующих соотношений:

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} a_1 \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} + a_2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1 \partial x_2} + G \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_2^2} &= l_1 x_1 \\ a_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_2^2} + a_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_1 \partial x_2} + G \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} &= l_2 x_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

граничные условия на боковой поверхности и на поверхности стыка

$$\begin{aligned} &\left[\left(a_{12} V_{1,1} + a_{13} V_{2,2}\right)x_1 + G_1\left(V_{1,2} + V_{2,1}\right)x_2\right]_{R=R_1} - \left[\left(a_{12} V_{1,1} + a_{13} V_{2,2}\right)x_1 + \right. \\ &\left. + G_1\left(V_{1,2} + V_{2,1}\right)x_2\right]_{R=R_2} + \left[\left(a_{22} V_{1,1} + a_{23} V_{2,2}\right)x_1 + G_1\left(V_{1,2} + V_{2,1}\right)x_2\right]_{R=R_2} = \\ &= -\left[\left(l_{11} x_1 + l_{12} x_2\right)_{R=R_1} + \left(l_{11} x_1 + h_{12} x_2\right)_{R=R_2} + \left(l_{21} x_1 + l_{22} x_2\right)_{R=R_2}\right] \\ &\left[\left(a_{12} V_{2,2} + a_{13} V_{1,1}\right)x_2 + G\left(V_{1,2} + V_{2,1}\right)x_1\right]_{R=R_1} - \left[\left(a_{22} V_{2,2} + a_{13} V_{1,1}\right)x_2 + \right. \\ &\left. + G_1\left(V_{1,2} + V_{2,1}\right)x_2\right]_{R=R_2} + \left[\left(a_{22} V_{1,1} + a_{23} V_{2,2}\right)x_2 + G_2\left(V_{1,2} + V_{2,1}\right)x_1\right]_{R=R_2} = \\ &= -\left\{\left(l_{11} x_2 + l_{12} x_1\right)_{R=R_1} + \left(l_{11} x_2 + l_{12} x_1\right)_{R=R_2} + \left(l_{21} x_2 + l_{22} x_1\right)_{R=R_2}\right\}, \end{aligned} \qquad (2)$$

где G, a_i, a_{ij}, l_i, l_{ij} – зависят от K_1, K_2, G_1, G_2.

Кроме этих, получены еще два интегральных условия, удовлетворяемые на торцах стержня. Из первого интегрального условия определяем постоянную c, соответствующую изменению длин продольных волокон стержня и силу, которую нужно приложить к торцам стержня, чтобы предотвратить изменение.

Второе интегральное условие дает связь между крутящим моментом и углом крутки.

Решение системы *(1)* представим в виде [5]

$$V_1(x_1,x_2)=V_1^0+V_1^1$$
$$V_2(x_1,x_2)=V_2^0+V_2^1$$

где V_1^0, V_2^0 – частные решения системы уравнений *(1)*, имеющий вид

$$V_1^0=dx_1^3$$
$$V_2^0=dx_2^3$$

Здесь $d=-\dfrac{a_3}{a_2}$, $V_1'(x_1,x_2)$, $V_2'(x_1,x_2)$– общие решения однородной системы уравнений, соответствующей системе *(1)*. Эти однородные уравнения равновесия являются уравнениями Ляме для плоской деформации при отсутствии объемных сил.

Система уравнений решена методом файлона [4], и решение при условии *(2)* получена в виде

$$V_1(x_1,x_2)=b_1R^2x_1+3b_2x_1x_2^2+b_3x_1^3$$
$$V_2(x_1,x_2)=b_1R^2x_2+3b_2x_2x_1^2+b_3x_2^3$$

Здесь $b_i=b_i(K_1,K_2,G_1,G_2)$.

Для определения неизвестной c, использовано одно из интегральных условий. Предполагая $P=0$, находим из этого интегрального условия $c=c(K_1,K_2,G_1,G_2,R_1,R_2)$.

При определении постоянной C, обнаружено, что учет геометрической нелинейности приводит тому, что деформация сопроваждается изменением длин продольных волокон.

Из второго интегрального условия определяем связь между углом крутки и крутящим моментом:

$$M=M_k\left(1+\theta^2\gamma\right)$$

где M_k- крутящий момент, соответствующий классической постановке задаче кручения, и $\gamma=\gamma\left(R_1,R_2,K_1,K_2,G_1,G_2\right)$. Как видно, добавка к крутящему моменту пропорциональна третьей степени крутки.

Литература

[1]. Толонников Л.А. *Основные соотношения квадратичной теории упругости в перемещениях.* П.М.М., т. 21, вып. 6, 1967.

[2]. Лейбензон А.С. *Вариационные методы теории упругости.* Москва, ОГИЗ, 1967.

[3]. Мусхелишвили Н.И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* Москва, "Наука", 1961.

[4]. Кязимова Р.А. *О выборе аналитического потенциала напряжений.* Сборник "Технология машиностроения", вып. 26, Тула, 1973.

[5]. Кязимова Р.А. *Анализ перемещений, деформаций и напряжений при кручении эллиптического вала.* Сборник "Исследование по механике деформирован – ных сред" , Тула, ТПИ, 1972.

Kazımova R.Ə. **BİRİ-BİRİNİN İÇİNƏ QEYDİRİLMİŞ DAİRƏVİ ÇUBUĞÜN QEYRİ-XƏTTİ BURULMASI**

Həndəsi qeyri-xəttiliyi nəzərə almaqla biri- birinin isinə qeydirilmiş müxtəlif materialdan olan dairəvi subuğun burulmasında qərqinlik- deformasiya vəziyyəti tə' yin olunur.

Kazimova R.A. **NONLINEAR TORSION OF A CIRCULAR BAR REINFORCED BY A LONGITUDINAL CIRCULAR BAR**

Stress strain state of a circular bar reinforced by a longitudinal circular bar made of another material with regard to geometrical nonlinearity is defined.