УДК 534. 22

ЛАТИФОВ Ф.С., САДЫКОВ П.М.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЛН В ЦИЛИНДРЕ С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ, ЗАПОЛНЕННЫМ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В работе исследованы распространение осесимметричных волн в бесконечном замкнутом трехмерном цилиндре, контактирующего с трехмерным упругим заполнителем внутреннего радиуса a, который заполнен вязкой ньютоновской жидкостью. Принимается, что между цилиндром и заполнителем, жидкостью и заполнителем выполняются условия жесткого сцепления. Для этого случая составлено дисперсионное уравнение, которое численно реализовано на ЭВМ. Построены кривые зависимости от частоты фазовой скорости распространения волн в системах: цилиндр- заполнитель- вязкая жидкость, цилиндр- заполнитель- идеальная жидкость.

Пусть a - внутренний радиус, R - внешний радиус заполнителя, а b - внешний радиус цилиндра.

Условия жесткого сцепления на границе цилиндр- заполнитель $r = R$ имеют вид:

$$\sigma_{rx}^{(1)} = \sigma_{rx}^{(2)}; \qquad \sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)};$$
$$S_r^{(1)} = S_r^{(2)}; \qquad S_x^{(1)} = S_x^{(2)} \tag{1}$$

На границе заполнитель- жидкость $r = a$:

$$\sigma_{rx}^{(1)} = -P_x; \qquad \sigma_{rr}^{(1)} = -P_r;$$
$$v_r = \frac{\partial S_r^{(1)}}{\partial t}; \qquad v_x = \frac{\partial S_x^{(1)}}{\partial t}; \tag{2}$$

На внешней поверхности цилиндра $r = b$:

$$\sigma_{rx}^{(2)} = 0; \qquad \sigma_{rr}^{(2)} = 0; \tag{3}$$

где $\sigma_{rx}^{(i)}, \sigma_{rr}^{(i)}$- напряжения в заполнителе $(i = 1)$ и в цилиндре $(i = 2)$; $S_x^{(i)}, S_r^{(i)}$- перемещения заполнителя $(i = 1)$ и в цилиндре $(i = 2)$; v_r, v_x- радиальная и осевая компоненты скорости жидкости; P_x, P_r- силы трения и давления на заполнитель соответственно; t- время.

Осесимметричные волны в рассматриваемом упругом цилиндре $(i = 2)$ и в заполнителе $(i = 1)$ можно описать скалярными функциями $\varphi_i(r, x, t), \psi_i(r, x, t)$, удовлетворяющими уравнениям, которые в цилиндрических координатах имеют вид [1, 2]

$$\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}=\mu_l^{(i)2}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial^2\psi_i}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_i}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x^2}=\mu_t^{(i)2}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2}. \qquad (4)$$

Здесь $\mu_l^{(i)}=\omega/a_l^{(i)}$; $\mu_t^{(i)}=\omega/a_t^{(i)}$; $a_l^{(i)}$; $a_t^{(i)}$ - скорости поперечных и продольных волн в цилиндре $(i=2)$ и в заполнителе $(i=1)$; ω - круговая частота.

Из формул *(4)* видно, что в цилиндре и заполнителе распространяются одна продольная и одна поперечная волны, которые отличаются между собой направлением поляризации вектора смещения.

Перемещения и напряжения, необходимые для удовлетворения граничных условий, находим соответственно из формул [1, 2]:

$$S_x^{(i)}=\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}+\frac{1}{\mu_t^{(i)}}\left(\mu_t^{(i)2}\psi_i+\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x^2}\right)$$
$$S_r^{(i)}=\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}+\frac{1}{\mu_t^{(i)}}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x\partial r} \qquad (5)$$

$$\sigma_{rx}^{(i)}=\mu^{(i)}\left(\frac{\partial S_x^{(i)}}{\partial r}+\frac{\partial S_r^{(i)}}{\partial x}\right)$$
$$\sigma_{rr}^{(i)}=\lambda^{(i)}\left(\frac{\partial S_x^{(i)}}{\partial x}+\frac{S_r^{(i)}}{r}+\frac{\partial S_r^{(i)}}{\partial r}\right)+2\mu_i\frac{\partial S_r^{(i)}}{\partial r}$$
$$P_x=-\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial x}\right);$$
$$P_r=\left(p-2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}\right),$$

где $\lambda^{(i)},\mu^{(i)}$ - упругие постоянные Ляме заполнителя $(i=1)$ и цилиндра $(i=2)$, μ - динамическая вязкость, p - давление.

Движение жидкости описывается линеаризованной формой уравнений Навье-Стокса и уравнением неразрывности [3]

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_x}{\partial r}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\right);$$
$$\rho\frac{\partial v_r}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{1}{r^2}v_r+\frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2}\right);$$
$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}v_r+\frac{\partial v_x}{\partial x}=0 \qquad (6)$$

где ρ - плотность жидкости.

Будем рассматривать синусоидальные волны, распространяющиеся в направлении образующей цилиндра. В этом случае решениями уравнений *(4)* будут функции

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \left[A_1^{(i)} I_0\left(j_l^{(i)} r\right) + A_2^{(i)} K_0\left(j_l^{(i)} r\right)\right] \exp\left[i(\omega t - \alpha x)\right] \\ \psi_i &= \left[C_1^{(i)} I_0\left(j_t^{(i)} r\right) + C_2^{(i)} K_0\left(j_t^{(i)} r\right)\right] \exp\left[i(\omega t - \alpha x)\right] \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$j_l^{(i)} = \alpha\left(1 - n_i^2 v_*^2\right)^{1/2};\ j_t^{(i)} = \alpha\left(1 - m_i^2 v_*^2\right)^{1/2};\ v_* = \frac{v}{c};\ v = \frac{w}{\alpha};\ n_i = {}^{c}\!/_{a_l^{(i)}};\ m_i = {}^{c}\!/_{a_t^{(i)}};$$

v_* - фазовая скорость, $A_1^{(i)}, A_2^{(i)}, C_1^{(i)}, C_2^{(i)}$ - постоянные; I_0, K_0 - модифицированные функции Бесселя, c - скорость распространения звука в жидкости; α - волновое число в продольном направлении.

Решение уравнения *(6)* в соответствии с *(7)* при условии ограниченности скорости текущей жидкости при $r = 0$ имеет вид:

$$p(r,x,t) = A_1 J_0(i\alpha r) \exp\left[i(\omega t - \alpha x)\right] \tag{8}$$

$$v_x(r,x,t) = \left[A_1 \frac{\alpha}{\rho\omega} J_0(i\alpha r) - A_2 \beta J_0(\beta r)\right] \exp\left[i(\omega t - \alpha x)\right]$$

$$v_r(r,x,t) = \left[A_1 \frac{\alpha}{\rho\omega} J_1(i\alpha r) - i\alpha A_2 J_1(\beta r)\right] \exp\left[i(\omega t - \alpha x)\right]$$

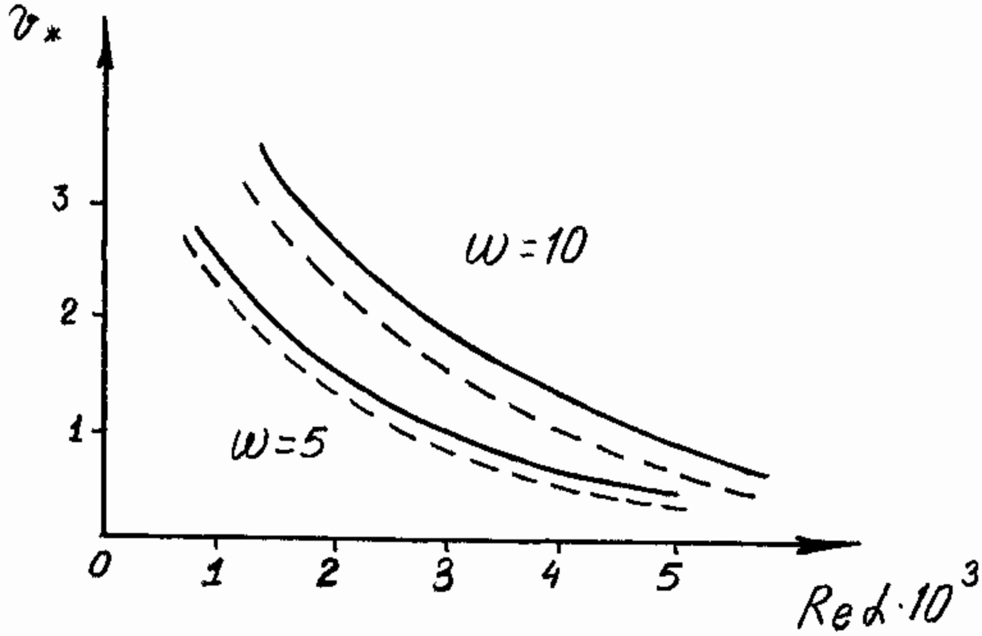
где A_1, A_2 - постоянные интегрирования; J_0, J_1 бесселовы функции; $\beta^2 = -\left(\alpha^2 + \dfrac{i\omega}{\mu}\rho\right)$.

Подставляем решение *(7)* и *(8)* в *(5)*,вычисляем поле напряжений и перемещений в цилиндре и заполнителе, поле скоростей и давлений в жидкости. Далее, из выполнения контактных условий *(1)-(3)*, получим систему уравнений для определения неизвестных постоянных $A_1^{(i)}, A_2^{(i)}$, $C_1^{(i)}, C_2^{(i)}, A_1, A_2$. Эта ситема однородная и алгебраическая, для существования нетривиального решения приравниваем главный определитель системы к нулю, в результате получим дисперсионное уравнение:

$$\det\left\|a_{ij}\right\| = 0 \qquad \left(i,\ j = \overline{1{,}10}\right) \tag{9}$$

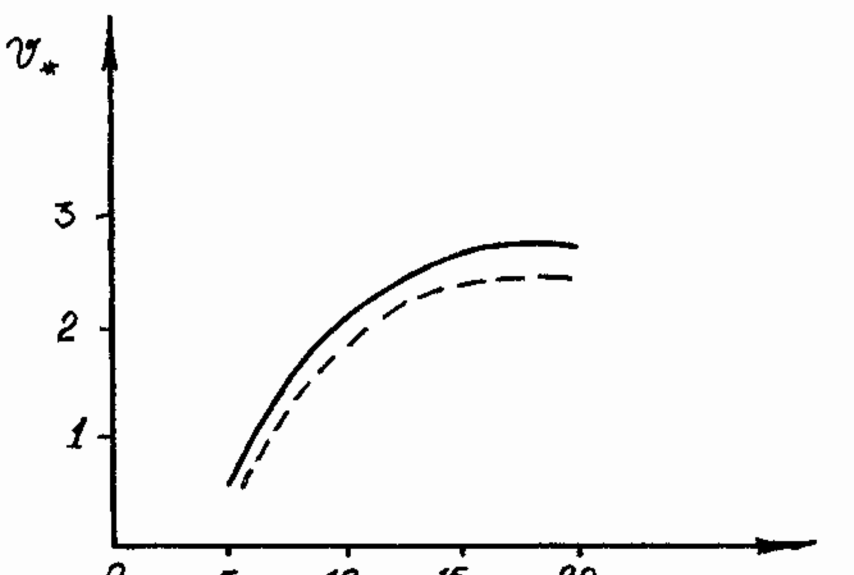
Элементы a_{ij} ввиду громоздкости здесь не выписываются. Но отметим, что они зависят от упругих характеристик цилиндра, заполнителя и вязкой жидкости. Уравнение *(9)* трансцендентное, так как α входит в аргументы бесселовых функций и имеет бесчисленное множество корней. Это уравнение реализованно численно на ЭВМ.

Расчет проводился при следующих значениях параметров, входящих в выражение *(9)*: $a_l^{(1)} = 7 \cdot 10^4$ см/с; $a_t^{(1)} = 3{,}1 \cdot 10^4$ см/с; $R = 60$ см; $\mu = 0{,}04$ г/см·с; $\mu^{(1)} = 1{,}92 \cdot 10^8$ дин/см^2; $\lambda^{(1)} = 3{,}2\mu^{(1)}$; $\rho = 1$ г/см^3; $E_2 = 2 \cdot 10^{12}$ дин/см^2; $\varepsilon_1 = a / R = 0{,}2$; $\lambda^2 = 0{,}58E_2$; $\mu^{(2)} = E_2 / 2 \cdot b$; $\varepsilon_2 = b / R = 1{,}1$



v_*
3
2
1
$\omega=10$
$\omega=5$
0
1
2
3
4
5
$Re\,\alpha\cdot10^3$

Рис. 1



v_*
3
2
1
0
5
10
15
20
ω

Рис. 2

Результаты счета представлены на рис. 1, 2. Сплошным линиям в обоих рисунках соответствуют распространение волн в цилиндре с заполнителем, заполненным вязкой жидкостью, а пунктирным- цилиндр с заполнителем, заполненным идеальной жидкостью.

Из рисунков видно, что дисперсионные кривые для случаев идеальной и вязкой жидкостей при низших частотах практически совпадают.

Литература

[1]. Ильгамов М.А. *Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ.* М.: Наука, 1969.

[2]. Швец Л.П. *Влияние тонкого промежуточного слоя на распространение волн в цилиндрической полости,* заполненной *жидкостью.* Прикладная механика, 1976, т. XII, №2, с. 54-61.

[3]. Седов Л.И. *Механика сплошной среды.* М.: Наука, 1973, т.1.

Lətifov F.S., Sadıkov P.M.

İÇƏRİSİNDƏ DOLDURUCU VƏ ÖZLÜ MAYE OLAN SİLİNDİRDƏ OXASİMMETRİK DALĞALARIN YAYILMASI

Məqalədə radiusu aya bərabər olan doldurucu və özlü maye ilə dolu olan üçölçülü silindirdə oxasimmetrik dalğaların yayılması tədqiq olunmuşdur. Baxılan məsələ üçün dispersiya tənliyi qurulmuş və ədədi üsulla EHM-də həll olunmuşdur.

Latifov F.S., Sadykov P.M.

PROPAGATION OF AXIALLYSYMMETRIC WAVES IN A CYLINDER WITH A FILLER FILLED BY VISCOUS FLUID

Propagation of axiallysymmetric waves in an infinite closed three-dimensional cylinder contracting with threedimensional elastic filler of interior radius a filled with viscous nonnewtonian fluid is investigated in the paper. A dispersive equation numercally realised in computer is composed.