1997 ТОМ VI (XIV)

УДК 539.3

МЕХТИЕВ М.Ф., САРДАРОВА Н.А.

ПОСТРОЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСИАЛЬНО- ИЗОТРОПНОГО УСЕЧЕННОГО ПОЛОГО КОНУСА ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Рассматривается осесимметричная задача об упругом равновесии трансверсиальном- изотропного полого усеченного конуса переменной толщины. Построены однородные решения, позволяющие удовлетворить граничные условия на торцах конуса.

1. Пусть конус занимает объём

$$\Gamma = \{r \in [r_1, r_2], \theta \in [\theta_1, \theta_2], \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

Уравнения равновесия в перемещениях на оси сферической системы координат имеют вид [1]:

$$b_{11}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2b_{11}}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2}{r^2}(b_{12} - b_{22} - b_{23})u_r + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + ctg\theta\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) +$$

$$+\frac{b_{12}+1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + ctg\theta\, u_\theta\right) + \frac{b_{12} - b_{22} - b_{23} - 1}{r^2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + ctg\theta\, u_\theta\right) = 0$$

$$\frac{b_{12}+1}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{b_{22} + b_{23} + 2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \tag{1.1}$$

$$+\frac{b_{22}}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + ctg\theta\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{b_{22} - b_{23} - 2}{r^2} - \frac{b_{22}}{r^2 \sin^2\theta}\right)u_\theta = 0$$

Здесь u_r, u_θ - компоненты вектора перемещения

$$mb_{11} = (1-\nu)E_1,\ mb_{22} = 2G_0(1 - \nu_1^2 E_0),\ mb_{12} = \frac{E}{G_1}\nu_1,\ mb_{23} = 2G_0(\nu + \nu_1^2 E_0),$$

$G_0 = G \cdot G_1^{-1}$, $E_0 = E \cdot E_1^{-1}$, $m = 1 - \nu - 2\nu_1^2 \cdot E_0$, $\nu_1, \nu_2, E, E_1, G, G_1$ - материальные константы.

Предполагается, что коническая часть границы свободна от напряжений, т.е.

$$\sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \qquad \text{при} \qquad \theta = \theta_n \quad (n = 1,2) \tag{1.2}$$

а на остальных частях границы заданы следующие граничные условия

$$\sigma_r = Q_s(\theta), \quad \tau_{r\theta} = T_s(\theta) \qquad \text{при} \qquad r = r_s \quad (s = 1,2) \tag{1.3}$$

где $Q_s(\theta), T_s(\theta)$ достаточно гладкие функции.

Решение уравнений (1.1), удовлетворяющих однородным граничным условиям (1.2) будем называть однородными решениями.

Решение уравнений (1.1) будем отыскивать в виде:

$$u_r = r^{\lambda} u(\theta), \quad u_\theta = r^{\lambda} v(\theta) \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в (1.1), после разделения переменных, получаем:

$$u'' + ctg\theta \cdot u' + \left[b_{11}\lambda(\lambda+1) + 2(b_{12} - b_{22} - b_{23})\right]u + \left[(b_{12}+1)\lambda + b_{12} - b_{22} - b_{23} - 1\right]\times$$
$$\times\left(v' + ctg\theta \cdot v\right) = 0 \tag{1.5}$$
$$\left[(b_{12}+1)\lambda + b_{22} + b_{23} + 2\right]\cdot u' + b_{22}\left(v' + ctg\theta\cdot v\right)' +$$
$$+\left[\lambda(\lambda+1) + b_{22} - b_{23} - 2\right]\cdot v = 0$$

Для построения общего решения системы уравнений (1.5) будем отыскивать $u(\lambda,\theta)$, $v(\lambda,\theta)$ в виде:

$$u = AT_\chi(\theta), \quad v = B\frac{dT_\chi}{d\theta} \tag{1.6}$$

где $T_\chi(\theta)$ удовлетворяет уравнению Лежандра

$$T''_\chi + ctg\theta\, T'_\chi + \chi(\chi+1)T_\chi = 0 \tag{1.7}$$

После подстановки (1.6) в (1.5) с учетом (1.7) получаем следующее характеристическое уравнение:

$$b_{22}\chi^2(\chi+1)^2 - \left[(b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12})\lambda(\lambda+1) + 2b_{22} + 2(b_{12} - b_{22} - b_{23})(G_0 - 1)\right]\times$$
$$\chi(\chi+1) + b_{11}\lambda^2(\lambda+1)^2 + 2\left[b_{11}(G_0 - 1) + b_{12} - b_{22} - b_{23}\right]\lambda(\lambda+1) +$$
$$+4(b_{12} - b_{22} - b_{23})(G_0 - 1) = 0 \tag{1.8}$$

Учитывая *(1.8)*, общее решение системы *(1.1)* можно представить в виде:

$$u_r = r^{\lambda}\left[A_1\psi_{\chi_1}(\theta) + A_2\psi_{\chi_2}(\theta)\right]$$
$$u_\theta = r^{\lambda} b_0\left[\frac{d\psi_{\chi_1}}{d\theta} + \frac{d\psi_{\chi_2}}{d\theta}\right] \tag{1.9}$$

где χ_1, χ_2 - корни характеристического уравнения *(1.8)*,

$$\psi_\chi(\theta) = C_\chi P_\chi(\cos\theta) + B_\chi Q_\chi(\cos\theta),$$
$$A_i = -b_{22}\chi_i(\chi_i + 1) + \lambda(\lambda+1) + b_{22} - b_{23} - 2$$
$$b_0 = -(b_{12}+1)\lambda - b_{22} - b_{23} - 2,$$

C_χ, B_χ - произвольные постоянные, $P_\chi(\cos\theta)$, $Q_\chi(\cos\theta)$ - функции Лежандра соответственно первого и второго родов. Компоненты тензора напряжений через компоненты перемещений выражаются следующим образом:

$$\sigma_r = r^{\lambda-1}G_1\left[(b_{11}\lambda + 2b_{12})u + b_{12}(v' + ctg\theta\cdot v)\right]$$
$$\sigma_\varphi = r^{\lambda-1}G_1\left[(b_{12}\lambda + b_{22} + b_{23})u + b_{23}\cdot v' + b_{22}ctg\theta\cdot v\right]$$
$$\sigma_\theta = r^{\lambda-1}G_1\left[(b_{12}\lambda + b_{22} + b_{23})u + b_{22}\cdot v' + b_{23}ctg\theta\cdot v\right] \tag{1.10}$$
$$\tau_{r\theta} = r^{\lambda-1}G_1\left[u' + (\lambda-1)v\right]$$

Удовлетворяя однородные граничные условия *(1.2)*, получаем следующее характеристическое уравнение относительно спектрального параметра λ:

$$D(\lambda,\theta_1,\theta_2) = 2d_1d_2C_1C_2\sin^{-1}\theta_1\sin^{-1}\theta_2 - d_2^2\left[C_1^2 D_{\chi_1}^{(0,0)}(\theta_1,\theta_2) + C_1C_3ctg\theta_1\times\right.$$

$$\times D_{\chi}^{(1,0)}(\theta_1,\theta_2)+C_1C_3ctg\theta_2\cdot D_{\chi_1}^{(0,1)}(\theta_1,\theta_2)+C_3^2ctg\theta_1 ctg\theta_2\cdot D_{\chi_1}^{(1,1)}(\theta_1,\theta_2)\Big]\times$$
$$\times D_{\chi_2}^{(1,1)}(\theta_1,\theta_2)+d_1d_2\Big[C_1D_{\chi_1}^{(0,1)}(\theta_1,\theta_2)+C_3ctg\theta_1\cdot D_{\chi_1}^{(1,1)}(\theta_1,\theta_2)\Big]\times$$
$$\times\Big[C_2D_{\chi_2}^{(1,0)}(\theta_1,\theta_2)+C_3ctg\theta_2\cdot D_{\chi_2}^{(1,1)}(\theta_1,\theta_2)\Big]-d_1^2D_{\chi_1}^{(1,1)}(\theta_1,\theta_2)\times$$
$$\times\Big[C_2^2D_{\chi_2}^{(0,0)}(\theta_1,\theta_2)+C_2C_3ctg\theta_1D_{\chi_2}^{(1,0)}(\theta_1,\theta_2)+C_2C_3ctg\theta_2D_{\chi_2}^{(0,1)}(\theta_1,\theta_2)+$$
$$+C_3^2ctg\theta_1\cdot ctg\theta_2D_{\chi_2}^{(1,1)}(\theta_1,\theta_2)\Big]+d_1d_2\Big[C_2D_{\chi_2}^{(0,1)}(\theta_1,\theta_2)+C_3ctg\theta_1D_{\chi_2}^{(1,1)}(\theta_1,\theta_2)\Big]\times$$
$$\times\Big[C_1D_{\chi_1}^{(1,0)}(\theta_1,\theta_2)+C_3ctg\theta_2D_{\chi_1}^{(1,1)}(\theta_1,\theta_2)\Big]=0, \qquad (1.11)$$

где

$$d_i=A_i+(\lambda-1)b_0,\quad c_3=(b_{23}-b_{22})b_0,$$
$$c_i=(b_{12}\lambda+b_{22}+b_{23})A_i-\chi_i(\chi_i+1)b_{22}\cdot b_0\quad (i=1,2)$$
$$D_{\chi}^{(s,l)}(\varphi,\psi)=P_{\chi}^{(s)}(\cos\varphi)Q_{\chi}^{(l)}(\cos\psi)-P_{\chi}^{(l)}(\cos\psi)Q_{\chi}^{(s)}(\cos\varphi)\quad (s,l=0;1)$$

2.Левая часть уравнения *(1.1)* как целая функция параметра λ ,имеет счетное множество нулей с точкой сгущения на бесконечности. Корни уравнения (1.11) могут быть найдены численно или как показано в работе [2,3], для тонких оболочек более эффективным является асимптотический метод. Однако в данной работе мы не будем останавливаться на этом.

Суммируя по всем корням уравнения *(1.11)* и учитывая *(1.9)* и *(1.10)* получаем однородные решения следующего вида:

$$u_r=\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{k=0}^{\infty}C_kr^{z_k}U_k(\theta) \qquad (2.1)$$

$$u_\theta=\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{k=0}^{\infty}C_kr^{z_k}W_k(\theta) \qquad (2.2)$$

$$\sigma_r=\frac{G_1}{r\sqrt{r}}\sum_{k=0}^{\infty}C_kr^{z_k}Q_{rk}(\theta)$$
$$\sigma_\varphi=\frac{G_1}{r\sqrt{r}}\sum_{k=0}^{\infty}C_kr^{z_k}Q_{\varphi k}(\theta)$$
$$\sigma_\theta=\frac{G_1}{r\sqrt{r}}\sum_{k=0}^{\infty}C_kr^{z_k}Q_{\theta k}(\theta) \qquad (2.3)$$
$$\tau_{r\theta}=\frac{G_1}{r\sqrt{r}}\sum_{k=0}^{\infty}C_kr^{z_k}T_k(\theta)$$

Здесь

$$z_k=\lambda_k+\tfrac{1}{2};$$
$$U_k(\theta)=A_1F_1(z_k,\theta)-A_2F_2(z_k,\theta)$$
$$W_k(\theta)=b_0\left[\frac{dF_1(z_k,\theta)}{d\theta}-\frac{dF_2(z_k,\theta)}{d\theta}\right]$$
$$Q_{rk}^{(\theta)}=\Big[b_{11}\big(z_k-\tfrac{1}{2}\big)+2b_{12}-\chi_1(\chi_1+1)b_k\Big]F_1(z_k,\theta)+\Big[b_{11}\big(z_k-\tfrac{1}{2}\big)+2b_{12}-$$
$$-b_{12}\chi_2(\chi_2+1)\Big]F_2(z_k,\theta)$$

$$Q_{\varphi k}^{(\theta)}=\left[b_{12}\left(z_k-\tfrac{1}{2}\right)-b_{23}\chi_1(\chi_1+1)+b_{23}\right]F_1(z_k,\theta)+(b_{22}-b_{23})ctg\theta\frac{dF_1(z_k,\theta)}{d\theta}+$$
$$\left[b_{12}\left(z_k-\tfrac{1}{2}\right)-b_{23}\chi_2(\chi_2+1)+b_{23}\right]F_2(z_k,\theta)+(b_{22}-b_{23})ctg\theta\frac{dF_2(z_k,\theta)}{d\theta}$$
$$Q_{\theta k}(\theta)=\left[b_{12}\left(z_k-\tfrac{1}{2}\right)-b_{22}\chi_1(\chi_1+1)+b_{22}+b_{23}\right]F_1(z_k,\theta)+(b_{23}-b_{22})\times$$
$$\times ctg\theta\frac{dF_1(z_k,\theta)}{d\theta}+\left[b_{12}\left(z_k-\tfrac{1}{2}\right)-b_{22}\chi_2(\chi_2+1)+b_{22}+b_{23}\right]F_2(z_k,\theta)+$$
$$+(b_{23}-b_{22})ctg\theta\frac{dF_2(z_k,\theta)}{d\theta}$$
$$T_k(\theta)=d_1\frac{dF_1(z_k,\theta)}{d\theta}+d_2\frac{dF_2(z_k,\theta)}{d\theta},$$

где

$$F_1(z_k,\theta)=d_1d_2C_2\sin^{-1}\theta_2\cdot D_{\chi_1}^{(0,1)}(\theta,\theta_1)-d_2^2D_{\chi_2}^{(1,1)}(\theta_1,\theta_2)\left[C_1D_{\chi_1}^{(0,0)}(\theta,\theta_2)+\right.$$
$$\left.+C_3ctg\theta_2D_{\chi_1}^{(0,1)}(\theta,\theta_2)\right]+d_1d_2D_{\chi_1}^{(0,1)}(\theta,\theta_2)\left[C_2D_{\chi_2}^{(1,0)}(\theta_1,\theta_2)+C_3ctg\theta_2D_{\chi_2}^{(1,1)}(\theta_1,\theta_2)\right]$$
$$F_2(z_k,\theta)=-d_1d_2C_1\sin^{-1}\theta_2D_{\chi_2}^{(0,0)}(\theta,\theta_1)-d_1^2D_{\chi_1}^{(0,0)}(\theta_1,\theta_2)\left[C_2D_{\chi_2}^{(0,0)}(\theta,\theta_2)+\right.$$
$$\left.+C_3ctg\theta_2D_{\chi_2}^{(0,1)}(\theta,\theta_2)\right]+d_1d_2D_{\chi_2}^{(0,1)}(\theta,\theta_2)\left[C_1D_1^{(1,0)}(\theta_1,\theta_2)+C_3ctg\theta_2D_{\chi_1}^{(1,1)}(\theta_1,\theta_2)\right]$$

Произвольные постоянные C_k определяются из условия выполнения граничных условий на торцах конуса.

Построенная система однородных решений *(2.3)* не обладает свойством ортогональности, которое затрудняет удовлетворение граничных условий на торцах конуса.

Однако, система однородных решений *(2.3)*, как будет показано ниже, удовлетворяет так называемым обобщенным условиям ортогональности, позволяющим точно решить задачу для конуса при смешанных граничных условиях на торцах конуса.

2. Рассмотрим следующие однородные граничные условия на боковой поверхности конуса.

$$\sigma_\theta=0,\ \tau_{r\theta}=0 \quad \text{при} \quad \theta=\theta_1,\theta_2 \tag{3.1}$$
$$u_r=0,\ u_\theta=0 \quad \text{при} \quad \theta=\theta_1,\theta_2 \tag{3.2}$$
$$u_r=0,\ \tau_{r\theta}=0 \quad \text{при} \quad \theta=\theta_1,\theta_2 \tag{3.3}$$
$$\sigma_\theta=0,\ u_\theta=0 \quad \text{при} \quad \theta=\theta_1,\theta_2 \tag{3.4}$$

Докажем, что при любых граничных условиях *(3.1) – (3.4)* справедливо следующее соотношение ортогональности

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(u_{rp}\sigma_r^k+u_{\theta p}\tau_{r\theta}^k\right)r^2\sin\theta\,d\theta=0 \quad (p\neq k) \tag{3.5}$$

Отметим, что соотношение *(3.5)* является прямым следствием теоремы Бетти и не зависит от вида граничных условий на боковой поверхности конуса.

На самом деле, пусть $u_r^2, u_\theta^2, \sigma_r^i,\ldots,\tau_{r\theta}^i$ $(i=1,2)$ перемещения и напряжения первого и второго состояний.

Тогда, согласно теореме Бетти, для любого r справедливы равенства.

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(u_r^1\sigma_r^2+u_\theta^1\tau_{r\theta}^2\right)r^2\sin\theta\,d\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(u_r^2\sigma_r^1+u_\theta^2\tau_{r\theta}^1\right)r^2\sin\theta\,d\theta \tag{3.6}$$

Подставляя *(2.3)* в *(3.6)* получаем:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(Q_{rk}U_p+T_kW_p\right)\sin\theta\,d\theta=0\quad(p\neq k) \tag{3.7}$$

4.Как было отмечено выше, обобщенное условие ортогональности однородных решений *(3.7)* позволяет точно решить задачу для конуса только при смешанных торцевых условиях. Во всех остальных случаях для удов-летворения граничных условий на торцах конуса приходится обращаться к различным приближенным подходам.

Поэтому рассмотрим вопрос об удовлетворении граничных условий на торцах конуса при помощи класса однородных решений.

Пусть на торцах заданы граничные условия *(1.3)*. Для определения произвольных постоянных в *(2.3)* C_k, вариации которых будем считать неза-висимыми, используем вариационный принцип Лагранжа. Поскольку одно-родные решения удовлетворяют уравнению равновесия и граничным усло-виям на конической поверхности, вариационный принцип применяет следующую форму:

$$\sum_{s=1}^{2}r_s^2\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[(\sigma_r-Q_s)\delta u_r+(\tau_{r\theta}-\tau_s)\delta u_\theta\right]_{r=r_s}\sin\theta\,d\theta=0 \tag{4.1}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при независимых вариациях, получим следующую бесконечную систему:

$$\sum_{k=1}^{\infty}m_{jk}C_k=N_j\quad(j=1,2,\ldots) \tag{4.2}$$

Здесь

$$m_{jk}=\sum_{s=1}^{2}\exp(z_j+z_k)\ln r_s\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(Q_{rk}u_{rj}+T_kW_\theta\right)\sin\theta d\theta$$

$$N_j=\sum_{s=1}^{2}\exp\left(z_j+3/2\right)\ln r_s\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(Q_sU_{rj}+\tau_sW_j\right)\sin\theta\,d\theta$$

элементы этих матриц не зависят от вида нагрузки на торцах конуса, а поэтому обращение может быть произведено.

Литература

[1]. Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропной среды.* Гостехиздат, 1950.

[2]. Мехтиев М.Ф., Устинов Ю.А. *Асимптотическое поведение решения осесимметричной задачи теории упругости для полого конуса.* Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок (Днепропетровск, 1969),

М.: Наука, 1970, с. 425- 427.
[3]. Мехтиев М.Ф., Устинов Ю.А. Асимптотическое исследование решения *задачи теории упругости для полого конуса.* ПММ, 1971, вып. 6, с. 1108-1115.

Mehdiyev M.F., Sərdarova N.Ə.

QALINLIĞI DƏYİŞƏN TRANSVETSİAL- İZOTROP KONİK ÖRTÜK ÜÇÜN ELASTİKLİK NƏZƏRİYYƏSİ MƏSƏLƏSİNİN BİRCİNS HƏLLƏRİNİN QURULMASI

Dəyişən qalınlıqlı transversial- izotrop kəsin konus üçün elastiki tarazlıq məsələsinə baxılır. Konusun oturacaqlarında sərhəd şərtlərini ödəyən bircins həllər qurulmuş, həmin həllərin ümumiləşmiş ortoqonallığı isbat olunmuşdur.

MekhtiyevM.F., Sardarova N.A.

CONSTRUCTION OF UNIFORM SOLUTIONS OF ELASTICITY THEORY PROBLEM FOR TRANSVERSIAL- IZOTROP CUT WHOLE CONUS OF CHANGING DENSITY

To be considered an axis- symmetric problem of elastic balance of transversial-izotrop whole cut conus of changing density.

Have been constructed uniform solutions, allowing satisfying optional boundary conditions on the ends of conus.