УДК 539.3

НАСИБОВ В.Г.

ВОЛНЫ В МНОГОСЛОЙНОЙ ТРУБКЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ С ПРОТЕКАЮЩЕЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Изучение процесса распространения волн в деформируемых трубках с протекающей в ней жидкостью, имеет большое практическое значение в связи с широким распространением в технике и живых организмах систем транспортировки жидкости. Одним из актуальных приложений является трубопроводный транспорт. Здесь круг возникающих задач связан, в частности, с увеличением пропускной способности трубопровода, изысканием резервов экономии металла, что в ряде случаев можно добиться за счёт многослойности. Это особенно уместно в случае применения композиционных материалов, обладающих наряду с высокой жесткостью и прочностью, антикорриозными свойствами и относительно малым весом [5]. Другим важным аспектом этой проблемы является гемодинамика. Проблема тока крови и распространение колебаний в крупных кровеносных сосудах имеет фундаментальное значение для полного понимания, регулирования и контроля функции сердечно-сосудистой системы. Таким образом, диагностика, хирургия и протезирование тесно связаны с гемодинамикой.

В известных в этом направлении работах [4], как правило, стенки сосуда предполагаются однородным однослойным пассивным объектом, над которым совершается работа по его деформированию. Однако, такого описания недостаточно, так как, например, для физиологии первостепенное значение имеют деформации, вызываемые активным сокращением мышечных волокон кровеносных сосудов, которым характерна многослойность и непрерывное изменение площади поперечного сечения. Эти обстоятельства могут существенно изменить характер артериального течения и, в том числе, скорость распространения пульсовой волны.

В связи с этим рассматривается пульсирующее течение вязкой жидкости в многослойной упругой, вязко-упругой трубке переменного сечения, а также в таких трубках, обладающих реакцией на внешнее воздействие (пименительно к живому организму- биофактором). Эта задача моделирует движение крови в крупных кровеносных сосудах (артериях и венах). Предложен новый подход, с помощью которого рассматриваемая задача сводится к уравнению типа Штурма-Лиувилля, с помощью которого, в зависимости от режима функционирования системы, может быть решен и проанализирован широкий круг вопросов и задач гидроупругости, учитывающих многослойность материала оболочки, переменность сечения и биофактор (реакцию материала).

§1. Уравнение изгиба многослойной трубки, материал которой обладает реакцией.

1. Пусть дана многослойная тонкостенная цилиндрическая трубка радиуса $R = R(x)$, длиной l (конечной и полубесконечной) и толщиной h, составленная из n чередующихся различных по толщине слоёв δ_s $\left(h = \sum_{s=1}^{n}\delta_s\right)$, которые обладают различными упругими или вязко-упругими свойстввами E_s $\left(s = \overline{1,n}\right)$ и связаны между собой общими круговыми концентрическими поверхностями. При этом $R(x)$- монотонно убывающая функция, для которой при $\forall l \in [0,+\infty)$ введём обозначения: $R(l) = R_l$ $\left(R_\infty = \lim_{x\to\infty} R(x)\right)$. Условие контакта между слоями пакета заключается в их жестком сцеплении. Из этого следует равенство на поверхностях контакта перемещений, напряжений и отсутствие взаимного давления слоёв. В дальнейшем будем пользоваться гипотезой плоских сечений, при которых сформулированные выше условия выполняются автоматически. Согласно сделанным предположениям, в случае линейной упругости и линейной наследственности, в каждом слое напряжение σ_s связано с деформацией e_s соответственно выражением

$$\sigma_s = E_s e_s \qquad \text{и} \qquad \sigma_s = E_s^{\vee} e_s \ . \tag{1.1}$$

Здесь E_s^*- оператор наследственного типа: $E_s^* = E_s\left(1-\Gamma_s^*\right)$, Γ_s^*- оператор релаксации и

$$\Gamma_s^* = \int_{-\infty}^{t}\Gamma_s(t-\theta)f(\theta)d\theta = \int_{0}^{\infty}\Gamma_s(\theta)f(t-\theta)d\theta \ .$$

При этом, в случае малых радиальных перемещений, деформация определяется зависимостью $e_s = W/R$, где $W(x,t)$- радиальное перемещение стенки для пакета в целом. Учитывая последнее в *(1.1)*, получим

$$\sigma_s = E_s\frac{W}{R} \qquad \text{и} \qquad \sigma_s = E_s^{\vee}\frac{W}{R} \ . \tag{1.2}$$

соответственно в случае линейной упругости и линейной наследственности.

Окружное усилие N, согласно общей теории тонких оболочек, определим формулой

$$N = \sum_{s=1}^{n}\int_{a_s}^{a_{s+1}}\sigma_s dz = \sum_{s=1}^{n}\delta_s\sigma_s \tag{1.3}$$

где $a_s = \sum_{k=0}^{s-1}\delta_k$, $\delta_0 = 0$ (интегрирование проведено по толщине каждого слоя от его внутренней поверхности до наружной, а суммирование- по всем n слоям). Учитывая в *(1.3)* соотношения *(1.2)* имеем соответственно

$$N = \alpha_n \frac{W}{R}, \quad \left(\alpha_n = \sum_{s=1}^{n} \delta_s E_s \right) \quad , \tag{1.4}$$

$$N = \frac{1}{R} \sum_{s=1}^{n} \delta_s E_s \left[W - \int_0^{\infty} \Gamma_s(\theta) W(x, t-\theta) d\theta \right] \quad . \tag{1.5}$$

Наконец, будем полагать, что раздел слоёв симметричен относительно срединной поверхности. Тогда, пренебрегая динамическая эффектами в области поперечного сечения трубки, и приняв за основу безмоментную теорию из уравнения статики [1], получим следующую зависимость

$$P = \frac{N}{R} \quad , \tag{1.6}$$

которая с учётом *(1.4)* и *(1.5)*, для случая линейной упругости и линейной наследственности, соответственно примет вид

$$P(x,t) = \alpha_n \frac{w}{R^2} \tag{1.7}$$

и

$$P(x,t) = \frac{1}{R^2} \sum_{s=1}^{n} \delta_s E_s \left[W - \int_0^{\infty} \Gamma_s(\theta) W(x, t-\theta) d\theta \right] \quad . \tag{1.8}$$

Здесь $P(x,t)$- гидродинамическое давление, действующее на стенки сосуда.

2. До сих пор стенки сосуда моделировались многослойной тонкостенной цилиндрической трубкой, материал которой обладает упругими или вязко-упругими свойствами. Однако этого описания, при котором стенки сосуда предполагаются пассивным объектом, как мы отметили ранее, недостаточно. Поэтому, в развитиии предыдущего пункта, далее нами принята модель деформируемого твёрдого тела, обладающего реакцией на внешнее воздействие [3], которая основывается на гипотезе о том, что материал тела обладает способностью реагировать на внешнее воздействие таким образом, что изменяет его интенсивность. При этом уравнение связи между напряжениями и деформациями не претерпевает изменения.

Согласно принятой гипотезе, истинное напряжение σ_s в каждом слое в данный момент времени будет равно сумме пассивного напржения σ_s^0 и реакции $R_B : \sigma_s = \sigma_s^0 + R_B(t)$. Причём биофактор зависит от величины приложенного усилия в момент времени, предшествующей данному

$$R_B = -A_s \sigma_s^0 (t - \tau) \quad ,$$

где $0 < A_s < 1$, τ - время запаздывания реакции и $\tau << t$.

Тогда

$$\sigma_s = (1 - A_s) \sigma_s^0 + A_s \tau \frac{\partial \sigma_s^0}{\partial t} \quad . \tag{1.9}$$

Согласно сделанным предположениям, в каждом слое напряжение σ_s^0 при малых радиальных перемещениях выражается следующей зависимостью

$$\sigma_s^0 = E_s \frac{W}{R}$$

в случае линейной упругости, и

$$\sigma_s^0 = E_s^{\vee} \frac{W}{R}$$

в случае линейной наследственности. Окружённое усилие N, согласно общей теории тонких оболочек, также определим формулой *(1.3)*. Комбинируя *(1.3)*, *(1.6)*, *(1.9)*, *(1.10)* для случая линейной упругости, и *(1.3)*, *(1.6)*, *(1.9)*, *(1.11)* для случая линейной наследственности, соответственно получим

$$P(x,t) = \frac{1}{R^2}\sum_{s=1}^{n}\delta_s E_s\left[(1-A_s)W + A_s\tau\frac{\partial W}{\partial t}\right], \qquad (1.12)$$

$$P(x,t) = \frac{1}{R^2}\sum_{s=1}^{n}\delta_s E_s\left[(1-A_s)(\cdot) + A_s\tau\frac{\partial}{\partial t}(\cdot)\right]\left(W - \int_0^\infty \Gamma_s(\theta)W(x,t-\theta)d\theta\right) \qquad (1.13)$$

Заметим, что полагая в *(1.13)* поочерёдно $A_s = 0$; $\Gamma_s = 0$ и $A_s = 0$, $\Gamma_s = 0$, получаем модели деформируемых твёрдых тел соответственно для линейно-наследственной трубки, линейно-упругой трубки с реакцией и линейно-упругой трубки.

§2. Вывод разрешающих уравнений.

1. Линейно-наследственная трубка, материал которой обладает реакцией. Будем считать, что жидкость (кровь)- вязкая и несжимаемая, а её течение-осесимметричное и ламинарное. Для замыкания уравнения *(1.13)* выпишем усреднённые уравнения движения и неразрывности, которые с учётом условия непрницаемости, для деформируемой трубки переменного кругового сечения имеют вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{8\chi}{R^2}U = 0, \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(SU) + L\frac{\partial W}{\partial t} = 0, \qquad (2.2)$$

где $U(x,t)$- усреднённая скорость течения жидкости, ρ- её плотность, χ- кинематический коэффициент вязкости, $S(x) = \pi R^2(x)$- площадь поперечного сечения трубки, а $L = 2\pi R(x)$- длина её окружности. Определив расход жидкости формулой $Q = SU$, применив к *(1.13)* операцию $\frac{\partial}{\partial t}$, перепишем полученный результат и уравнения *(2.1)*, *(2.2)* в следующем виде

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\rho}{\pi R^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{8\chi}{R^2}Q\right) = 0, \qquad (2.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi R}\frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{1}{2\pi R^3}\sum_{s=1}^{n}\delta_s E_s\left[\left(1-A_s\right)(\cdot)+A_s\tau\frac{\partial}{\partial t}(\cdot)\right]\times$$
$$\times\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\int_0^\infty\Gamma_s(\theta)\frac{\partial Q(x,t-\theta)}{\partial x}d\theta\right)=0 \quad . \qquad (2.5)$$

Применив к *(2.3)* операцию $-\frac{\partial}{\partial t}$, а к *(2.5)* операцию $\frac{\partial}{\partial x}$ и складывая их, получим следующее разрешающее (волновое) уравнение

$$\sum_{s=1}^{n}\delta_s E_s\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{R^3}\left[\left(1-A_s\right)(\cdot)+A_s\tau\frac{\partial}{\partial t}(\cdot)\right]\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\int_0^\infty\Gamma_s(\theta)\frac{\partial Q(x,t-\theta)}{\partial x}d\theta\right)\right\}-$$
$$-\frac{2\rho}{R^2}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}+\frac{8\chi}{R^2}\frac{\partial Q}{\partial t}\right)=0 \quad . \qquad (2.6)$$

2. Линейно-наследственная трубка. Комбинируя уравнения *(1.8)*, *(2.1)*, *(2.2)* и проведя аналогичные рассуждения, как и в предыдущем пункте, мы можем получить волновое уравнение. Но проще в уравнении *(2.6)* взять $A_s=0$:

$$\sum_{s=1}^{n}\delta_s E_s\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{R^3}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\int_0^\infty\Gamma_s(\theta)\frac{\partial Q(x,t-\theta)}{\partial x}d\theta\right)\right]-\frac{2\rho}{R^2}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}+\frac{8\chi}{R^2}\frac{\partial Q}{\partial t}\right)=0 \,. \quad (2.7)$$

3. Линейно-упругая трубка, материал которой обладает реакцией. Волновое уравнение получим из *(2.6)* при $\Gamma_s=0$:

$$\sum_{s=1}^{n}\delta_s E_s\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{R^3}\left[\left(1-A_s\right)\frac{\partial Q}{\partial x}+A_s\tau\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial t}\right]\right\}-\frac{2\rho}{R^2}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}+\frac{8\chi}{R^2}\frac{\partial Q}{\partial t}\right)=0 \,. \quad (2.8)$$

4. Линейно- упругая трубка. Волновое уравнение в этом случае получим из *(2.6)* при $\Gamma_s=0$ и $A_s=0$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R^3}\frac{\partial Q}{\partial x}\right)-\frac{2\rho}{R^2}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}+\frac{8\chi}{R^2}\frac{\partial Q}{\partial t}\right)=0 \quad . \qquad (2.9)$$

Далее, мы займёмся решением уравнения *(2.6)*, так как уравнения *(2.7)-(2.9)*, как мы видели выше, легко из него получаются. Для описания сложных импульсов (характерных, например, для системы кровообращения), используя гармонический анализ, решение уравнения *(2.6)* ищем в виде конечной суммы основного колебания и более высоких гармоник

$$Q(x,t)=\sum_{k=1}^{N}y_k(x)\exp(ik\omega t) \quad . \qquad (2.10)$$

Здесь N - гармоническое число, а ω - задаваемая круговая частота. В результате подстановки *(2.10)* в *(2.6)* получим

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{R^3}\frac{dq_k}{dx}\right)-\frac{2\rho}{\beta_{k1}R^2}\left(\frac{8ik\omega\chi}{R^2}-k^2\omega^2\right)q_k=0 \;, \qquad (2.11)$$

где

$$\beta_{k1}=\beta_{nk}(A_s;\Gamma_s)=\sum_{s=1}^{n}\delta_s E_s J_{sk} T_{sk}\ ,\quad J_{sk}=1-A_s+iA_s\tau k\omega\ ,$$

$$T_{sk}=1-\int_0^\infty \Gamma_s(\theta)\exp(-ik\omega\theta)d\theta\,.$$

Введя обозначения

$$\beta_{k2}=\beta_{nk}(0;\Gamma_s),\quad \beta_{k3}=\beta_{nk}(A_s;0),\quad \beta_{k4}=\beta_{nk}(0;0)$$

уравнение *(2.11)* и уравнения, получаемые из него при $\Gamma_s=0$; $A_s=0$; и $\Gamma_s=0$, $A_s=0$; соответствующие волновым уравнениям для линейно-наследственной трубки, линейно-упругой трубки с реакцией и линейно упругой трубки, можно объединить и написать одной формулой

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{R^3}\frac{dq_k}{dx}\right)-\frac{2\rho}{\beta_{kj}R^2}\left(\frac{8ik\omega\chi}{R^2}-k^2\omega^2\right)q_k=0\qquad \left(j=\overline{1,4}\right)\qquad (2.12)$$

Проведя в *(2.12)* замену

$$q_k(x)=R^{3/2}(x)y_k(x)\qquad (2.13)$$

получим уравнение

$$y_k''(x)+\left(\varphi_{kj}(x)+\lambda_{kj}^2\right)y_k(x)=0\ ,\qquad \left(j=\overline{1,4}\right)\qquad (2.14)$$

где, для краткости записи, введены следующие обозначения

$$\varphi_{kj}=\frac{3}{4R^2}\left(2RR''-5R'^2\right)+\frac{2\rho k^2\omega^2}{\left|\beta_{kj}\right|^2}\left[\left(\operatorname{Re}\beta_{kj}+\frac{8\chi}{k\omega RR_m}\operatorname{Im}\beta_{kj}\right)-\right.$$

$$\left.-i\left(\operatorname{Im}\beta_{kj}-\frac{8\chi}{k\omega RR_m}\operatorname{Re}\beta_{kj}\right)\right](R-R_m)\quad ,\qquad (2.15)$$

$$\lambda_{kj}^2=\frac{2\rho k^2\omega^2}{\left|\beta_{kj}\right|^2}R_m\left[\left(\operatorname{Re}\beta_{kj}+\frac{8\chi}{k\omega R_m^2}\operatorname{Im}\beta_{kj}\right)-\right.$$

$$\left.-i\left(\operatorname{Im}\beta_{kj}-\frac{8\chi}{k\omega R_m^2}\operatorname{Re}\beta_{kj}\right)\right]=\lambda_{0kj}-i\,\lambda_{1kj}\ ,\qquad m=l;+\infty\ .\qquad (2.16)$$

Если рассматривается конечная трубка длиной l, то в *(2.15)*, *(2.16)* полагаем $m=l$, а если- полубесконечная, то $m=+\infty$ и считая, что трубка на бесконечности имеет постоянное поперечное сечение дополнительно предположим, что $\lim\limits_{x\to\infty}R'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}R''(x)=0$. Комбинируя *(2.13)* и *(2.10)* решение уравнения *(2.6)* можно представить в виде

$$Q=\sum_{k=1}^{N}R^{3/2}y_k(x)\exp(ik\omega t)\quad .\qquad (2.17)$$

Значение λ_{kj} из дисперсионного уравнения *(2.16)* можно записать в виде

$$\lambda_{kj}=\pm\left(\delta_{0kj}-i\,\delta_{1kj}\right)\ ,\qquad (2.18)$$

где

$$\delta_{0kj} = \left[\frac{1}{2}\left(\left|\lambda_{kj}^2\right| + \lambda_{0kj}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \delta_{1kj} = \left[\frac{1}{2}\left(\left|\lambda_{kj}^2\right| - \lambda_{0kj}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

При этом скорость распространения k-ой волны определяется $c_{kj} = k\omega\,\delta_{0kj}^{-1}$, а δ_{1kj} -коэффициент её затухания. Если жидкость идеальная $(\chi = 0)$, то в случае линейно-упругой трубки скорость определяется формулой

$$c_{k4} = \frac{\alpha_n}{2\rho R_m}, \tag{2.19}$$

а в случае линейно-упругой трубки, материал которой обладает реакцией, при условии, что реакция мгновенна $(\tau = 0)$- формулой

$$c_{k3} = \frac{\sum_{s=1}^{n}\delta_s E_s(1 - A_s)}{2\rho R_m}.$$

Отсюда следует, что в обоих случаях скорость не зависит от гармоники и реакция понижает скорость распространения волны. Если трубка одгослойная $(n = 1, \delta_1 = h, E_1 = E)$, то из *(2.19)* получаем известную формулу Резаля

$$c_{k4} = \frac{Eh}{2\rho R_m}.$$

Для определённости мы будем использовать тот корень дисперсионного уравнения, для которого $\operatorname{Im}\lambda_{kj} < 0$, т.е. $\lambda_{kj} = \delta_{0kj} - i\delta_{1kj}$. Применяя метод вариации произвольных постоянных, уравнение *(2.14)* сведём к эквивалентному интегральному уравнению

$$y_k = B_1 \exp(-i\lambda_{kj}x) + B_2 \exp(i\lambda_{kj}x) - \frac{i}{2\lambda_{kj}}\int_{x_1}^{x} \exp[i\lambda_{kj}(\tau - x)]\varphi_{kj}(\tau)y_k(\tau)d\tau +$$

$$+\frac{i}{2\lambda_{kj}}\int_{x_2}^{x} \exp[i\lambda_{kj}(x - \tau)]\varphi_{kj}(\tau)y_k(\tau)d\tau \tag{2.20}$$

При том или ином выборе постоянных B_1, B_2 и x_1, x_2 получаются интегральные уравнения *(2.14)*, с помощью которых можно решать различные краевые задачи.

§3. Распространение волн в многослойной трубке, содержащей вязкую жидкость.

С помощью уравнения типа Штурма-Лаувилля *(2.14)* (в нём λ_{kj}- фиксированное число, выражающееся через геометрические и механические параметры системы "оболочка-жидкость") может быть решён и проанализирован широкий круг вопросов и задач гидроупругости, в том смысле, что в *(2.14)* индексу j соответствуют уравнения, которые получаются при исследовании распространения гармонических осесимметричных волн в многослойной однородной:

- линейно-наследственной трубке переменного сечения с реакцией $(j=1)$;

- линейно-наследственной трубке переменного сечения $(j=2)$;

- линейно-упругой трубке переменного сечения с реакцией $(j=3)$;

- линейно-упругой трубке переменного сечения $(j=4)$, содержащей вязкую жидкость.

Поэтому мы не выделяем определяющие соотношения, описывающие поведение стенок трубки, так как все четыре случая свелись к математически идентичному уравнению *(2.14)* с различными φ_{kj}, λ_{kj}.

1. Конечная трубка. Для описания давления, расхода и перемещения в качестве граничных условий примем

$$P(0,t)=\sum_{k=1}^{N} P_{0k}\exp(ik\omega t), \quad P(l,t)=\sum_{k=1}^{N} P_{lk}\exp(ik\omega t) \qquad (3.1)$$

Учитывая эти условия в *(2.5)* и *(2.17)*, получим следующие краевые условия для уравнения *(2.14)*:

$$y_k'(m)+H_m y_k(m)=N_{mk} \quad , \qquad m=0\,;l \quad , \qquad (3.2)$$

где

$$H_m=\frac{d}{dx}\left(\ln R^{\frac{3}{2}}(x)\right)\Bigg|_{x=m} , \qquad N_{mkj}=-\frac{i2\pi k\omega P_{mk}}{\beta_{jk}} R^{\frac{3}{2}}(m) \quad .$$

Задача *(2.14)*, *(3.1)*- регулярная задача типа Штурма-Лиувилля.

Решение уравнения *(2.20)* при $B_1=1, B_2=0, x_1=x_2=l$ обозначим через $y_k(x,-\lambda_{kj})$, а при $B_1=0, B_2=1, x_1=x_2=0$- через $y_k(x,\lambda_{kj})$. Эти решения можно представить в виде

$$y_k(x,\mp\lambda_{kj})=z_k(x,\mp\lambda_{kj})\exp(\mp i\lambda_{kj}x) \quad ,$$

где $z_k(x,-\lambda_{kj})$ и $z_k(x,\lambda_{kj})$ являются решениями соответственно интегральных уравнений

$$z_k(x,-\lambda_{kj})=1-\frac{1}{2\lambda_{kj}}\int_x^l\left\{\exp\left[-2i\lambda_{kj}(\tau-x)\right]-1\right\}\varphi_{kj}z_k(\tau,-\lambda_{kj})d\tau \quad ,$$

$$z_k(x,\lambda_{kj})=1-\frac{1}{2\lambda_{kj}}\int_0^x\left\{\exp\left[-2\lambda_{kj}(x-\tau)\right]-1\right\}\varphi_{kj}z_k(\tau,\lambda_{kj})d\tau \quad .$$

Эти уравнения легко решаются методом последовательных приближений. Любое решение уравнения *(2.14)* можно представить в иде линейной комбинации линейно независимых решений $y_k(x,-\lambda_{kj})$ и $y_k(x,\lambda_{kj})$:

$$y_k(x)=\alpha_{1k}y_k(x,-\lambda_{kj})+\alpha_{2k}y_k(x,\lambda_{kj}) \quad .$$

Удовлетворяя это решение краевым условиям *(3.2)*, определим постоянные α_{1k} и α_{2k}. Определив функцию y_k, легко вычислить с помощью формулы *(2.17)* расход жидкости и, далее, из уравнения неразрывности *(2.4)* и соотношения *(1.13)*- перемещение и давление.

2. Полубесконечная трубка (случай отсутствия отражённых волн). Рассмотрим волны, бегущие в одном направлении в полубесконечной многослойной трубке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость. В зависимости от режима функционирования системы "оболочка-жидкость" для описания давления, расхода, и перемещения в начальном сечении трубки $(x=0)$ задаётся давление *(3.1)* или расход жидкости

$$Q(0,t)=\sum_{k=1}^{N} q_k \exp(ik\omega t) \quad . \tag{3.3}$$

Учитывая первое условие *(3.1)* в *(2.5)* и *(2.17)* или *(3.3)* в *(2.17)*, для уравнения *(2.14)* получаем следующее граничное условие:

$$y_k'(0)+H_0 y_k(0)=N_{0kj} \quad , \tag{3.4}$$

или

$$y_k(0)=R^{-\frac{3}{2}}(0)q_{0k} \quad . \tag{3.5}$$

Далее будем полагать, что

$$\int_0^\infty |\varphi_{kj}(x)|dx<+\infty \quad . \tag{3.6}$$

Мы займёмся решением сингулярной граничной задачи *(2.14)*, *(3.4)* и *(2.14)*, *(3.5)* при условиии *(3.6)*.

С этой целью, положив в *(2.20)* $B_1=1, B_2=0$ и $x_1=x_2=\infty$, получим интегральное уравнение

$$y_k(x)=\exp(-i\lambda_{kj}x)-\frac{1}{\lambda_{kj}}\int_x^\infty \sin\lambda_{kj}(\tau-x)\varphi_{kj}y_k(\tau)d\tau \quad , \tag{3.7}$$

которое заменой

$$y_k(x)=z_k(x)\exp(-i\lambda_{kj}x) \tag{3.8}$$

сводится к интегральному уравнению

$$z_k(x)=1+\frac{1}{2\lambda_{kj}}\int_x^\infty \{1-\exp[-2i\lambda_{kj}(\tau-x)]\}\varphi_{kj}(\tau)z_k(\tau)d\tau \quad . \tag{3.9}$$

Решение уравнения *(3.9)* можно представить в виде

$$z_k(x,-\lambda_{kj})=\sum_{\nu=0}^{\infty} z_k^{(\nu)}(x) \quad ,$$

где

$$z_k^{(0)}(x)=1,\ z_k^{(\nu+1)}(x)=\frac{1}{2\lambda_{kj}}\int_x^\infty \{1-\exp[-2i\lambda_{kj}(\tau-x)]\}\varphi_{kj}(\tau)z_k^{(\nu)}(\tau)d\tau, \quad \nu=0,1,2,\ldots$$

Учитывая, что $\left|\exp[-2i\lambda_{kj}(\tau-x)]\right|\le 1$ при $\tau\ge x$ и $\operatorname{Im}\lambda_{kj}<0$, по индукции легко находим оценку

$$\left|z_k^{(\nu)}(x,-\lambda_{kj})\right|\le\frac{1}{\nu!}B_{kj}^{\nu}(x),\ B_{kj}(x)=\frac{1}{|\lambda_{kj}|}\int_x^\infty|\varphi_{kj}(\tau)|d\tau, \quad \nu=0,1,2,\ldots.$$

Из этих оценок сразу же следует, что

$$\left|z_k\left(x,-\lambda_{kj}\right)\right| = \left|\sum_{\nu=1}^{\infty} z_k^{(\nu)}(x)\right| \le \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} B_{kj}^{\nu}(x) \le \exp\left(B_{kj}(0)\right) = c_{kj}$$

и, следовательно ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_k^{(\nu)}$ равномерно и абсолютно сходится на полуоси $x \ge 0$ и его сумма $z_k\left(x,-\lambda_{kj}\right)$ равномерно ограничена при $x \to \infty$. Функция $y_k\left(x,-\lambda_{kj}\right) = z_k\left(x,-\lambda_{kj}\right)\exp\left(-i\lambda_{kj}x\right)$ из *(3.8)* является решением уравнения *(3.7)* и, следовательно, уравнения *(2.14)*. Из уравнения *(3.9)* имеем $\left|z_k\left(x,-\lambda_{kj}\right)-1\right| \le c_{kj}B_{kj}(x)$, откуда вытекает, что $z_k\left(x,-\lambda_{kj}\right) = 1 + 0(1)$ при $x \to \infty$. Подставляя этот результат в *(3.8)*, получим

$$y_k\left(x,-\lambda_{kj}\right) = \exp\left(-i\lambda_{kj}x\right)\left[1+0(1)\right] \quad \text{при} \quad x \to \infty \tag{3.10}$$

Далее, дифференцируя обе части *(3.7)*, получим (для решения $y_k\left(x,-\lambda_{kj}\right)$)

$$y_k'\left(x,-\lambda_{kj}\right) = \exp\left\{-i\lambda_{kj} - \frac{1}{2}\int_x^{\infty}\left[1+\exp\left(-2i\lambda_{kj}(\tau-x)\right)\right)\varphi_{kj} z_k\left(\tau,-\lambda_{kj}\right)d\tau\right\} .$$

Учитывая, что интеграл в правой части последнего равенства есть $0(1)$ при $x \to \infty$, имеем

$$y_k'\left(x,-\lambda_{kj}\right) = \exp\left(-i\lambda_{kj}x\right)\left[-i\lambda_{kj} + 0(1)\right] \quad \text{при} \quad x \to \infty \tag{3.11}$$

Наконец, построим решение

$$y_k(x) = N_{0kj}G_{kj}^{-1}y_k\left(x,-\lambda_{kj}\right) , \tag{3.12}$$

где

$$G_{kj} = H_0 - i\lambda_{kj} + \int_0^{\infty}\left(\frac{H_0}{\lambda_{kj}}\sin\lambda_{kj}\tau - \cos\lambda_{kj}\tau\right)\varphi_{kj}(\tau)y_k\left(\tau,-\lambda_{kj}\right)d\tau .$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что *(3.12)* удовлетворяет условию *(3.4)*, т.е. является решением граничной задачи *(2.14)*, *(3.4)*.

Решение же граничной задачи *(2.14)*, *(3.5)* можно представить в виде

$$y_k(x) = q_{0k}\left(R^{\frac{3}{2}}(0)y_k\left(0,-\lambda_{kj}\right)\right)^{-1} y_k\left(x,-\lambda_{kj}\right) .$$

Определив функцию $y_k(x)$, как и в предыдущем параграфе, в обеих случаях легко вычислить расход жидкости, перемещение и давление.

3. Полубесконечная трубка (случай существования отражённых волн). Решение $y_k\left(x,-\lambda_{kj}\right)$ соответствует решению $\exp\left(-i\lambda_{kj}x\right)$ уравнения $y_k'' + \lambda_{kj}^2 y_k = 0$. Построим теперь решение $\tilde{y}_k\left(x,\lambda_{kj}\right)$ уравнения *(2.14)*, соответствующее решению $\exp\left(i\lambda_{kj}x\right)$ выше приведённого уравнения. Этим мы установим существование волн, бегущих в обратном направлении, возникновение которых можно объяснить непрерывным изменением площади поперечного сечения. С этой целью рассмотрим интегральное уравнение

$$y_k(x)=\exp(i\lambda_{kj}x)-\frac{i}{2\lambda_{kj}}\int_a^x\exp(-i\lambda_{kj}(x-\tau))\varphi_{kj}(\tau)y_k(\tau)d\tau-$$

$$-\frac{i}{2\lambda_{kj}}\int_x^\infty\exp(i\lambda_{kj}(x-\tau))\varphi_{kj}(\tau)y_k(\tau)d\tau) \quad , \qquad (3.13)$$

которое получается из *(2.20)* при $B_1=0, B_2=1$, $x_1=a$ (a-некоторое положительное число), $x_2=\infty$.

С помощью подстановки

$$y_k(x)=z_k(x)\exp(i\lambda_{kj}x) \qquad (3.14)$$

уравнение *(3.13)* преобразуется к виду

$$z_k(x)=1-\frac{1}{2\lambda_{kj}}\int_a^x\exp(-2i\lambda_{kj}(x-\tau))\varphi_{kj}(\tau)z_k(\tau)d\tau-$$

$$-\frac{1}{2\lambda_{kj}}\int_x^\infty\varphi_{kj}(\tau)z_k(\tau)d\tau \quad . \qquad (3.15)$$

Положим

$$z_k^{(0)}(x)=1,\ z_k^{(\nu)}(x)=-\frac{1}{2\lambda_{kj}}\int_a^x\exp(-2i\lambda_{kj}(x-\tau))\varphi_{kj}(\tau)z_k^{(\nu-1)}(\tau)d\tau-$$

$$-\frac{1}{2\lambda_{kj}}\int_x^\infty\varphi_{kj}(\tau)z_k^{(\nu-1)}(\tau)d\tau,\quad \nu=1,2,\ldots.$$

И учитывая, $|\exp(-2i\lambda_{kj}(x-\tau))|\le 1$ при $x\ge\tau$, $\operatorname{Im}\lambda_{kj}<0$, с помощью индукции легко вывести оценку

$$|z_k^{(\nu)}(x)|\le\left(\frac{1}{|\lambda_{kj}|}\int_a^\infty|\varphi_{kj}(x)|dx\right)^\nu=B_{kj}^\nu(a) \quad . \qquad (3.16)$$

Заметим, что поскольку $B_{kj}(x)\to 0$ при $x\to\infty$, существует настолько большое a, что

$$B_{kj}(x)<1 \quad . \qquad (3.17)$$

Из оценок *(3.16)* и условия *(3.17)* следует, что ряд

$$z_k(x,\lambda_{kj})=\sum_{\nu=0}^\infty z_k^{(\nu)}(x)$$

сходится абсолютно и равномерно на $x\ge a$, причём $z_k(x,\lambda_{kj})$ равномерно ограничена и является единственным решением уравнения *(3.15)*. Тогда функция $\tilde{y}_k(x,\lambda_{kj})=z_k(x,\lambda_{kj})\exp(i\lambda_{kj}x)$ будет удовлетворять уравнению *(3.13)*. С помощью интегрального уравнения *(3.13)* функция $\tilde{y}_k(x,\lambda_{kj})$ определена лишь при $x\ge a$. Далее мы будем рассматривать функцию $\tilde{y}_k(x,\lambda_{kj})$ как заданную на полуоси $x\ge 0$, продол-жая её на отрезок $[0,a]$, как решение уравнения *(2.14)*. Легко проверить, что решение $\tilde{y}_k(x,\lambda_{kj})$, определённое таким образом на всей полуоси $x \ge 0$, удовлетворяет *(2.14)* при всех $x \ge 0$.

Рассмотрим интегральное уравнение *(3.15)*. Из *(3.16)*, *(3.17)* следует, что при $x \ge a$ функция $z_k(x, \lambda_{kj})$ ограничена

$$\left|z_k(x, \lambda_{kj})\right| \le \left(1 - \frac{1}{|\lambda_{kj}|}\int_a^\infty |\varphi_{kj}(x)| dx\right)^{-1} = c_{kj}$$

и

$$\left|\frac{i}{2\lambda_{kj}}\int_a^x \exp[-2i\lambda_{kj}(x-\tau)]\varphi_{kj} z_k(\tau, \lambda_{kj}) d\tau \le \frac{c_{kj}}{2|\lambda_{kj}|}\int_a^x \exp[-2\delta_{1kj}(x-\right.$$

$$\left.-\tau)]|\varphi_{kj}| d\tau = \frac{c_{kj}}{2\lambda_{kj}}\left(\int_a^{\frac{1}{2}x} \exp[-2\delta_{1kj}(x-\tau)]|\varphi_{kj}| d\tau + \int_{\frac{1}{2}x}^x \exp[-2\delta_{1kj}(x-\tau)]|\varphi_{kj}| d\tau\right) \le\right.$$

$$\le \frac{c_{kj}}{2|\lambda_{kj}|}\left(\exp(-\delta_{1kj}x)\int_a^\infty |\varphi_{kj}| d\tau + \int_{\frac{1}{2}x}^x |\varphi_{kj}| d\tau\right), \qquad (3.18)$$

$$\left|\frac{i}{2\lambda_{kj}}\int_x^\infty \varphi_{kj} z_{kj}(\tau, \lambda_{kj}) d\tau\right| \le \frac{c_{kj}}{2|\lambda_{kj}|}\int_x^\infty |\varphi_{kj}| d\tau \quad . \qquad (3.19)$$

Правые части в выражениях *(3.18)* и *(3.19)* стремятся к нулю при $x \to +\infty$. Отсюда и зи *(3.17)* вытекает, что $z_k(x, \lambda_{kj}) = 1 + 0(1)$ при $x \to +\infty$. Подставляя этот результат в *(3.14)* для $\tilde{y}_k(x, \lambda_{kj})$ получим

$$\tilde{y}_k(x, \lambda_{kj}) = \exp(i\lambda_{kj}x)[1 + 0(1)] \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \qquad (3.20)$$

Итак, мы при условии *(3.6)* установили существование отражённых волн.

Продифференцируем обе части уравнения *(3.13)* для $\tilde{y}_k(x, \lambda_{kj})$ и представим его в виде

$$\tilde{y}_k'(x, \lambda_{kj}) = \exp(i\lambda_{kj}x)\left\{i\lambda_{kj} - \frac{1}{2}\int_0^x \exp[-2i\lambda_{kj}(x-\tau)\varphi_{kj} z_k(\tau, \lambda_{kj}) d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_x^\infty \varphi_{kj} z_k(\tau, \lambda_{kj}) d\tau\right\} \quad .$$

В силу условий *(3.18)*, *(3.19)* мы заключаем, что интегралы в правой части последнего равенства есть $0(1)$ при $x \to +\infty$ и отсюда следует, что при $x \to +\infty$

$$\tilde{y}_k'(x, \lambda_{kj}) = \exp(i\lambda_{kj}x)[i\lambda_{kj} + 0(1)] \quad . \qquad (3.21)$$

Из формул *(3.10)*, *(3.11)*, *(3.20)* и *(3.21)* следует, что для вронсиана решений $y_k(x, -\lambda_{kj})$, $\tilde{y}_k(x, \lambda_{kj})$ имеет место формула

$$W\left(y_k\left(x,-\lambda_{kj}\right),\ \tilde{y}_k'\left(x,\lambda_{kj}\right)\right)=2i\lambda_{kj} \qquad (3.22)$$

Для определения распределения перемещения, давления и расхода жидкости в начальном сечении трубки $x=0$ зададим давлений и расход

$$P(0,t)=\sum_{k=1}^{N}P_{0k}\exp(ik\omega t),\ Q(0,t)=\sum_{k=1}^{N}q_{0k}\exp(ik\omega t) \qquad (3.23)$$

Учитывая *(3.23)* в *(2.5)*, *(2.17)* получим

$$y_k(\circ)=R^{-\frac{3}{2}}(0)q_{0k}\equiv y_0\ , \qquad (3.24)$$

$$y_k'(0)=\frac{d}{dx}\left(R^{-\frac{3}{2}}(x)\right)\Bigg|_{x=0}q_{0k}-i\beta_{nkj}^{-1}2\pi R^{\frac{3}{2}}(0)k\omega P_{0k}=y_{00}\ . \qquad (3.25)$$

Дальнейшей нашей целью является отыскание решения сингулярной граничной задачи типа Штурма-Луивилля *(2.14)*, *(3.24)*,*(3.25)*. Решения $y_k\left(x,-\lambda_{kj}\right)$ (из предыдущего пункта) и $\tilde{y}_k\left(x,-\lambda_{kj}\right)$ уравнения *(2.14)* в силу *(3.22)* линейно независимы и, поэтому, любое решение уравнения *(2.14)* можно представить в виде их линейной комбинации

$$y_k=\beta_{1k}y_k\left(x,-\lambda_{kj}\right)+\beta_{2k}\tilde{y}_k\left(x,\lambda_{kj}\right) \qquad (3.26)$$

Удовлетворяя *(3.26)* граничным условиям *(3.24)* и *(3.25)*, легко найдём постоянные β_{1k} и β_{2k}:

$$\beta_{1k}=\frac{1}{2i\lambda_{kj}}\left[\tilde{y}_k'\left(0,\lambda_{kj}\right)y_0-\tilde{y}_k\left(0,\lambda_{kj}\right)y_{00}\right.\ , \qquad (3.27)$$

$$\beta_{2k}=-\frac{1}{2i\lambda_{kj}}\left[\tilde{y}_k'\left(0,-\lambda_{kj}\right)y_0-\tilde{y}_k\left(0,-\lambda_{kj}\right)y_{00}\right]\ , \qquad (3.28)$$

Построенное решение при $x\to+\infty$ удовлетворяет условию

$$y_k=\left[\beta_{1k}\exp\left(-i\lambda_{kj}x\right)+\beta_{2k}\exp\left(i\lambda_{kj}x\right)\right]\ \left[1+0(1)\right]\ ,$$

где β_{1k} и β_{2k} определяются формулами *(3.27)* и *(3.28)*.

Расход жидкости, перемещение и давление определяются известным образом.

Литература

[1]. Аменздде Ю.А. *Теория упругости.* "Высшая шлола", М., 1976, 272с.

[2]. Аменздде Р.Ю., Насибов В.Г. *Об одном решении задачи о пульсирующем течении жидкости в многослойной упругой трубке переменного сечения.* ДАН России, 1994, т.335, №6, с.714-715.

[3]. Ахундов М.Б., Работнов Ю.Н., Суворова Ю.В. *Модель деформируемого тела с реакцией и приложение её к динамическим задачам биомеханики.* МТТ, №6, 1985, с.96-100.

[4]. *Гидродинамика кровообращения.* "Мир", М., 1971, 269с.

[5]. Малмейстр А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. *Сопротивление жесткости полимерных и композитных материалов.* "Занатне", Рига, 1980, 572с.

[6]. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* "Наука", М., 1969, 528с.

[7]. Насибов В.Г. *Пульсирующее течение вязкой жидкости в многослойной упругой трубке переменного сечения с реакцией.* Сб. науч. тр. по механике, №4, АзИСУ, Баку, 1994, с.134-139.

Nəsibov V.H.

MAYE AXAN DƏYİŞƏN KƏSİKLİ ÇOXLAYLI BORULARDA DALĞALAR

Məqalə özlü maye ilə doldurulmuş reaksiyaya malik olmayan və olan düzxətli çoxlaylı borularda (elastik və özlü-elastik) oxasimmetrik harmonik dalğaların yayılmasının tədqiqinə həsr olunmuşdur. Maye ilə doldurulmuş elastiki və özlü elastiki örtüklərin dinamiki qarşılıqlı təsir məsələlərinin nəzəri hənlləri, sırf texniki problemləri (məsələn borular dinamikası) həll etməyə imkan verməklə yanaşı, həmdə iri qan damarlarında qanın axması məsələlərinin modelləşdirilməsində istifadə oluna bilər.

Nasibov V.G.

THE WAVES IN MANYLAYED TUBE OF A VARIABLE SECTION WITH FLOWING LIQUID

This article is dedicated to the researching of diffusing harmonic axial symmetric waves in the manylayed rectilineral tubes (elastic and viscous elastic) with and without reaction filled with viscous liquid. The received theoretical solutions about dynamic interaction of elastic and viscous elastic covers with interfluent liquid allow us to solve problems concerned not only with technical stuff (like kinds of dynamics of pipelines), but, for example, in modeling the blood movement in the large blood-vessels as well.