УДК 519. 48

БАБАЕВ А.А., МАМЕДОВ О.М.

ИНТЕРПРЕТИРУЕМОСТЬ В МНОГООБРАЗИЯХ КАНТОРОВЫХ АЛГЕБР

Понятие интерпретируемости многообразий широко исследовалось в [1]. Напомним, что многообразие **M** интерпретируемо в многообразии **N** (символически, **M** $\leq$ **N**), если для любой **M**- операции $F_t(x_1,\dots,x_n)$ существует терм $\alpha_t(x_1,\dots,x_n)$ в языке **N** такой, что для любой алгебры (A,G_s) из **N** алгебра $(A,\overline{\alpha_t})$ принадлежит **M**; çäåñü $\overline{\alpha_t}$ есть естественная интерпретация терма α_t в алгебре (A,G_s).

Наша цель - продемонстрировать два свойства отношения интерпретируемости в семействе многообразий канторовых алгебр; эти свойства анонсированы в [2]. Многообразия канторовых алгебр исследовались Сверчковским [3] и Д.М. Смирновым [4].
$n,1,\dots,1$

Многообразие $\mathbf{M}(n)$ канторовых алгебр типа $\langle n,1,\dots,1\rangle$ с n унарными операциями определяется тождествами:

$$f(g_1(x),\dots,g_n(x))=x,$$
$$g_i(f(x_1,\dots,x_n))=x_i\, i=1,\dots n.$$

Предложение 1. $\mathbf{M}(m)\leq \mathbf{M}(n) \Leftrightarrow m\equiv 1(\mathrm{mod}\, n-1)$

Доказательство. Пусть $m=k(n-1)+1$ для некоторого $k>0$ и пусть $f,g_1,\dots,g_n$ - фундаментальные операции $\mathbf{M}(n)$. Рассмотрим следующие термы в $\mathbf{M}(n)$:

$$f'(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_{2n-1},x_{2n},\dots,x_m):=$$
$$:=f(\dots f(f(x_1,\dots,x_n),x_{n+1},\dots,x_{2n-1}),x_{2n},\dots,x_m),$$
$$g_1'(x):=g_1(g_1\dots g_1(g_1(x))\dots)=g_1^k(x),$$
$$g_2'(x):=g_2(g_1^{k-1}(x)),\dots,g_n'(x):=g_n(g_1^{k-1}(x)),$$
$$g_{n+1}'(x):=g_2(g_1^{k-2}(x)),\dots,g_{2n-1}'(x):=g_n(g_1^{k-2}(x)),$$
$$g_{2n}'(x):=g_2(g_1^{k-3}(x)),\dots,g_{3n-2}'(x):=g_n(g_1^{k-3}(x)),\dots$$
$$g_m'(x)\equiv g_{k(n-1)+1}'(x):=g_n(x).$$

Справедливость тождеств

$$(*)\qquad \begin{cases} f'(g_1'(x),\dots,g_m'(x)) = x \\ g_i'(f'(x_1,\dots x_m)) = x_i, \quad i = 1,\dots,m \end{cases}$$

проверяется непосредственно.

Обратное очевидно: если $\mathbf{M}(m) \le \mathbf{M}(n)$, то в $\mathbf{M}(n)$ выполняется $(*)$ для некоторых термов $f', g_1',\dots, g_n'$ и в силу [3] имеем: $m = k(n-1)+1$ для некоторого k.

В качестве следствия получаем некое свойство "универсальности" многообразия $\mathbf{M}(2)$.

Следствие. *Для каждого* $m > 1$, $\mathbf{M}(m) \le \mathbf{M}(2)$.

Понятие k - степени многообразия определено в [5]; напомним, что k - степень многообразия $\mathbf{M}^{[k]}$ имеет те же операции F_s, что и в $\mathbf{M}$, новую k-арную операцию d и новую унарную операцию c. Тождествами, определяющими $\mathbf{M}^{[k]}$ являются:

(0) все тождества $\mathbf{M}$,

(1) $d(x,x,\dots,x) = x$,

(2) $c^k(x) = x$,

(3) $c(d(x_1,\dots,x_k)) = d(cx_2, cx_3,\dots,cx_k,cx_1)$,

(4) $d(d(x_1,\dots,x_k), d(y_1,\dots,y_k),\dots,d(z_1,\dots,z_k)) = d(x_1,y_2,\dots,z_k)$,

(5) $c(F_t(x_1,\dots,x_n)) = F_t(cx_1,cx_2,\dots,cx_n)$,

(6) $F_t(d(x_1^1,\dots,x_k^1), d(x_1^2,\dots,x_k^2),\dots,d(x_1^n,\dots,x_k^n)) =$
$= d(F_t(x_1^1,\dots,x_1^n),\dots F_t(x_k^1,\dots,x_k^n))$

Хорошо известно [1], что для любого $\mathbf{M}$ и любого $k \ge 1$ $\mathbf{M} \le \mathbf{M}^{[k]}$.

Предложение 2. *Для любого* $n > 1$ $(\mathbf{M}(n))^{[n]} \le \mathbf{M}(n)$.

Доказательство. Пусть $f, g_1,\dots,g_n$ обозначают операции $\mathbf{M}(n)$ и $f', g_1',\dots,g_n', d, c$ обозначают операции $(\mathbf{M}(n))^{[n]}$. Положим

$f'(x_1,\dots,x_n) := f\{f[g_1x_1,\dots,g_1x_n],\dots,f[g_nx_1,\dots,g_nx_n]\}$,

$g_1'(x) := f[g_1g_1x, g_1g_2x,\dots,g_1g_nx],\dots$

$g_n'(x) := f[g_ng_1x, g_ng_2x,\dots,g_ng_nx]$,

$d(x_1,x_2,\dots,x_n) := f[g_1x_1, g_2x_2,\dots,g_nx_n]$,

$c(x) := f[g_2x, g_3x,\dots,g_nx, g_1x]$.

Сперва проверим тождества

(0) $f'(g_1'x,\dots,g_n'x) = x, \quad g_i'(f'(x_1,\dots,x_n)) = x_i, \quad i = 1,\dots,n.$

В самом деле,

$$f'(g_1'x,\ldots,g_n'x)=f\{f[g_1(f(g_1^2x,g_1g_2x,\ldots,g_1g_nx)),$$
$$g_1(f(g_2g_1x,\ldots,g_2g_nx)),\ldots,g_1(f(g_ng_1x,\ldots,g_n^2x))],\ldots\}=$$
$$=f\{f[g_1^2x,g_2g_1x,\ldots,g_ng_1x],\ldots,f[g_1g_nx,\ldots,g_n^2x]\}=$$
$$=f(g_1x,\ldots,g_nx)=x,$$
$$g_i'(f'(x_1,\ldots,x_n))=f[g_ig_1(f'(x_1,\ldots,x_n)),\ldots,g_ig_n(f'(x_1,\ldots,x_n))]=$$
$$=f[g_ig_1(f\{f[g_1x_1,\ldots g_1x_n],\ldots,f[g_nx_1,\ldots g_nx_n]\}),\ldots,$$
$$g_ig_n(f\{f[g_1x_1,\ldots,g_1x_n],\ldots,f[g_nx_1,\ldots,g_nx_n]\})]=$$
$$=f[g_1x_i,\ldots g_nx_i]=x_i,(i=1,\ldots,n).$$

Теперь мы можем проверить остальные тождества.

(1) $d(x,\ldots,x)=f(g_1x,\ldots,g_nx)=x$.

(2) очевидно .

(3) $$c(d(x_1,\ldots x_n))=f[g_2(d(x_1,\ldots,x_n)),g_3(d(x_1,\ldots,x_n)),\ldots,$$
$$g_n(d(x_1,\ldots)),g_1(d(x_1,\ldots))]=$$
$$=f[g_2(f[g_1x_1,\ldots]),\ldots,g_n(f[g_1x_1,\ldots]),g_1(f[g_1x_1,\ldots])]=$$
$$=f(g_2x_2,g_3x_3,\ldots,g_nx_n,g_1x_1).$$

(4) $$d(d(x_1,\ldots),d(y_1,\ldots),\ldots,d(z_1,\ldots))=$$
$$=f[g_1(d(x_1,\ldots)),g_2(d(y_1,\ldots)),\ldots g_n(d(z_1,\ldots))]=$$
$$=f[g_1(f[g_1x_1,g_2x_2,\ldots]),g_2(f[g_1y_1,g_2y_2,\ldots]),\ldots,$$
$$g_n(f[g_1z_1,g_2z_2,\ldots])]=$$
$$=f[g_1x_1,g_2y_2,\ldots,g_nz_n]=d(x_1,y_2,\ldots,z_n).$$

(5) $$c(f'(x_1,\ldots,x_n))=f\{g_2(f'(x_1,\ldots)),\ldots,g_n(f'(x_1,\ldots)),g_1(f'(x_1,\ldots))\}=$$
$$=f\{f[g_2x_1,\ldots,g_2x_n],\ldots,f[g_nx_1,\ldots,g_nx_n],f[g_1x_1,\ldots,g_1x_n]\}=$$
$$=f\{f[g_1(cx_1),g_1(cx_2),\ldots,g_1(cx_n)],\ldots,f[g_n(cx_1),\ldots,g_n(cx_n)]\}=$$
$$=f'(cx_1,\ldots,cx_n).$$
$$c(g_i'(x))=f[g_2g_i'x,\ldots,g_ng_i'x,g_1g_i'x,]=f[g_ig_2x,\ldots,g_ig_nx,g_ig_1x]=$$
$$=f[g_ig_1(cx),g_ig_2(cx),\ldots,g_ig_n(cx)]=g_i'(cx)$$

для всех $i=1,\ldots,n$.

(6) $$f'(d(x_1^1,\ldots,x_n^1),d(x_1^2,\ldots,x_n^2),\ldots,d(x_1^n,\ldots,x_n^n))=$$
$$=f\{f[g_1x_1^1,\ldots,g_1x_1^n],\ldots f[g_1x_n^1,\ldots,g_nx_n^n]\}=$$
$$=f\{g_1(f'(x_1^1,\ldots,x_1^n)),\ldots,g_n(f'(x_n^1,\ldots,x_n^n))\}=$$
$$=d(f'(x_1^1,\ldots,x_1^n),\ldots,f'(x_n^1,\ldots,x_n^n))$$ □

В частности, для $n=2$ получаем $(\mathbf{M}(2))^{[2]}\leq \mathbf{M}(2)$ (см. [1]).

Итак, многообразия $\mathbf{M}(n)$ и $(\mathbf{M}(n))^{[n]}$ взаимно- интерпретируемы и они представляют один и тот же элемент решетки интерпретационных типов многообразий.

Литература

[1]. Garcia O.C. and Taylor W. *The lattice of interpretability types of varieties.* Memoirs AMS, № 305, 1984, p. 1-125.
[2]. Мамедов О.М. *Интерпритируемость в семействе многообразий канторовых алгебр.* Деп. в ВИНИТИ, Москва, 1987, № 3801.
[3]. S. Swierczkowski. *On isomorphic free algebras.* Fund. Math., 50, p. 35-44.
[4]. Смирнов Д.М. *Канторовы алгебры с одним порождающим I, II.* Алгебра и Логика, 10, 1971, с. 61- 75, 658- 667.
[5]. Neumann W.D. *Representing varieties of algebras by algebras.* J. Austral. Math. Soc. 11, № 1, 1970, p.1-8.

Babayev Ə.Ə., Məmmədov O.M.

KANTOR CƏBRLƏRİNDƏ İBARƏT ÇOXOBRAZLILARDA İNTERPRETASİYA

Kantor cəbrlərindən ibarət çoxobrazlılarda interpritasiya anlayışının iki xassəsi nümayiş etdirilmişdir.

Babayev A.A., Mamedov O.M.

INTERPRETABILITY IN THE VARIETIES OF CANTOR ALGEBRAS

Our aim is exhibit two properties of the interpretability relation in the family of varieties of Cantor algebras.