УДК 517.5

БАБАЕВ М-Б.А.

О ПОРЯДКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПАРНЫМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ

Установлен порядок приближения соболевских классов W_q^r смешанными билинейными формами в пространстве L_p при $2 \le p \le q \le \infty$.

Ранее нами были найдены порядки приближения билинейными формами - когда множество аргументов парных произведений не имели общих элементов в случаях $1 \le q \le p \le 2$ [1], $1 \le q \le 2 \le p \le \infty$ [2] и $2 \le q \le p \le \infty$ [3]. В настоящей работе для случая $2 \le p \le q \le \infty$ удалось рассмотреть общий случай билинейных форм $\sum \varphi(u)\psi(v)$ когда множества u и v не обязаны быть пересекающимися.

Начиная с 1982 года в цикле работ В.М. Темлякова было исследовано приближение классов периодических функций Соболева и Никольского (см.напр.[4-5]) билинейными формами- в основном, когда группы переменных u и v имеют одинаковое число переменных. Им были установлены порядки приближения практически для всех p и q: $1 \le p$, $q \le \infty$.

Рассмотрим пространство $L_p = L_p(K)$ функций $f = f(x)$, $x = (x_1,\dots,x_l) \in R^l$ определенных на кубе $K = I^l$, $I = [0,1]$, таких что

$$\|f\|_p = \Big(\int_K |f(x)|^p dx\Big)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \underset{x\in K}{vrai\sup}|f(x)| < \infty, \quad p = \infty.$$

Пусть $\mathbf{7} = \{u, v\}$, $u, v \subset \{x_1,\dots,x_l\}$, $u \cup v = \{x_1,\dots,x_l\}$. Обозначим

$$G^M(\mathbf{7}) = G^M(\mathbf{7}, K) = \left\{ g / g = \sum_{K=1}^{M} \varphi_K(u)\psi_K(v), \quad \varphi_K \psi_K \in L_p(K) \right\}$$

Назовем уклонением компакта $Q \subset L_p$ от многообразия $G^M(\mathbf{7})$ в L_p выражение

$$\tau_M = \tau_{M\mathbf{7}}(Q) = \tau(Q, G^M(\mathbf{7}), L_p) = \sup_{f\in Q} \inf_{g\in G^M(\mathbf{7})} \|f - g\|_p \qquad (1)$$

Пусть r натуральное число, $1 \le q \le \infty$. Обозначим через $W_q^r = W_Q^r(K)$ соболевский класс функций f и K, удовлетворяющих неравенствам

$$\|f\|_q \le 1 \qquad \text{и} \qquad \|f\|_{L_q^r}^q = \sum_{|\widetilde{r}|=r} \left\|f^{(\widetilde{r})}(x)\right\|_q^q \le 1,$$

где

$$f^{(\widetilde{r})}(x) = \frac{\partial^{|\widetilde{r}|}}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_l^{r_l}} f, \quad \widetilde{r} = (r_1, \ldots, r_l), \quad |\widetilde{r}| = r_1 + \ldots + r_l,$$

а суммирование ведется по всем неотрицательным целочисленным векторам $\widetilde{r}$, для которых $|\widetilde{r}| = r$.

Далее порядковое равенство $\tau_M \; \theta_M$ эквивалентно двухсторонним оценкам $C_1\theta_M \le \tau_M \le C_2\theta_M \, (M \in N)$ с константами $0 < C_1 \le C_2 < \infty$ не зависящие от M. Через I обозначимчисло переменных множества U и для определенности положим $|U| \ge |V|$. Нам понадобится также достаточное условие вложения $W_q^r \subset L_p$, а именно $r > \frac{l}{u} - \frac{|u|}{p}$.

Основным результатом настоящей работы является

Теорема. *Порядок уклонения соболевских классов* W_q^r *от многообразия смешанных билинейных форм* $G^M(7)$ *при* $2 \le p \le q \le \infty$ *может быть вычислено по формуле*

$$\tau(W_q^r, G^M(7), L_p) \quad M^{-\frac{r}{l-|u|}}, \quad r > \frac{l}{q} - \frac{|u|}{p} \quad (|u| \ge |v|).$$

Доказательство теоремы. Оценка снизу. Нам понадобятся некоторые определения и вспомогательные факты. Как обычно, l_p^N - векторное пространство $R^N = \{y = (y_1, \ldots, y_N)\}, \quad y_i \in R$ с нормой

$$\|y\|_{l_p^N} = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^p\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty \\ \max_{i=\overline{1,N}} |y_i|, & p = \infty \end{cases}.$$

Выведем натуральное $m \ge 2$ из условия $\alpha m^{l-|u|} < M < \beta m^{l-|u|}$, где $\alpha = 1/2^{|v|+1}$, $\beta = 1/2$ (это всегда можно сделать, так как при таких α и β множество интервалов $\left(\alpha m^{|v|}, \beta m^{|v|}\right)$ покрывает интервал $\left(1/2, \infty\right)$. Обозначим через J множество m^l мультииндексов

$$J = J_l = \{\bar{i} = (i_1, \ldots, i_l), \quad 1 \le i_j \le m, \quad j = \overline{1,l}\}.$$

Разобьем куб $K = I^l \quad (I = [0,1])$ на m^l кубов.

$$K_{\bar{i}} = \left\{ x / \frac{i_j - 1}{m} \le x_j \le \frac{i_j}{m}, \quad \bar{i} = (i_1, \ldots, i_l) \in J \right\}$$

и рассмотрим в $R^l m^l$ функций

$$S_i(x) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{l} \left|\sin^{\rho}(\pi m x_j), \quad \rho > r, \quad x \in K_i \right. \\ 0, \quad x \in R^l / K_i \end{cases}$$

Лемма 1([1]). *Для произвольных* $p \geq 1, \bar{i} \in J$ *и целых* $r_j \geq 0$ $(j = \overline{1,l}, \quad \sum\limits_{j=1}^{l} r_j = r$ *имеет место равенство*

$$\left(\int\limits_{K_i} \left|S_i^{(\bar{r})}(x)\right|^p dx\right)^{1/p} = C_{\bar{r},p} m^{r - \frac{l}{p}},$$

где

$$C_{\bar{r},p} = \left(\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \left|\left(\prod_{j=1}^{l} Sin^{\rho} \pi t_j\right)^{(\bar{r})}\right| dt_1 \ldots dt_l\right)^{1/p}$$

константа, зависящая лишь от $l, \quad \rho, \quad \tilde{r}$ *и* p.

Рассмотрим множество

$$S_m = \left\{ \xi_i = (\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_l}) / \xi_S = \frac{S-1}{m}, \quad S = \overline{1,m}; \quad \bar{i} \in J \right\}$$

вершин кубов K_i. Посмотрим в R^{ml} многообразие

$$G_m^{M\Gamma_1} = \left\{ h \in R^{m^{2(l-|u|)}} \Big/ h = \sum_{k=1}^{M} \varphi_k\left(\xi_1, \ldots, \xi_{l-|u|}\right) \psi_k\left(\xi_{|u|+1}, \ldots, \xi_l\right) \atop \varphi_k, \quad \psi_k \right\}.$$

вещественные функции.

Пусть B_q^m - единичный шар в пространстве l_q^m.

Лемма 2 ([3]). *Пусть* $m^{l-|u|} \approx M$. *Тогда*

$$\tau\left(B_q^{m^{2(l-|u|)}}, G_m^{M\Gamma_1}, l_2^{m^{2(l-|u|)}}\right) >> M.$$

Лемма 3. *При* $m^{l-|u|} \approx M$ *справедлива оценка*

$$\tau\left(B_\infty^{ml}, G_m^{M\Gamma}, l_2^{ml}\right) >> M^{\frac{l}{2(l-|u|)}},$$

где согласно определению выше B_∞^{ml} *- единичный шар в* l_∞^{ml}.

Доказательство леммы. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_l)$. Определим функцию

$$f_\xi = f_{\alpha\beta} = \exp \frac{2\pi_i \beta(\xi_{|u|+1}, \ldots, \xi_l)[\alpha(\xi_1, \ldots, \xi_{l-|u|}) - 1]}{m^{l-|u|}},$$

где α и β взаимно - однозначные отображения между множествами $\underbrace{\{1, \ldots, m\} X \ldots X \{1, \ldots, m\}}_{l-|u|}$ и $\left\{1, \ldots, m^{l-|u|}\right\}$

Рассмотрим в пространстве $R^{m^{2(l-|u|)}}$ вектор $f = \left\{ \frac{f_{\alpha\beta}}{m^{l-|u|}} \right\}_{\alpha,\beta=1}^{m^{l-|u|}}$.

Поскольку

$$\|f\|_{l_2^{m^{2(l-|u|)}}} = \Big(\sum_{\alpha,\beta=1}^{m^{l-u}} \left| \frac{f_{\alpha\beta}}{m^{l-|u|}} \right|^2 \Big)^{1/2} \le \frac{1}{m^{l-u}} \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{m^{l-u}} 1 \right)^{1/2} = 1,$$

то $f \in B_2^{m^{2(l-u)}}$. Учитывая, что множество переменных U и V могут иметь общую часть, для определенности положим $U = \{x_1, \dots, x_u\}$ $V = \{x_{l-u+1}, \dots, x_l\}$ откуда $U \cap V = \{x_{l-|u|+1}, \dots, x_{|u|}\}$.

Очевидно, вектор f_ξ записан в виде

$$f_\xi = f_{\alpha\beta} = f(\xi_1, \dots, \xi_{l-u})1, \dots, 1, \xi_{u+1}, \dots, \xi_l)$$

может быть рассмотрен в качестве элемента пространства R^{ml} и тогда согласно определению, он будет принадлежать пространству B_∞^{ml}. Учитывая сказанное имеем

$$\tau(B_\infty^{ml}, G_m^{M7}, l_2^{ml})^2 \ge \rho^2(f_\xi, G_m^{M7}, l_2^{ml}) = \inf_{\substack{\phi_k,\varphi_k \\ k=1,M}} \sum_{\xi_1,\dots,\xi_l=1}^{m} \left| f_\xi - \sum_{k=1}^{M} \varphi_k(\xi_1, \dots, \xi_u) \times \right. =$$

$$\left. \times \psi_k(\xi_{l-|u|+1}, \dots, \xi_l) \right|^2 = \sum_{\xi_{l-|u|+1},\dots,\xi_{|u|}=1}^{m} \inf_{\substack{\phi_k,\varphi_k \\ k=1,M}} \left| f_\xi - \sum_{k=1}^{M} \varphi_k(\xi_1, \dots, \xi_{l-|u|}, \dots, 1, \dots, 1) \times \right.$$

$$\left. \times \psi_k\left(1, \dots, 1, \xi_{|u|+1}, \dots, \xi_l\right) \right|^2$$

Применяя лемму 2 продолжим оценку

$$\gg \sum_{\xi_{l-|u|+1},\dots,\xi_u=1}^{m} M^2 = M^2 \cdot m^{2|u|-l} \gg M^2 \cdot M^{\frac{2|u|-l}{l-|u|}} = M^{\frac{l}{l-|u|}}$$

Лемма 3 доказана.

Пусть $h \in B_\infty^{ml}$. Определим функцию

$$H(x) = (Th)(x) = b_m \sum_{i \in J} h_i S_i(x),$$

где

$$b_m = C_{\tilde{r},\infty}^{-1} \cdot m^{-r} \left(\sum_{|\tilde{r}|=r} 1 \right)^{-1}, \quad C_{\tilde{r},\infty} = \left\| \prod_{j=1}^{l} \sin^{(r)} \pi t_j \right\|_\infty.$$

Покажем, что $H(x) \in W_\infty^r$. Поскольку при $|\tilde{r}| < S$ производные непрерывны в К, то для этого достаточно проверить условия нормировки класса. Носители функции $S_i^{(\tilde{r})}(x)$ не пересекаются, поэтому

$$b_m^{-1} \|H^{(\tilde{r})}\|_\infty = vrai \sup_{x \in K} \left| \sum_{j \in j} h_j S_i^{(\tilde{r})}(x) \right| \le \max_{i \in J} \sup_{x \in K_i} \left| \sum_{j \in J} h_j S_j^{(\tilde{r})}(x) \right| = \max_{i \in J} \sup_{x \in K_i} \left| h_i S_i^{(\tilde{r})}(x) \right| \le$$

$$\le \max_{i \in J} \sup_{x \in K_i} \left| S_i^{(\tilde{r})}(x) \right| \qquad (2)$$

Учитывая, что утверждение леммы 1 в пространстве L_∞ имеет вид

$$\left\| S_i^{(\widetilde{r})}(x) \right\|_\infty = C_{\widetilde{r},\infty} \cdot m^r$$

из (2) получаем

$$\left\| H^{(\widetilde{r})} \right\|_\infty \le b_m C_{\widetilde{r},\infty} \cdot m^r .$$

Вышеприведенные соотношения при $\widetilde{r} = (0,...,0)$ позволяют написать

$$\left\| H \right\|_\infty \le b_m C_{\widetilde{r},\infty} \cdot m^r \le 1$$

Далее имеем

$$\left\| H \right\|_{L_\infty^r} = \sum_{|\widetilde{r}|=r} \left\| H^{(\widetilde{r})} \right\|_\infty \le b_m C_{\widetilde{r},\infty} m^r \left(\sum_{|\widetilde{r}|=r} 1 \right) = 1$$

и значит $H(x) \in W_\infty^r$.

Определим множество функций

$$Q_\infty^r = \left\{ H(x) \middle| H(x) = b_m \sum_{i \in J} h_i S_i(x), \quad h \in B_\infty^{ml} \right\}.$$

Поскольку $Q_\infty^r \subset W_\infty^r$, то

$$\tau(W_\infty^r, G^{M7}, L_2) \ge \tau(Q_\infty^r, G^{M7}, L_2)$$

Далее, для любого $H \in Q_\infty^r$ и $g \in G^{M7}$ имеем

$$\left\| H - g \right\|_{L_2}^2 = \int_K \left| H(x) - g(x) \right|^2 dx = \sum_{i \in J} \int_{K_i} \left| H(x) - g(x) \right|^2 dx =$$

$$= \int_{K_1} \left[\sum_{i \in J} \left| H(x + \xi_i) - g(x + \xi_i) \right|^2 \right] dx \qquad (3)$$

Зафиксируем $x \in K_1$

$$H(x + \xi_i) = \sum_{i \in J} b_m S_1(x) h_i = b_m S_1(x) \sum_{i \in J} h_i .$$

В силу леммы 3 существует $h \in B_\infty^{ml}$, такое, что

$$\inf_{v \in G_m^{M7}} \left\| h - v \right\| >> M^{\frac{l}{2(l-|u|)}}$$

Тогда

$$\inf_{v \in G_m^{M7}} \left(\sum_{i \in J} \left| b_m S_1(x) h_i - v(x + \xi_i) \right|^2 \right)^{1/2} = b_m S_1(x) \inf_{v \in G_m^{M7}} \left(\sum_{i \in J} \left| h_i - v(x + \xi_i) \right|^2 \right)^{1/2} \ge$$

$$\ge b_m S_1(x) M^{\frac{l}{2(l-|u|)}}$$

Учитывая это для $H(x) = (\tau h)(x)$ согласно (3)

$$\|H-g\|_{L_2} \geq \int\limits_{K_1} b_m^2 S_1^2(x) M^{\frac{l}{l-|u|}} dx)^{1/2} = b_m M^{\frac{l}{2(l-|u|)}} \|S_1(x)\|_{L_2} = cb_m M^{\frac{l}{2(l-|u|)}} M^{-\frac{l}{2(l-|u|)}} = cb_m =$$

$$= c_1 m^{-r} >> M^{-\frac{r}{l-|u|}},$$

откуда

$$\tau(W_\infty^r, G^M(\mathbf{7}), L_2) << M^{-\frac{r}{l-|u|}}$$

Оценка снизу доказана.

Оценка сверху является следствием нашего результата из 6: обозначим

$$\tau_{M\mathbf{7}}^H (W_q^r)_p = \inf_{A\in U} \sup_{f\in W_q^r} \|f - Af\|_p \qquad (4)$$

где U - множество всех непрерывных отображений A класса W_q^r в многообразие $G^M(\mathbf{7})$. В [6] нами доказана теорема, которая для приближения многообразиемжения многобразием $G^M(\mathbf{7})$ имеет вид

Теорема А([6]). *При* $1 \leq p, q \leq \infty$ *имеет место соотношение*

$$\tau_{M\mathbf{7}}^H (W_q^r)_p \approx M^{-r/(l-|u|)}, \quad |u| \geq |v| .$$

Согласно определения (1) и (4) имеем

$$\tau_{M\mathbf{7}} (W_q^r)_p \leq \tau_{M\mathbf{7}}^H (W_q^r)_p .$$

Для получения искомой оценки сверху остается применить теорему А. Оценка сверху доказана. Доказательство теоремы завершено.

Литература

[1]. Бабаев М-Б.А. *О порядке приближения соболевского класса билинейными формами в* L_p *при* $1 \leq q \leq p \leq 2$. Матем. сб., 1991, Т.182, №1, с.122-129.

[2]. Бабаев М-Б.А. *О порядке приближения соболевского класса билинейными формами в* L_p *при* $1 \leq q \leq 2 \leq p \leq \infty$. Тр.МИРАН, 1992, Т.198, с.21-40.

[3]. Бабаев М-Б.А.*Приближение соболевских классов* W_q^r *функций многих переменных билинейными формами в* L_p *при* $2 \leq q \leq p \leq \infty$. Матем.заметки (в печати).

[4]. Темляков В.М. *Приближение функцийс ограниченной смешанной производной.* Тр. МИАН, 1986, Т. 178, с.I-112.

[5]. Темляков В.М. *Билинейная аппроксимация и приложения.* Труды Матю Институту Стеклова, Т. 187, 1989, с. 191- 215.

[6]. Бабаев М-Б.А.*Приближение соболевских классов функций суммами произведений функций меньшего числа переменных* .Матем.заметки, 1990, Т.48, вып. 6, С.10- 21

Babayev M.-B.Ə.

QARIŞIQ CÜT HASİLLƏRDƏN MƏYLİN TƏRTİBİ HAQQINDA

İşdə W_q^r Sobolev siniflərinin L_p fəzasında $2 \le q \le p \le \infty$ olduqda qarışıq bixətti formalardan meylinin tərtibi tapılmışdır.

Babayev M.-B.A.

ON THE DEGREE OF APPROXIMATION BY THE MIXED TWIN PRODUCTS

In this paper we found the degree of approximation of the Sobolev dasses W_q^r by mixed bilinear foorms in L_p for $2 \le q \le p \le \infty$.