УДК 517.956.227

ГЕЙДАРОВ А.Г.

О ДИСКРЕТНОЙ ЧАСТИ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С ОБОБЩЕННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В данной работе найдены достаточные условия для бесконечности и конечности дискретной части спектра оператора Шредингера $-\Delta + q$ в пространстве $L_2(R^n)$ $(n = 1,2,3)$, где потенциал $q(x)$ принадлежит пространству С.Л.Соболева $W_p^s(R^n)$ с некоторыми $p \in (1,+\infty)$ и $s < 0$. Достаточные условия для бесконечности дискретной части одномерного оператора Шредингера с обобщенным потенциалом $q(x) \in W_2^{-1}(R)$ получены в работе [1].

Пусть $q(x)$ - вещественная обобщенная функция, причем $q(x) \in W_p^s(R^n)$, где $1 < p < +\infty$ и

$$s = \begin{cases} \dfrac{3}{p} - 2, & n = 3; \\ \dfrac{2}{p} - 2 + \varepsilon(\varepsilon > 0), & n = 2; \\ \dfrac{1}{p} - \dfrac{3}{2}, & n = 1; \end{cases} \qquad (1)$$

Известно [2], ([3], теорема X.17), что если s и p удовлетворяют этим условиям, то существует полуограниченный снизу самосопряженный оператор $A = -\Delta \dotplus q$ в пространстве $L_2(R^n)$, построенный с помощью квадратичных форм. Так определенный оператор называется форм-суммой операторов и обозначается $A = -\Delta \dotplus q$. Конструкцию построения форм-суммы операторов можно найти в ([4], гл. I, §3).

Сначала найдем достаточные условия для бесконечности дискретной части спектра самосопряженного оператора A. В условиях бесконечности дискретной части спектра оператора A фигурирует бесконечно дифференцируемая финитная функция $\omega(x) \in C_0^\infty(R^n)$, определенная равенством

$$\omega(x) = \begin{cases} ce^{-\frac{1}{(|x|^2-1)(4-|x|^2)}}, & 1 < |x| < 2 \\ 0, & x \overline{\not\in} \{x | 1 < |x| < 2\} \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь c - положительная постоянная, которая выбирается из равенства $\|\omega(x)\|_{L_2}=1$, т.е.

$$c=\left(\int\limits_{1<|x|<2} e^{-\frac{1}{\left(|x|^2-1\right)\left(4-|x^2\right)}}dx\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{3}$$

Обозначим

$$c_0=\left(-\Delta\omega,\omega\right)=\int\limits_{R^n}\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)+\ldots+\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_n}\right)^2\right]dx \tag{4}$$

Здесь и в дальнейшем (. , .) - скалярное произведение в $L_2\left(R^n\right)$, а $\langle f,\vartheta\rangle$ значение обобщенной функции f на основной функции ϑ. Через $\sigma_{disc}(A)$ обозначается дискретная часть спектра оператора A.

Теорема 1. *Пусть* $q(x)\in W_p^s\left(R^n\right)$ вещественная сингулярная обобщенная функция, где $p>\dfrac{3}{2}$ *при* $n=3$, $p>1$ *при* $n=1,2$, *а* s *удовлетворяет условиям (1). Предположим, что при некотором* $r_0>0$ *для любого* $r>r_0$ *выполняется неравенство*

$$\langle q(rx)\omega,\omega\rangle<-\frac{c_0}{r^2} \tag{5}$$

Здесь функция $\omega(x)\in C_0^\infty\left(R^n\right)$ *определена равенством (2);* C_0*- постоянная (4). Тогда* $\sigma_{disc}(A)$ *бесконечен.*

Доказательство. При доказательстве теоремы используется принцип минимакса для самосопряженных операторов. Для любого $r>0$ определим функцию $\vartheta_r(x)$:

$$\vartheta_r(x)=r^{-\frac{n}{2}}\omega\left(r^{-1}x\right)$$

Тогда $\|\vartheta_r\|_{L_2}=1$ и носитель функции $\vartheta_r(x)$ совпадает с множеством $r\le|x|\le 2r$, т.е.

$$\sup p\,\vartheta_r(x)=\left\{x\,|\,r\le|x|\le 2r\right\}$$

Имеет место очевидное равенство

$$\left(A\vartheta_r,\vartheta_r\right)=\left(-\Delta\vartheta_r,\vartheta_r\right)+\langle q\vartheta_r,\vartheta_r\rangle \tag{6}$$

Так как

$$\left(-\Delta\vartheta_r,\vartheta_r\right)=r^{-2}\left(-\Delta\omega,\omega\right),$$

$$\langle q\vartheta_r,\vartheta_r\rangle=\langle q,r^{-n}\omega^2\left(r^{-1}x\right)\rangle=\langle q(rx)\omega,\omega\rangle,$$

то равенство (6) принимает вид

$$\left(A\vartheta_r,\vartheta_r\right)=r^{-2}\left(-\Delta\omega,\omega\right)+\langle q(rx)\omega,\omega\rangle \tag{7}$$

Согласно *(5)* для достаточно больших r выражение *(7)* отрицательно. Существует такое $r_0 > 0$, что для любого $r > r_0$

$$\left(A\vartheta_r, \vartheta_r\right) < 0$$

Полжим $\varphi_m = \vartheta_{2^m r_0}$, $m = 1,2,\ldots$ Функции φ_m ортонормальные и поскольку φ_m и φ_k при $m \neq k$ имеют непересекающиеся носители, то $\left(A\varphi_m, \varphi_k\right) = 0$. Пусть $V_N = span\left\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N\right\}$; P_N - ортогональный проектор на V_N. Тогда оператор $P_N A P_N \uparrow V_N$ имеет собственные значения $\left\{\left(A\varphi_m, \varphi_m\right)\right\}_{m=1}^{N}$. Здесь $\uparrow$ - знак сужения.

Обозначим ([5], §XIII.1)

$$\mu_m = \sup_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}} \inf_{\substack{\psi \in \left[\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}\right]^{\perp} \\ \|\psi\| = 1, \psi \in Q(A)}} \left(A\psi, \psi\right), \quad m = 1,2,\ldots$$

Здесь $Q(A)$ -область определения квадратичной формы $\left(A\psi, \psi\right)$;

$$\left[\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}\right]^{\perp} =$$

$$= \left\{\psi \middle| \left(\psi, \varphi_i\right) = 0,\, i = 1,2,\ldots,m-1\right\}.$$

Согласно принципа Релея-Ритца ([5], теорема XIII.3)

$$\mu_N(A) \le \sup_{1 \le m \le N} \left\{\left(A\varphi_m, \varphi_m\right)\right\} < 0$$

Заметим, что число N произвольно и $\sigma_{ess}(A) = [0, +\infty)$ ([2], теорема 4), где $\sigma_{ess}(A)$ - существенный спектр оператора A. Поэтому в силу принципа минимакса для самосопряженных операторов ([5], теорема XIII.1) оператор A имеет бесконечное число отрицательных собственных значений. Это означает, что $\sigma_{disc}(A)$ бесконечен. Теорема доказана.

Доказанная теорема имеет такое следствие.

Следствие. *Пусть* $q(x) \in W_p^s\left(R^n\right)$, *где* p, s *удовлетворяют условиям теоремы 1. Если* $q(x)$ *однородная обобщенная функция степени* $\lambda > -2$ *и* $\left\langle q, \omega^2 \right\rangle < 0$, *то* $\sigma_{disc}(A)$ *бесконечен.*

Действительно, так как $\lambda = -2 + \varepsilon (\varepsilon > 0)$ и $q(rx) = r^{-2+\varepsilon} q(x)$, то справедливо равенство

$$\left\langle q(rx)\omega, \omega \right\rangle = r^{-2+\varepsilon} \left\langle q\omega, \omega \right\rangle \qquad (8)$$

Существует такое $r_0 > 0$, что для любого $r > r_0$

$$r^{-2+\varepsilon} \left\langle q\omega, \omega \right\rangle < -\frac{c_0}{r^2}$$

Отсюда и из *(8)* заключаем,что для любого $r > r_0$ будет выполняться неравенство

$$\left\langle q(rx)\omega, \omega \right\rangle < -\frac{c_0}{r^2}$$

Итак, все условия теоремы 1 выполняются и поэтому $\sigma_{disc}(A)$ бесконечен. Следствие доказано.

Замечание. Условия на s и p выбраны так, чтобы потенциал $q(x)$ был сингулярной обобщенной функцией из класса $W_p^s(R^n)$ с некоторым $s<0$. В случае, когда $q(x)$ регулярная обобщенная функция, т.е. $q(x)\in L_{1,loc}(R^n)$, то достаточные условия для бесконечности и конечности дискретной части оператора $-\Delta+q$ хорошо известны. В работе [1] указаны некоторые работы, посвященные этому случаю.

Теперь приведем достаточные условия для конечности дискретной части спектра оператора A.

Теорема 2. *Пусть $q(x)\in W_p^s(R^n)$ вещественная обобщенная функция, где s,p удовлетворяют условиям теоремы 1.*

Предположим, что при некотором $r_0>0$ в смысле обобщенных функций

$$q(x)\ge -\frac{1}{(4+\delta)|x|^2}\qquad (\delta>0) \tag{9}$$

во множестве $\{x\,|\,|x|>r_0\}$, т.е.

$$\langle q,\vartheta\rangle \ge -\int\limits_{|x|>r_0}\frac{\vartheta(x)}{(4+\delta)|x|^2}dx\,,\quad 0\le\vartheta(x)\in C_0^{\infty}(|x|>r_0)$$

Тогда $\sigma_{disc}(A)$ конечен.

Доказательство. Пусть $q_\varepsilon(x)$ - регуляризация обобщенной функции $q(x)$ ([6], стр. 144):

$$q_\varepsilon(x)=q*\omega_\varepsilon=\langle q(y),\omega_\varepsilon(x-y)\rangle$$

Тогда $q_\varepsilon(x)\in C^\infty(R^n)$. Покажем, что выполняется неравенство

$$q_\varepsilon(x)\ge -\frac{1}{4|x|^2}\,,\quad |x|>r_0 \tag{10}$$

Определим функцию $f(x)$, полагая

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(4+\delta)|x|^2}, & |x|>r_0;\\ 0\,, & |x|\le r_0.\end{cases}$$

В силу неравенства *(9)*

$$q_\varepsilon(x)\ge -\frac{1}{(4+\delta)|x|^2}*\omega_\varepsilon(x),\quad |x|>r_0 \tag{11}$$

Сделав замену переменных $x-y=\varsigma$, имеем

$$f*\omega_\varepsilon=\int\limits_{|x-y|<\varepsilon}\omega_\varepsilon(|x-y|)f(y)dy=\frac{1}{4+\delta}\int\limits_{\substack{|x-y|<\varepsilon\\ |y|>r_0}}\omega_\varepsilon(|x-y|)\cdot\frac{1}{|y|^2}dy=$$

$$= \frac{1}{4+\delta} \int\limits_{\substack{|\varsigma|<\varepsilon \\ |x-\varsigma|>r_0}} \omega_\varepsilon(|\varsigma|) \frac{1}{|x-\varsigma|^2} d\varsigma = \frac{1}{(4+\delta)|x|^2} \int\limits_{\substack{|\varsigma|<\varepsilon \\ |x-\varsigma|>r_0}} \omega_\varepsilon(|\varsigma|) \frac{|x|^2}{|x-\varsigma|^2} d\varsigma \tag{12}$$

Имеет место неравенство

$$\frac{|x|^2}{|x-\varsigma|^2} \le \left(\frac{|x-\varsigma|+|\varsigma|}{|x-\varsigma|} \right)^2 = \left(1 + \frac{|\varsigma|}{|x-\varsigma|} \right)^2 <$$

$$< \left(1 + \frac{\varepsilon}{r_0} \right)^2 = 1 + \frac{2\varepsilon}{r_0} + \left(\frac{\varepsilon}{r_0} \right)^2$$

Выберем число $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\delta = 4\left(\frac{2\varepsilon_0}{r_0} + \left(\frac{\varepsilon_0}{r_0} \right)^2 \right)$$

Тогда при $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$\frac{2\varepsilon}{r_0} + \left(\frac{\varepsilon}{r_0} \right)^2 < \frac{\delta}{4}$$

Отсюда и из *(12)* находим

$$f * \omega_\varepsilon \le \frac{1}{4\left(1+\frac{\delta}{4}\right)|x|^2} \cdot \left(1+\frac{\delta}{4}\right) \int\limits_{|\varsigma|<\varepsilon} \omega_\varepsilon(|\varsigma|) d\varsigma = \frac{1}{4|x|^2} \tag{13}$$

Здесь использовано очевидное равенство

$$\int\limits_{|\varsigma|<\varepsilon} \varpi_\varepsilon(|\varsigma|) d\varsigma = \int\limits_{R^n} \omega_\varepsilon(|\varsigma|) d\varsigma = 1$$

В силу *(11)* и *(13)* имеет место неравенство *(10)*.

Пусть A_ε - минимальный оператор в пространстве $L_2(R^n)$ порожденный выражением $-\Delta u + q_\varepsilon u$. Так как $q_\varepsilon(x) \in C^\infty(R^n)$ и полуограничен снизу, то при каждом $\varepsilon > 0$ оператор A_ε самосопряжен. Поскольку $\|q_\varepsilon - q\|_{W_p^1} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то $A_\varepsilon \to A$ *при* $\varepsilon \to 0$ *в равномерном* резольвентном смысле ([2], теорема 6). Это означает, что при $\lambda \in \rho(A_\varepsilon) \cap \rho(A)$

$$\left\| (A_\varepsilon - \lambda)^{-1} - (A - \lambda)^{-1} \right\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Здесь $\rho(A)$ - резольвентное множество оператора A.

Известно, что каждый оператор A_ε имеет в интервале $(-\infty, 0)$ конечный дискретный спектр и $\sigma_{ess}(A_\varepsilon) = [0, +\infty)$. В силу равномерной резольвентной сходимости $A_\varepsilon \to A$ при $\varepsilon \to 0$ оператор A также имеет в интервале $(-\infty, 0)$ конечный дискретный спектр. Этот факт вытекает из следующих известных теорем: ([7], теорема VIII.23 и теорема VIII.24), ([5], следствие 1 теоремы XIII.77). Теорема доказана.

Литература

[1]. Гейдаров А.Г. *О дискретной части спектра оператора Штурма-Лиувилля с обобщенным сингулярным потенциалом.* Сборник трудов I респ. конф. по механике и математике, посвящ. 50-летию АН Азербайджана, Баку, 1995, ч. 2. Математика.

[2]. Herczynski J. *On Schrödinger operators with distributional potentials.*- Journ. Oper. theory. 1989, v21, №2, p. 273-295.

[3]. Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики,* т. 2, *Гармонический анализ.Самосопряженность.* М.: Мир, 1978.

[4]. Березанский Ю.М., Кондратьев Ю.Г. *Спектральные методы в бесконечномерном анализе.* Киев: Наук. Думка, 1988.

[5]. Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики,* т. 4, *Анализ операторов.* М.: Мир, 1982.

[6]. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1981.

[7]. Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики,* т.1, *Функциональный анализ.*М.: Мир, 1977.

A.H. Heydərov

ÜMUMİLƏŞMİŞ POTENSİALLI ŞREDİNQER OPERATORUNUN SPEKTRİNİN DİSKRET HİSSƏSİ HAQQINDA

Məqalədə ümumiləşmiş potensiallı Şredinqer operatorunun spektrinin diskret hissəsinin sonlu və ya sonsuz olması üçün kafi şərtlər tapılır.

Heydarov A.H.

ON THE DISCRETE PART OF THE SPECTRUM FOR SHRODINGER OPERATOR WITH DISTRIBUTIONAL POTENTIALS.

In the woork sufficient conditions for infinity and finity of discrete part of the spectrum for Schrodinger operator with distributional potentials obtained.