УДК 517.957

ГУМБАТОВ Ф.Д.

ОЦЕНКА МОМЕНТА КОЛЛАПСА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

В настоящей работе исследуются вопросы разрешимости, несуществования глобальных решений, оценки момента их коллапса для задачи (1), (2).

Вопрос отсутствия глобальных решений для нелинейных задач изучался многими авторами (см. например [1-3] и библиографию, приведенную в них). В большинстве этих работ используется метод вогнутости. Но с помощью его обобщения, предложенного в [3], удалось охватить более широкий класс нелинейных задач по сравнению с ранее полученными результатами, будь это связано с нелинейными уравнениями или краевыми условиями.

В работе [4] приведена лемма, дополняющая указанный результат из [3] тем, что в ней установлена также оценка снизу для момента коллапса, что немаловажно. Там же этот результат применен для полунепрерывного дифференциально- операторного уравнения второго порядка.

В настоящей работе указанный результат будет приведен с доказательством и применен для рассматриваемой ниже задачи.

Итак, рассмотрим следующую задачу

$$A^2u + Au_t + f\left(\left\|A^{1/2}u\right\|^2\right)Au - g(u) = h(t), \qquad (1)$$

$$u(0) = u_0 \qquad (2)$$

где A - линейный, неограниченный, самосопряженный, положительно-определенный оператор с плотной областью определения $D(A)$ в вещественном гильбертовом пространстве $H_0 = (H_0, <,>)$ и с ограниченным обратным. Оператор $g : H_1 \to H_0$, функции $f : R^+ \to R$, $h : R \leftarrow H_0$ являются локальными-липшицевыми отображениями. Причем g отображает любое ограниченное, замкнутое множество в ограниченное множество. В работе используется обозначение $H_s, s \in R,$ что представляет собой шкалу гильбертовых пространств, получаемых пополнением $D(A)$ в норме $\| \|^2_{(s)} \equiv$ $\equiv <,>_{(s)} \equiv < A^s, A^s >_{(0)}$. Имеет место вложение $H_{s_2} \subset H_{s_1}$, более точно, выполняется

$$\|u\|_{(s_1)} \le \lambda_1^{s_1-s_2}\|u\|_{(s_2)} \qquad (3)$$

где λ_1 - первое собственное значение оператора $A, u \in H_{s_2}$.

Получен следующий результат о локальной разрешимости задачи *(1), (2)*.

Теорема 1. *Пусть выполняются вышеуказанные предположения. Тогда для любого $u_0 \in H_1$ существует такое $T = T(u_0)$ и такая единственная функция $u(t)$, что*

а) для любого $t_0, t_1 \in (0,T)$, $t_0 < t$, $0 \le \alpha < 1$, $u \in C([0,t_1), H_1) \cap C_1((t_0,t_1), H_{1+\alpha})$;

б) равенство (1) выполняется при любом $t \in (0,T_0)$ в пространстве H_0, а также выполняется начальное условие (2);

в) если T_0 максимально, т.е. не существует решение (1), (2) вне интервала $(0,T_0)$, то $T_0 = +\infty$ или $\|u(t)\|_{(1)}$ неограничено на $[0,T_0)$.

Доказательство. Введем обозначение $v \equiv Au$, тогда задача *(1), (2)* может быть переписана в виде:

$$v_t + Av + f\left(\left\|A^{1/2}v\right\|^2\right)v - g\left(A^{-1}u\right) \equiv h(t), \qquad (1')$$

$$u(0) = Au_0. \qquad (2')$$

Согласно предположениям относительно нелинейностей, u_0 и h выполняются все условия теорем 3.3.3, 3.3.4, 3.5.2 из [5], в силу которых справедливо утверждение теоремы для решения задачи *(1'), (2')* $v \in C([0,t_1), H_0) \cap C^1((t_0,t_1), H_\alpha)$ с соответствующим изменением прстранства в пункте в). Следовательно, справедлива она для $u = A^{-1}v$. Теорема доказана.

Следующая лемма используется при доказательстве теорем о коллапсе решений *(1), (2),* его оценке снизу.

Лемма. *Пусть положительная дважды дифференцируемая функция $\Psi(t)$ удовлетворяет при $t \ge 0$ двустороннему неравенству*

$$-C_2\Psi^2 - 2C_1\Psi\Psi' \le \Psi\Psi'' - (1+\alpha)[\Psi']^2 \le 2C_3\Psi\Psi' + C_4\Psi^2, \qquad (4)$$

где $\alpha > 0$, $C_1, C_2 \ge 0$ и C_3, C_4 любые постоянные.

Тогда

I) Если $\Psi(0) > 0$, $\Psi'(0) > -\gamma_2\alpha^{-1}\Psi(0)$ и $C_1 + C_2 > 0$, то $\Psi(t)$ стремится к бесконечности при

$$t \to t_{col} \le 1/\left(2\sqrt{C_1^2 + \alpha C_2}\right)\ln((\gamma_1\Psi(0) + \alpha\Psi'(0))/\gamma_2\Psi(0) + \alpha\Psi'(0)),$$

где $\gamma_{1,2} = -C_1 \pm \sqrt{C_1^2 + \alpha C_2}$. Если $\Psi(0) > 0$, $\Psi'(0) > 0$ и $C_1 = C_2 = 0$, то $\Psi(t) \to +\infty$ при $t \to t_{col} \le \Psi(0)/(\alpha\Psi'(0))$.

II) 1. Если $C_3^2 - \alpha C_4 > 0$ и $\gamma_4\Psi(0) + \alpha\Psi'(0) > 0$, то $t_{col} \ge 1/(\gamma_3 - \gamma_4)\ln((\gamma_3\Psi(0) + \alpha\Psi'(0))/(\gamma_4\Psi(0) + \alpha\Psi'(0)))$, где $\gamma_{3,4} = -C_3 \pm \sqrt{C_3^2 + \alpha C_4}$.

2. Если $C_3^2 - \alpha C_4 = 0$ *и* $C_3\Psi(0) + \alpha\Psi'(0) > 0$, *то* $t_{col} \geq \Psi(0)/(C_3\Psi(0) + \alpha\Psi'(0))$.

3. Если $C_3^2 - \alpha C_4 < 0$ *и*

а) $C_3\Psi(0) + \alpha\Psi'(0) > 0$, *то*

$$t_{col} \geq \left(1/\sqrt{\alpha C_4 - C_3^2}\right) arctg\left(\left(\sqrt{\alpha C_4 - C_3^2}\,\Psi(0)\right)/(C_3\Psi(0) + \alpha\Psi'(0))\right);$$

б) $C_3\Psi(0) + \alpha\Psi'(0) = 0$, *то* $t_{col} \geq \pi/\left(2\sqrt{\alpha C_4 - C_3^2}\right)$;

в) $C_3\Psi(0) + \alpha\Psi'(0) < 0$, *то*

$$t_{col} \geq \left(1/\sqrt{\alpha C_4 - C_3^2}\right)\left(\pi + arctg\left(\left(\sqrt{\alpha C_4 - C_3^2}\,\Psi(0)\right)/(C_3\Psi(0) + \alpha\Psi'(0))\right)\right)$$

Доказательство. Первая часть леммы, т.е. существование коллапса для $\Psi(t)$ и оценка его сверху приведена в работе [3]. Вторая часть доказывается аналогичным в [3] способом. Введя обозначения $\Phi(t) = \Psi^{-\alpha}(t)$ правое неравенство в *(4)* можно переписаить в виде:

$$\Phi''(t) - 2C_3\Phi'(t) + \alpha C_4\Phi(t) \equiv f(t) \geq 0 \qquad (5)$$

Интегрированием уравнение *(5)* при условии $C_3^2 - \alpha C_4 > 0$ получим

$$\Phi(t) = \beta_1 \exp(\gamma_3 t) + \beta_2 \exp(\gamma_4 t) + 1/(\gamma_3 - \gamma_4) \times$$
$$\times \int_0^t f(\tau)(\exp(\gamma_3(t-\tau)) - \exp(\gamma_4(t-\tau)))d\tau \geq \beta_1 \exp(\gamma_3 t) + \beta_2 \exp(\gamma_4 t) \qquad (6)$$

Числа β_i определяются из системы:

$$\beta_1 + \beta_2 = \Phi(0) = \Psi^{-\alpha}(0),$$
$$\beta_1\gamma_3 + \beta_2\gamma_4 = \Phi'(0) = -\alpha\Psi'(0)/\left(\Psi^{1+\alpha}(0)\right).$$

Следовательно, $\beta_2 = 1/(\gamma_3 - \gamma_4)(\gamma_3\Psi(0) + \alpha\Psi'(0))/\left(\Psi^{1+\alpha}(0)\right)$, $\beta_1 = -1/((\gamma_3 - \gamma_4)(\gamma_4\Psi(0) + \alpha\Psi'(0)))/\left(\Psi^{1+\alpha}(0)\right)$

Принимая во внимание условия $\Psi(0) > 0, \Psi'(0) > 0$ и $\gamma_4\Psi(0) + \alpha\Psi'(0) > 0$ имеем $\beta_1 < 0, \beta_2 > 0$. Тогда из *(6)* очевидно, что $\Phi(t)$ обращается в нуль, и, следовательно, $\Psi(t)$ в $+\infty$, только после *момента*-решения уравнения:

$$\beta_1 \exp(\gamma_3 t) + \beta_2 \exp(\gamma_4 t) = 0$$

П.1 второй части леммы доказан.

В случае $C_3^2 - \alpha C_4 = 0$ интегрируя уравнения *(5)* имеем:

$$\Phi(t) = \beta_1 \exp(C_3 t) + \beta_2 t \exp(C_3 t) + \int_0^t f(s)(t-s)\exp(C_3(t-s))ds \geq$$
$$\geq (\beta_1 + \beta_2 t)\exp(C_3 t).$$

Коэффициенты β_i (мы не меняем их обозначения) определяются как $\beta_1 = \Psi^{-\alpha}(0) > 0$, $\beta_2 = -(C_3\Psi(0) + \alpha\Psi'(0))/\Psi^{1-\alpha}(0) < 0$. Следовательно, момент коллапса оценивается снизу числом, удовлетворяющим уравнению $\beta_1 + \beta_2 t = 0$. П.2 доказан.

В случае $C_3^2-\alpha C_4<0$ решение уравнения *(5)* имеет следующий вид:

$$\Phi(t)=\beta_1\exp(C_3t)\cos\left(\sqrt{\alpha C_4-C_3^2}\,t\right)+\beta_2\exp(C_3t)\sin\left(\sqrt{\alpha C_4-C_3^2}\,t\right)+$$

$$+1/\sqrt{\alpha C_4-C_3^2}\int_0^t f(s)\exp(C_3(t-s))\sin\left(\sqrt{\alpha C_4-C_3^2}\,(t-s)\right)ds\ge\beta_1\exp(C_3t)\times$$

$$\times\cos\left(\sqrt{\alpha C_4-C_3^2}\,t\right)+\beta_2\exp(C_3t)\sin\left(\sqrt{\alpha C_4-C_3^2}\,t\right)\ , \qquad (7)$$

где $\beta_1=\Psi^{-\alpha}(0)>0,\ \beta_2=-1/\sqrt{\alpha C_4-C_3^2}\,(C_3\Psi(0)+\alpha\Psi'(0))/\Psi^{1+\alpha}(0)<0.$

В зависимости от знака выражения $\sigma=C_3\Psi(0)+\alpha\Psi'(0)$ правая часть неравенства в *(7)* обращается в нуль впервые

при $\bar t=\left(1/\sqrt{\alpha C_4-C_3^2}\right)arctg\left(\left(\sqrt{\alpha C_4-C_3^2}\,\Psi(0)\right)/(C_3\Psi(0)+\alpha\Psi'(0))\right)$, если $\alpha>0$

при $\bar t=\pi/\left(2\sqrt{\alpha C_4-C_3^2}\right)$, если $\alpha=0$

при $\bar t=\left(1/\sqrt{\alpha C_4-C_3^2}\right)\left(\pi+arctg\left(\left(\sqrt{\alpha C_4-C_3^2}\,\Psi(0)\right)/(C_3\Psi(0)+\alpha\Psi'(0))\right)\right)$, если $\sigma<0$

Итак,П.3 второй части, а с ним и лемма доказаны.

Замечание. Из доказательства леммы очевидно, что условия положительности констант C_1,C_2 можно было бы отбросить и исследовать получаемые случаи аналогично второй части леммы.

Имеет место следующий результат о несуществовании глобального решения для *(1), (2)*.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1,* $h(t)\in Lip([0,1],H_0)$, *где* l*- достаточно большое положительное число. Предположим также, что оператор* g *является дифференциалом Фреше для оператора* G, $F(r)=\int_0^r f(s)ds$, *при любом* $u\in H_1$ *и некотором* β *удовлетворяется следующее неравенство:*

$$<g(u),u>-f\left(\|u\|^2_{(1/2)}\right)\|u\|^2_{(1/2)}-(\beta+1)\left(2G(u)-F\left(\|u\|^2_{(1/2)}\right)\right)\ge0\ . \qquad (8)$$

Далее, пусть

$$\|u_0\|^2_{(1/2)}>0,\ K(u_0)=1/2\left(\|u_0\|^2_{(1)}+F\left(\|u_0\|^2_{(1/2)}\right)+G(u_0)\right)>0$$

$$\gamma(1+\omega)^2/\left(4\alpha^2(1+\beta)K(0)\right)\left(\|u_0\|^2_{(1/2)}+\left(2\beta_1\lambda_1^2\right)^{-1}\|h\|^2_{L_2(0,1;H_0)}\right)<\|u_0\|^2_{(1/2)}\ , \qquad (9)$$

где $\omega=-1+\sqrt{1+\beta_1}$, $\beta_1\in(0,\beta)$, $\gamma=(1+\beta)^2\lambda_1\beta_1/(\beta-\beta_1)$.

Тогда существует положительное t_{col} *такое, что*

$$\lim_{t\to t_{col}}\|u(s)\|_{(1/2)}=+\infty, \qquad (10)$$

причем,

$$t_{col}\le1/(2\gamma)\ln\left(\left(2\alpha^2(\beta+1)K(0)\|u_0\|^2_{(1/2)}\right)\left(\gamma(1+\alpha)^2C^2+2\alpha^2(\beta+1)K(0)\|u_0\|^2_{(1/2)}\right)\right),$$

где $C = \|u_0\|^2_{(1/2)} + \left(2\beta_1\lambda_1^2\right)^{-1}\|h\|^2_{L_2(0,1;H_0)}$.

В частности, когда $h(t) \equiv 0$, *то* $t_{col} \le (1+\alpha)^2\|u_0\|^2_{(1/2)} / \left(4\alpha^2(\beta+1)K(0)\right)$.

Доказательство. Умножая скалярно в H_0 уравнение *(1)* сначала на u, потом на u_t, получим следующие два тождества:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{(1/2)} = -\|u\|^2_{(1)} - f\left(\|u\|^2_{(1/2)}\right)\|u\|^2_{(1/2)} + \langle g(u), u\rangle + \langle h, u\rangle\ , \qquad (11)$$

$$\|u_t\|^2_{(1/2)} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\|u\|^2_{(1)} - \frac{1}{2}F\|u\|^2_{(1/2)}\right) + G(u) + \langle h, u_t\rangle \qquad (12)$$

которое играют основную роль при доказательстве. Из *(11)*, используя *(8)*, выведем следующую оценку:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{(1/2)} \ge 2(\beta+1)\left(-\frac{1}{2}\|u\|^2_{(1)} - \frac{1}{2}F\left(\|u\|^2_{(1/2)}\right) + G(u)\right) - \left(4\beta\lambda_1^2\right)^{-1}\|h(t)\|^2 =$$

$$= 2(\beta+1)K(t) - \left(4\beta\lambda_1^2\right)^{-1}\|h(t)\|^2. \qquad (13)$$

Используя обозначение для $K(t)$ в тождестве *(12)* и применяя неравенство Коши, получим:

$$\frac{d}{dt}K(t) = \|u\|^2_{(1/2)} - (h, u_t) \ge (1-\nu_1)\|u_t\|^2_{(1/2)} - (4\nu_1\lambda_1)^{-1}\|h(t)\|^2,$$

$$K(t) \ge K(0) + (1-\nu_1)\int_0^t \|u_t(s)\|^2_{(1/2)} ds - 1/(4\nu_1\lambda_1)\int_0^t \|h(s)\|^2 ds\ .$$

Принимая во внимание последнее неравенство в *(13)*, имеем:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\|u\|^2_{(1/2)} + \left(2\beta\lambda_1^2\right)^{-1}\|h(t)\|^2\right) \ge 2(\beta+1)\left(K(0) + (1-\nu_1)\int_0^t \|u_t(s)\|^2_{(1/2)} ds -\right.$$

$$\left.- 1/(4\nu_1\lambda_1)\int_0^t \|h(s)\|^2 ds\right)\ .$$

Выберем параметр ν_1 из равенства $(1-\nu_1)(1+\beta) = 1+\beta_1$, где β_1 некоторая константа из отрезка $(0,\beta)$. Тогда предыдущее неравенство можно переписать как

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\|u\|^2_{(1/2)} + \left(2\beta_1\lambda_1^2\right)^{-1}\|h(t)\|^2\right) \ge 2(\beta_1+1)\int_0^t \|u_t(s)\|^2_{(1/2)} ds -$$

$$-(1+\beta)/(2\beta_1\lambda_1)\int_0^t \|h(s)\|^2 ds + 2(\beta+1)K(0) \ge 2(\beta_1+1)\int_0^t \|u_t(s)\|^2_{(1/2)} ds -$$

$$-(1+\beta)^2/(2\lambda_1(\beta-\beta_1))\int_0^t \|h(s)\|^2 ds + 2(\beta+1)K(0). \qquad (14)$$

Далее, с помощью *(14)* мы покажем, что функция

$$\Psi(t) = \int_0^t \|u(s)\|^2_{(1/2)} ds + 1/\left(2\beta\lambda_1^2\right)\int_0^t\int_0^s \|h(s_1)\|^2 ds_1 ds + C_5$$

при подходящем выборе положительной константы C_5 и начального значения u_0, удовлетворяют условию леммы.

Легко проводятся следующие вычисления для производной от $\Psi(t)$:

$$\Psi'(t)=\|u_0\|^2_{(1/2)}+2\int_0^t <u,u_t>_{(1/2)} ds+1/\left(2\beta\lambda_1^2\right)\int_0^t\|h(s)\|^2 ds$$

$$[\Psi'(t)]^2 \le 4(1+\nu_2)\left(\int_0^t\|u_t(s)\|^2_{(1/2)}ds\right)\left(\int_0^t\|u(s)\|^2_{(1/2)}ds\right)+(1+1/\nu_2)C^2 \qquad (15)$$

где $C=\|u_0\|^2_{(1/2)}+1/\left(2\beta\lambda_1^2\right)\int_0^t\|h(s)\|^2 ds$ - положительна в силу условия теоремы, ν_2 - некоторое положительное число, выбор которого будет осуществлен ниже.

Используя *(14)* и *(15)*, имеем:

$$\Psi(t)\Psi''(t)-(1+\alpha)[\Psi']^2 \ge \left[4(1+\beta_1)\int_0^t\|u_t(s)\|^2_{(1/2)}ds-(1+\beta)^2/(\lambda_1(\beta-\beta_1))\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^t\|h(s)\|^2 ds+4(\beta+1)K(0)\right]\Psi(t)-4(1+\alpha)(1+\nu_2)\left(\int_0^t\|u_t(s)\|^2_{(1/2)}ds\right)\times$$

$$\times\left(\int_0^t\|u(s)\|^2_{(1/2)}ds\right)-(1+\alpha)(1+1/\nu_2)C^2 \qquad (16)$$

Путсь $\nu_2=\alpha=-1+\sqrt{1+\beta_1}$. Тогда из *(16)* получим, что

$$\Psi(t)\Psi''(t)-(1+\alpha)[\Psi'(t)]^2 \ge -(1+\beta)^2/(\lambda_1(\beta-\beta_1))\int_0^t\|h(s)\|^2 ds\,\Psi(t)+$$

$$+4(\beta+1)K(0)\Psi(t)-(1+\alpha)^2/\alpha C^2 \ge -2\beta\lambda_1(1+\beta)^2/(\beta-\beta_1)\Psi'(t)\Psi(t)+$$

$$+4(\beta+1)C_5K(0)-(1+\alpha)^2C^2/\alpha \qquad (17)$$

Теперь выберем константу $C_5=\Psi(0)$ таким образом:

$$C_5=(1+\alpha)^2C^2/(4\alpha(\beta+1)K(0))$$

Эта константа также положительна в силу условия теоремы. Тогда *(17)* получим

$$\Psi(t)\Psi''(t)-(1+\alpha)[\Psi'(t)]^2 \ge -2\beta\lambda_1(1+\beta)^2/(\beta-\beta_1)\Psi'(t)\Psi(t)$$

Для применения первой части леммы и завершения доказательства теоремы остается отметить, что условие

$$\Psi'(0)>-\gamma_2/\alpha\,\Psi(0),$$

где $\gamma_2=-2\gamma=-2\beta\lambda_1(1+\beta)^2/(\beta-\beta_1)$, выполняется в силу условия *(9)*. Теорема доказана.

Теперь предположим, что выполняется также следующее условие для любого $u\in H_1$

$$< g(u), u > - f\left(\|u\|^2_{(1/2)}\right)\|u\|^2_{(1/2)} \le \mu\|u\|^2_{(1/2)} + (1-\nu)\|u\|^2_{(1)} + C_6 \quad , \qquad (18)$$

где $C_6 \ge 0,\ \nu > 0,\ \mu \in R^1$.

Используя условие *(18)* и уравнение *(1)*, оценим $\Psi''(t)$ сверху следующим образом:

$$\Psi''(t) = \frac{d}{dt}\|u\|^2_{(1/2)} + \left(2\beta\lambda_1^2\right)^{-1}\|h(t)\|^2 = 2\left(-f\left(\|u\|^2_{(1/2)}\right)\|u\|^2_{(1/2)} - \|u\|^2_{(1)} + < g(u), u >\right) +$$

$$+ 2 < h, u > + \left(2\beta\lambda_1^2\right)^{-1}\|h(t)\|^2 \le -2\nu\|u\|^2_{(1)} + \left(\left(2\nu\lambda_1^2\right)^{-1} + \left(2\beta\lambda_1^2\right)^{-1}\right)\|h(t)\|^2 +$$

$$+ 2\nu\|u\|^2_{(1)} + 2\left(\mu\|u\|^2_{(1/2)} + C_6\right) \le 2\mu\|u\|^2_{(1/2)} + C_7,$$

где $C_7 \equiv 2C_6 + (\nu+\beta)/\left(2\nu\beta\lambda_1^2\right)\|h\|^2_{C([0,1];H_0)}$. Используя последнее неравенство, имеем:

$$\Psi(t)\Psi''(t) - (1+\alpha)[\Psi'(t)]^2 \le \Psi(t)\Psi''(t) \le \left(2\mu\|u\|^2_{(1/2)} + C_7\right)\Psi(t) \le$$

$$\le 2\mu\Psi'(t)\Psi(t) + C_7 / C_5 [\Psi'(t)]^2$$

Итак, для $\Psi(t)$ выполнена также правая часть двустороннего неравенства *(4)*, где

$$C_3 = \mu,$$

$$C_4 = C_7 / C_5 = 4\alpha(\beta+1)K(0)(2C_6 + (\nu+\beta))/\left(2\nu\beta\lambda_1^2\|h\|^2_{C([0,1],H_0)}\right)\times$$

$$\times\left(4\alpha(\beta+1)K(0)\cdot 1/C(1+\alpha)^2\left(\|u_0\|^2_{(1/2)} + \left(2\beta_1\lambda_1^2\right)^{-1}\|h\|_{L_2(0,1;H_0)}\right)\right). \qquad (19)$$

в силу которого момент коллапса оцениваются снизу.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия предыдущей теоремы, а также (18). Тогда момент коллапса* t_{col} *оценивается снизу согласно второй чатси леммы (в зависимости от знака выражения* $C_3^2 - \alpha C_4$*), где* C_3, C_4, *определяются из (19).*

Пример. В качестве примера задачи *(1)*, *(2)* естественно будет рассматривать следующую задачу:

$$-\Delta u_t + \Delta^2 u - f\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u - g(u) = h(t,x), t > 0, x \in \Omega \qquad (20)$$

$$\begin{aligned} u(0,x) &= u_0(x), && x \in \Omega \\ u(t,x) &= 0, && x \in \partial\Omega, \quad t \ge 0, \\ \Delta u(t,x) &= 0, && x \in \partial\Omega, \quad t \ge 0, \end{aligned}$$

где Δ – лапласиан, $\Omega \subset R^n$ - ограниченная область с достаточно гладкой границей, $h : [0,1] \to L_2(\Omega)$ - локально- липшицевая функция, $u_0 \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Условиям теорем 1-3 удовлетворяют, например, функции

$$f(r) = C_8 r^{k_1}, \quad g(u) = C_9 u^{k_2}, \quad r \in R^+, \quad u \in R^1, \quad K_1 = \frac{1}{2}(K_2 + 1), \quad K_2 > 1$$

$$0 < |C_9| L_1^{k_2+1} \le C_8, \qquad \text{при} \qquad n \ge 2,$$
$$0 < |C_9| L_2^{k_2+1} mes(\Omega) \le C_8, \qquad \text{при} \qquad n < 2, \qquad (21)$$

здесь через L_1, L_2, обозначены нормы операторов вложения пространства $W_2^1(\Omega)$ соответсвенно в $L_{k_2+1}(\Omega)$ и $C(\overline{\Omega})$. Причем $C_9 > 0$ при нечетных k_2 и любое при любых других, кроме того k_1 любое неотрицательное число при $n \le 2$ и меньше чем $(n+2)/(n-2)$ при $n < 2$.

Литература

[1]. Levine H.A. Trans. Am. Math. Soc., 1974, 192, p. 1-21.
[2]. Похожаев С.И. Тр. Всес. Конф. по уравнениям с частными производными, посвящ. 75- летию акад. И.Г. Петровского. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 200-203.
[3]. Калантаров В.К., Ладыженская О.А. Зап. науч. семин. Ломи, 1977, Т-69, № 10, с.77- 102.
[4]. Гумбатов Ф.Д. Изв. АН Азербайджана, СФТМ. 1995, №1-3, с.26-32.
[5]. Хенри Д. *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.* М., 1985.

Hümbətov F.D.

QEYRİ-XƏTTİ DİFERENSİAL-OPERATOR ÜÇÜN HƏLLƏRİN KOLLAPS ANININ QİYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ

Məqalədə qeyri-xətti diferensial-operator tənlik üçün Koşi məsələsinin lokal həllinin varlığı, həllərin müəyyən normada sonlu zamanda dağılma anının ikitərəfli qiymətləndirilməsi məsələləri tədqiq olunur.

Goumbatow F.D.

AN ESTIMATION OF THE COLLAPSE MOMENT OF SOLUTIONS FOR THE NONLINEAR DIFFERENTIAL-OPERATOR EQUATION

In the paper it's investigated the local solvability, blow-up of solutions of the Cauchy problem for the nonlinear differential-operator equation in some space and the estimation of the blow-up moment from above and below.