1997 ТОМ VI (XIV)

УДК 517.9

ГУСЕЙНОВ И.М., ХАНМАМЕДОВ Аг.Х.

ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ВСЕЙ ОСИ.

В работе исследуется прямая задача теории рассеяния для уравнения

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_{n+1} + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (1)$$

где $a_n > 0, \operatorname{Im} b_n = 0, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(|1-a_n| + |b_n - c|\right) + \sum_{n=-\infty}^{-1} |n|\left(|1-a_n| + |b_n|\right) < \infty . \qquad (2)$$

Для одномерного уравнения Шредингера подобная задача рассматривалась в работах [1-2]. Задача рассеяния для уравнения *(1)* при $c = 0$ изучалась в работах [3-4]. Всюду в дальнейшем для определенности примем, что $c \geq 0$.

1. Специальные решения.

Пусть Γ_j - плоскость λ с разрезом по отрезку $[\delta_{1j}c - 2, \delta_{1j}c + 2]$ и $\partial\ \Gamma_j$ - граница Γ_j, состоящая из точек верхнего и нижнего разрезов λ - плоскости по отрезкам $[\delta_{1j}c - 2, \delta_{1j}c + 2]$, где δ_{1j} - символ Кронеккера $(j = 1,2)$.

Пусть D - плоскость λ с разрезом по отрезку [-1, 1]. Как известно [5] в этой области функция $\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}$ распадается на две регулярные ветви $\varphi_1(\lambda) = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}$ и $\varphi_2(\lambda) = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}$, где $\varphi_1(\infty) = 0, \varphi_2(\infty) = \infty$. Функция $w = \varphi_1(\lambda)$ конформно отображает область D на круг $|w| < 1$. Тогда очевидно, что функции $e^{iz_j(\lambda)} = \dfrac{\lambda - \delta_{1j}c}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{\lambda - \delta_{1j}c}{2}\right)^2 - 1}$ регулярны в Γ_j, где

$$z_j(\lambda) = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{\lambda - \delta_{1j}c}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda - \delta_{1j}c}{2}\right)^2 - 1}\right) (j = 1,2).$$

Здесь выбрана главная ветвь логарифма. При этом, если λ пробегает вдоль разреза $[\delta_{1j}c - 2, \delta_{1j}c + 2]$, то значения $z_j(\lambda)$ меняются от $-\pi$ до π. Точнее говоря,

$$-\pi \le z_j(\lambda + i0) \le 0, 0 \le z_j(\lambda - i0) \le \pi$$

$$z_j(\lambda + i0) = -z_j(\lambda - i0), \qquad \lambda \in [\delta_{1j}c - 2, \delta_{1j}c + 2], \ j = 1,2.$$

Определим $\sin z_j(\lambda)$, полагая

$$\sin z_j(\lambda) = \frac{e^{iz_j(\lambda)} - e^{-iz_j(\lambda)}}{2i} \qquad (j = 1,2).$$

Теорема 1.1. *При условии (2) уравнение (1) имеет единственные решения* $\{f_n(z_j(\lambda))\}_{-\infty}^{\infty}$, *регулярные в плоскостях* Γ_j, *непрерывные до их границы* $\partial \ \Gamma_j$ *и представляемые в виде*

$$f_n(z_j(\lambda)) = \alpha_n^{(j)} e^{(-1)^{j-1} inz_j(\lambda)} \left\{ 1 + \sum_{m=(-1)^{j-1}}^{(-1)^{j-1}\infty} A_{nm}^{(j)} e^{(-1)^{j-1} imz_j(\lambda)} \right\}, \qquad (1.1)$$

где $\alpha_n^{(j)}$ *и* $A_{nm}^{(j)}$ *являются вещественными числами и*

$$\lim_{n \to (-1)^{j-1}\infty} \alpha_n^{(j)} = 1; A_{nm}^{(j)} = o, \text{ при } (-1)^{j-1} m \le 0; \lim_{n \to (-1)^{j-1}\infty} A_{nm}^{(j)} = 0. \qquad (1.2)$$

Далее,

$$\left| A_{nm}^{(j)} \right| \le C_j(n) \sigma_j \left(n + \left[\frac{m}{2} \right] + j - 1 \right), \qquad (1.3)$$

где через [ ] здесь обозначена целая часть,

$$\sigma_j(n) = \sum_{p=n}^{(-1)^{j-1}\infty} \left(|1 - a_p| + |b_p - \delta_{1j}c| \right),$$

а $C_j(n)$- *неотрицательные функции от n, ограниченные при* $n \to (-1)^{j-1}\infty (j = 1,2)$.

Лемма 1.1. *Произведение* $\alpha_n^{(1)} \alpha_n^{(2)}$ *от n не зависит и*

$$\alpha_n^{(1)} \alpha_n^{(2)} = \left(\prod_{-\infty}^{\infty} a_p \right)^{-1}.$$

В дальнейшем мы часто будем опускать зависимость функции $z_j(\lambda)$ от $j = (1,2)$. Таким образом, в формулах, где участвуют z_j и λ, всегда подразумевается, что z_j является введенной функцией λ.

Используя *(1.1) - (1.2) - (1.3)*, получим.

Теорема 1.2. *Решения* $f_n(z_j)$ $(j = 1,2)$ *обладают следующими свойствами:*

1) Решения $f_n(z_j)$ *при каждом фиксированном n имеют асимптотики*

$$f_n(z_j)=\alpha_n^{(j)}e^{(-1)^{j-1}inz_j}\left[1+O\left(\left|e^{iz_j}\right|\right)\right],\lambda\to\infty, \qquad (1.4)$$

причем эти оценки равномерны по n из интервалов $\left[N_j,(-1)^{j-1}\infty\right)$, *где* N_j *- произвольные конечные целые числа* $(j=1,2)$

2)Решения $f_n(z_j)$ *при* $\lambda\in\Gamma_j\cup\partial\Gamma_j$ *относительно n имеют асимптотики*

$$f_n(z_j)=e^{(-1)^{j-1}inz_j}\left(1+O_j(1)\right),$$

где $O_j(1)\to 0$ *при* $n\to(-1)^{j-1}\infty$ *равномерно по* λ, $\lambda\in\Gamma_j\cup\partial\Gamma_j$ $(j=1,2)$;

3) $\bar{f}_n(z_j)=f_n(-z_j)$, *при* $\lambda\in\Gamma_j$

$$\bar{f}_n(z_j(\lambda+i0))=f_n(z_j(\lambda-i0)), \quad \text{при} \quad \lambda\in[\delta_{1j}c-2,\delta_{1j}c+2]$$

j=1, 2.

2.Прямая задача рассеяния.

Определение 2.1. *Пусть* $\{\varphi_n(\lambda)\}_{-\infty}^{\infty}$ *и* $\{\psi_n(\lambda)\}_{-\infty}^{\infty}$ *два решения уравнения (1) с одним и тем же значением* λ. *Их вронскианом называется величина*

$$a_n[\varphi_n(\lambda)\psi_{n+1}(\lambda)-\varphi_{n+1}(\lambda)\psi_n(\lambda)]=W[\varphi_n(\lambda),\psi_n(\lambda)] \qquad (2.1)$$

Лемма 2.1. *Вронскиан двух решений уравнения (1) от n не зависит.*

Лемма 2.2. *Для того, чтобы решения* $\{\varphi_n(\lambda_0)\}_{-\infty}^{\infty}$ *и* $\{\psi_n(\lambda_0)\}_{-\infty}^{\infty}$ *уравнения (1) были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы* $W[\varphi_n(\lambda_0),\psi_n(\lambda_0)]\neq 0$.

Введем коэффициенты перехода. Так как решения $f_n(z_j)$, $\bar{f}_n(z_j)=f_n(-z_j)$ при $\lambda\in\Gamma_j$, $\lambda\neq\delta_{1j}c\pm 2$ линейно независимы, то можно записать

$$f_n(z_2)=a_1(\lambda)\bar{f}_n(z_1)+b_1(\lambda)f_n(z_1),\lambda\in\partial\Gamma_1,\lambda\neq c\pm 2 \qquad (2.2)$$

$$f_n(z_1)=a_2(\lambda)\bar{f}_n(z_2)+b_2(\lambda)f_n(z_2),\lambda\in\partial\Gamma_2,\lambda\neq\pm 2$$

Из этих равенств имеем

$$a_1(\lambda)=-\frac{W[f_n(z_1),f_n(z_2)]}{2i\ \sin z_1}$$

$$\lambda\in\partial\Gamma_1,\lambda\neq c\pm 2$$

$$b_1(\lambda)=\frac{W\left[\bar{f}_n(z_1),f_n(z_2)\right]}{2i\ \sin z_1} \qquad (2.3)$$

$$a_2(\lambda) = -\frac{W[f_n(z_1), f_n(z_2)]}{2i \ \sin z_2}$$

$$\lambda \in \partial\Gamma_2, \lambda \neq \pm 2$$

$$b_2(\lambda) = \frac{W\left[f_n(z_1), f_n(z_2) \right]}{2i \ \sin z_2}.$$

Пусть Γ - плоскость λ с разрезами по отрезкам *[-2, 2]* и *[c-2, c+2]*. Введем обозначения

$$\partial\Gamma^+ = \partial\Gamma_1 \bigcup \partial\Gamma_2$$

$$\partial\Gamma^- = (-\infty, \infty) \setminus ([-2, 2] \bigcup [c-2, c+2]).$$

Из *(2.3)* и теоремы *1.1* следует, что коэффициенты $a_1(\lambda)$ и $a_2(\lambda)$ допускают регулярные продолжения в плоскости Γ и

$$a_1(\lambda)\sin z_1 = a_2(\lambda)\sin z_2, \lambda \in \Gamma \bigcup \partial\Gamma^+. \qquad (2.4)$$

Из этой формулы следует, что если $\lambda_0 \in \Gamma$ и $a_1(\lambda_0) = 0$, то $a_2(\lambda_0) = 0$.

Справедлива следующая

Теорема 2.1. *Функции* $a_j(\lambda)$ $(j = 1,2)$ *в плоскости* Γ *могут иметь только конечное число простых нулей, принадлежащих* $\partial\Gamma^-$.

Пусть $\qquad a_1(\lambda_k) = a_2(\lambda_k) = 0, k = 1 \ldots N.$

Из *(2.3)* и леммы 2.2 следует, что

$$f_n(z_1(\lambda_k)) = c_k f_n(z_2(\lambda_k)), k = 1 \ldots N,$$

где $c_k \neq 0$, $\operatorname{Im} c_k = 0$, $k = 1 \ldots N$. При этом выполняются следующие соотношения:

$$m_k^+ = \frac{i}{2c_k \, \dot{a}_1(\lambda_k)\sin z_1(\lambda_k)} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^{\,2}(z_1(\lambda_k)) \right)^{-1} > 0$$

$$k = 1, \ldots N \qquad (2.5)$$

$$m_k^- = \frac{ic_k}{2c_k \, \dot{a}_2(\lambda_k)\sin z_2(\lambda_k)} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^{\,2}(z_2(\lambda_k)) \right)^{-1} > 0$$

Здесь и в дальнейшем точкой над функцией обозначается производная по λ.

Из *(2.5)* получим

$$m_k^+ \cdot m_k^- = \frac{-1}{\left(2\dot{a}_1(\lambda_k)\sin z_1(\lambda_k)\right)^2} = -\frac{1}{\left(2\dot{a}_2(\lambda_k)\sin z_2(\lambda_k)\right)^2} \qquad (2.6)$$

Далее легко устанавливаются следующие свойства коэффициентов перехода:

$$\bar{a}_j(\lambda+i0)=a_j(\lambda-i0)$$
$$,\lambda\in(\delta_{1j}c-2,\delta_{1j}c+2)$$

$$b_j(\lambda+i0)=b_j(\lambda-i0)$$
$$\bar{a}_1(\lambda)=b_1(\lambda),\lambda\in\partial\Gamma_1\setminus\partial\Gamma_2,a_j(\bar{\lambda})=\bar{a}_j(\lambda),\lambda\in\Gamma\bigcup\partial\Gamma^+ \qquad (2.7)$$
$$\bar{a}_2(\lambda)=b_2(\lambda),\lambda\in\partial\Gamma_2\setminus\partial\Gamma_1,a_1(\lambda)\sin z_1=a_2(\lambda)\sin z_2,\lambda\in\Gamma\bigcup\partial\Gamma^+$$
$$\bar{a}_j(\lambda)=a_j(\lambda),\lambda\in\partial\Gamma^-$$
$$|a_1(\lambda)|^2\sin z_1-|b_1(\lambda)|^2\sin z_1=\sin z_2$$
$$|a_2(\lambda)|^2\sin z_2-|b_2(\lambda)|^2\sin z_2=\sin z_1,\lambda\in\partial\ \Gamma_1\bigcap\partial\Gamma_2,\lambda\neq 2,\lambda\neq c-2 \qquad (2.8)$$
$$\bar{b}_1(\lambda)\sin z_1=-b_2(\lambda)\sin z_2$$
$$a_j(\lambda)=\left(\prod_{-\infty}^{\infty}a_p\right)^{-1}+O(1),\lambda\to\infty$$
$$a_j(\lambda)=-\frac{x_j}{\sin z_j}+O(1),b_j(\lambda)=\frac{x_j}{\sin z_j}+0(1),\lambda\to\delta_{1j}c\pm 2,$$
$$,x_j=\left.\frac{W[f_n(z_1),f_n(z_2)]}{2i}\right|_{\lambda=\delta_{1j}c\pm 2} \qquad (2.9)$$

Введём обозначения

$$r_j(\lambda)=\frac{b_j(\lambda)}{a_j(\lambda)},\lambda\in\partial\ \Gamma_j,j=1,2.$$

Аналогично [2] можно показать, что функция $r_j(\lambda)$ непрерывна при $\lambda\in\partial\Gamma_j$ $(j=1,2)$.

В $\partial\Gamma^+$ определим функцию $r^+(\lambda)$ следующим образом:

$$r^+(\lambda)=\begin{cases} r_1(\lambda),\lambda\in\partial\Gamma_1\\ r_2(\lambda),\lambda\in\partial\Gamma\setminus\partial\Gamma_1\end{cases}$$

Аналогично определим функцию $r^-(\lambda)$, полагая:

$$r^-(\lambda)=\begin{cases} r_2(\lambda),\lambda\in\partial\Gamma_1\\ r_1(\lambda),\lambda\in\partial\Gamma\setminus\partial\Gamma_2\end{cases}$$

Заметим, что при $c>4$ функции $r^+(\lambda)$ и $r^-(\lambda)$ совпадают.

Определение 2.2 *Набор велечин*

$$\{r^+(\lambda),\lambda_1,\ldots,\lambda_N,m_1^+,\ldots,m_N^+ \quad и \quad \{r^-(\lambda),\lambda_1,\ldots,\lambda_N,m_1^-,\ldots,m_N^-$$

называются соответственно правыми и левыми данными рассеяния для уравнения (1).

Литература

[1]. Буслаев В., Фомин В. *К обратной задачи рассеяния для одномерного уравнения Шредингера на всей оси*Вестн. ЛГУ, 1962, Вып.1, с.56-64.

[2]. Андерс И.А., Котляров В.П. *Характеризация данных рассеяния операторов Шредингера и Дирака*ТМФ, 1991, т. 88, № 1, с.72-84.

[3]. Гусейнов Г.Ш. *Обратная задача теории для разностного уравнения второго порядка на всей оси.* ДАН СССР, т. 231, № 5 (1976), с. 1045-1048.

[4]. Манаков С.В. *О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах.* ЖЭТФ, т.67, вып. 2(8) (1974), с. 543-555.

[5]. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В. Шабунин М.И. *Лекции по теории функций комплексного переменного.* М., Наука, 1989

Hüseynov H.M., Xanməmmədov Aq.X..

BÜTÜN OXDA İKİNCİ TƏRTİB FƏRQ TƏNLİYİ ÜÇÜN SƏPİLMƏ NƏZƏRİYYƏSİNİN DÜZ MƏSƏLƏSİ

Məqalədə bütün oxda 2-ci tərtib fərq tənliyi üçün əmsallardan birinin $n \to \pm\infty$ oldiqda müxtəlif sabitlərə yaxınlaşdığı halda səpilmə nəzəriyyəsinin düz məsələsinə həsr olunmuşdur. Kesib əmsallarının xassədəri öyrənilmişdir.

Guseinov I.M., Khanmamedov Ag.Kh.

THE DIRECT PROBLEM OF SCATTERING THEORY FOR THE DIFFERENCE EQUATION OF SECOND ORDER ON A WHOLE AXIS

Paper devoted to direct problem of scattering theory for the difference equation of second order on a whole axis, so that one of the coefficients tends to different conctants at $n \to \pm\infty$.