УДК 517.946

ИБРАГИМОВА С.Р.

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА.

В данной работе найдены условия однозначно и корректной разрешимости уравнения

$$P(d/dt)u = \frac{d^3u}{dt^3} - A^3u + A_1\frac{d^2u}{dt^2} + A_2\frac{du}{dt} = f(t), \quad t \in R = (0;+\infty) \qquad (1)$$

В сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ со следующими начально-краевыми условиями :

$$u(0) = Tu''(0), \quad u'(0) = 0, \qquad (2)$$

где А-положительно определенный самосопряженный оператор $(A = A^* > \gamma E, \gamma > 0)$, A_1, A_2 - линейные операторы действующие в $\mathcal{H}$, причем A_1A^{-1} и $A_2\,A^{-2}$ ограниченные операторы в $\mathcal{H}$, оператор T из граничного условия *(2)* ограниченно действует из пространства $\mathcal{H}_{1/2}$ в $\mathcal{H}_{5/2}$, т.е $T \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}_{1/2}, \mathcal{H}_{5/2}\right)$, где $\mathcal{H}_\alpha$ $(\alpha \geq 0)$ есть гильбертово пространство с нормой

$\|x\|_{\mathcal{H}_\alpha} = \|A^\alpha x\|$, а $f(t)$ и $u(t)$- вектор- функций со значениями в $\mathcal{H}$.

Введем следующие множества (см. [1]):

$$L_2(R_+;\mathcal{H}) = \left\{ f(t) \,\middle|\, f(t) \in \mathcal{H}, \quad \int_0^\infty \|f(t)\|_{\mathcal{H}}^2 dt = \|f\|^2_{L_2(R_+;\mathcal{H})} < \infty \right\}$$

$$W_2^3(R_+;\mathcal{H}) = \{ u(t) \,|\, u^{(3)} \in L_2(R_+;\mathcal{H}), \quad A^3u \in L_2(R_+;\mathcal{H})$$

$$\overset{\circ}{W}{}_2^3(R_+;\mathcal{H}) = \{ u(t) |, \quad u \in W_2^3(R_+;\mathcal{H}), \quad u(0) = u'(0) = u''(0) = 0$$

$$W_2^{3,T}(R_+;\mathcal{H}) = \{ u(t) \,|\, u \in W_2^3(R_+;\mathcal{H}), \quad u(0) = Tu''(0) = 0, \quad u'(0) = 0,$$

$$T \in L(\mathcal{H}_{3/2}, \mathcal{H}_{5/2})$$

Определение 1. *Задача (1)- (2) называется регулярно разрешимой, если для любого* $f(t) \in L_2(R_+;\mathcal{H})$ *существует вектор-функция* $u(t) \in W_2^3(R_+;\mathcal{H})$, *которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в*

$R_+ = (0;\infty)$, *а граничные условия (2) выполняются в смысле сходимости пространства* $\mathcal{H}_{5/2}$ *и* $\mathcal{H}_{3/2}$ *соответственно, т.е*

$$\lim_{t\to 0}\|u(t) - Tu''(0)\|_{\mathcal{H}_{5/2}} = 0,$$

$$\lim_{t\to 0}\|u'(t)\|_{\mathcal{H}_{3/2}} = 0$$

и имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_2^3} \le const\|f\|_{L_2}$$

В данной работе указаны достаточные условия регулярной разрешимости краевой задачи *(1)-(2)* выраженными с операторными коэффициентами уравнения *(1)* и оператором, который содержится в краевом условии *(2)* .

Отметим, что краевые задачи для операторно- дифференциальных уравнений с числовыми коэффициентами в краевых условиях исследованы, например, в работах [2-8], с операторными коэффициентами второго порядка на полуоси исследована в работе [9], а в конечной области их фредгольмовой разрешимости в работах [10 , 11].

Для нахождения условия регулярной разрешимости задачи *(1)-(2)*, мы сперва изучим разрешимость простой задачи, далее получив точные оценки нормы операторов промежуточных производных в соотвевст-вующих подпространствах, будем решать поставленную задачу полностью.

С этой целью расмотрим уравнение

$$P_0 u = P_0(d/dt)u = u''' - A^3 u = f(t), \quad t \in R_+ = (0;\infty) \qquad (3)$$

с краевыми условиями *(2)*.

Имеет место:

Теорема 1. *Пусть* $C = A^{5/2}TA^{-1/2}$ *и точка* $-1 \notin \sigma(c)$.

Тогда оператор P_0 *осуществляет изоморфизм между пространствами* $W_2^{3,T}(R_+;\mathcal{H})$ *и* $L_2(R_+;\mathcal{H})$.

Доказательства. Очевидно, что оператор P_0 непрерывно действует из пространства $W_2^3(R_+;\mathcal{H})$ в $L_2(R_+;\mathcal{H})$. С другой стороны, из условия $-1 \notin \sigma(c)$ вытекает, что однородное уравнение $P_0 u = 0$ имеет только нулевое решение из пространства $W_2^{3,T}(R_+;\mathcal{H})$. Тогда по теореме Банаха об обратном операторе достаточно доказать, что уравнение $P_0 u = f$ имеет решение из $W_2^{3,T}(R_+;\mathcal{H})$ при любом $f(t) \in L_2(R_+;\mathcal{H})$. Для этого обозначим

$$F(t) = \begin{cases} f(t), & t \in R_+ = (0;\infty) \\ 0, & t \in R_- = (-\infty;0) \end{cases}$$

и рассмотрим уравнение

$$\frac{d^3 v}{dt^3} - A^3 v = F(t), \quad t \in R = (-\infty,\infty) \qquad (4)$$

в пространстве $W_2^3(R;\mathcal{H})$

Обозначив через $\hat{v}(\lambda)$ и $\hat{F}(\lambda)$ преобразования **Фурье** вектор функций $v(t)$ и $F(t)$, соответственно, из уравнения *(4)* получаем

$$\hat{v}(\lambda)=\left[(-i\lambda)^3 E-A^3\right]^{-1}\hat{F}(\lambda) \qquad (5)$$

Отсюда

$$v(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(i\lambda^3E-A^3\right)^{-1}\hat{F}(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda,$$

где $t\in R$. Очевидно, что $v(t)$ удовлетворяет уравнению *(4)*. Теперь покажем, что $v(t)\in W_2^3(R;\mathcal{H})$.

По теореме Планшареля

$$\|v\|^2_{W_2^3(R_+;\mathcal{H})}=\left\|\lambda^3\hat{v}(\lambda)\right\|^2_{L_2(R_+;H)}+\left\|A^3\hat{v}(\lambda)\right\|^2_{L_2(R_+;H)}$$

Поэтому, достаточно доказать, что $\lambda^3\hat{v}(\lambda)\in L_2(R;H)$ и $A^3\hat{v}(\lambda)\in L_2(R;H)$. Эти же утверждения вытекают из следующих неравенств:

1) $\left\|\lambda^3\hat{v}(\lambda)\right\|_{L_2(R,H)}\le\sup\limits_{\lambda\in R}\left\|\lambda^3\left(-i\lambda^3E-A^3\right)^{-1}\right\|\left\|\hat{F}(\lambda)\right\|_{L_2(R;H)}\le c_1\|F\|_{L_2(R;H)},\quad (c_1>0)$

2) $\left\|A^3\hat{v}(\lambda)\right\|_{L_2(R,H)}\le\sup\limits_{\lambda\in R}\left\|A^3\left(-i\lambda^3E-A^3\right)^{-1}\right\|\left\|\hat{F}(\lambda)\right\|_{L_2(R;H)}\le c_2\|F\|_{L_2(R;H)},\quad (c_2>0)$

Далее, обозначим через $\tilde{u}(t)$ сужение вектор функций $v(t)$ на $R_+=(0;\infty)$. Очевидно, что $\tilde{u}(t)\quad W_2^3(R_+;H)$. Отыскивая решение задачи *(3)-(2)* в виде: $u(t)=u_0(t)+\tilde{u}(t)$, где $u_0(t)$ есть единственное решение однородного уравнения $P_0u=0$, и используя краевые условия *(2)* мы завершаем доказательство теоремы.

Для доказательства основной теоремы о разрешимости задачи *(1)- (2)* приведем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $A=A^*>\gamma E\ (\gamma>0)$ *и операторы* $B_j=A_jA^{-j}\ (j=1,2)$ *ограничена в* $\mathcal{H}$. *Тогда оператор P пораждениый задачей (1)-(2) ограниченно действует из прстранства* $W_2^{3,T}(R_+;H)$ *в* $L_2(R_+;H)$.

Доказательство. Доказательство леммы легко получается из теоремы о промежуточных производных [1, стр. 23].

По теореме 1 оператор P_0 действует из $W_2^{3,T}(R_+;H)$ на $L_2(R_+;H)$ изоморфно. Тогда в пространстве $W_2^{3,T}(R_+;H)$ норма $\|u\|_{W_2^3(R_+;H)}$ эквивалентна норме $\|P_0u\|_{L_2(R_+;H)}$ и по теореме о промежуточных производных [1, стр. 23] конечны следующие числа

$$N_{j,T}=\sup_{0\ne u\in W_2^3(R_+;H;T)}\left\|A^{3-j}u^{(j)}\right\|_{L_2(R_+;H)}\cdot\left\|P_0u\right\|^{-1}_{L_2(R_+;H)} \qquad (6)$$

Следующая теорема показывает какую существенную роль играют числа $N_{j,T}$, $j=1,2,3$ при нахождении условия разрешимости задачи *(1)- (2)* (см. также [9]).

Теорема 2. *Пусть* $A = A^* > \gamma E\ (\gamma > 0)$, $B_j = A_j A^{-j}\ (j = 1,2)$ *ограниченные операторы в* $\mathcal{H}$, $-1 \notin \sigma(c)\left(c = A^{3/2} T A^{-1/2}\right)$ *и выполняется неравенство:*

$$q = N_{1,T}\|B_1\| + N_{2,T}\|B_2\| < 1 \qquad (7)$$

Тогда задача (1)- (2) регулярно разрешима.

Доказательство. Напишем задачу *(1)- (2)* в операторном виде

$$(P_0 + P_1)u = f,$$

где $f \in L_2(R_+;H)$, $u \in W_2^{3,T}(R_+;H)$, а $P_0 u = -u''' + A^3 u$, $P_1 u = A_1 u'' + A_2 u'$, $u \in W_2^{3,T}(R_+;H)$. После замены $P_0 u = v$ мы получим уравнение в $L_2(R_+;H)$

$$\left(E + P_1 P_0^{-1}\right)v = f\,.$$

Так как при любом $v \in L_2(R_+;H)$

$$\left\|P_1 P_0^{-1} v\right\|_{L_2(R_+;H)} = \left\|P_1 u\right\|_{L_2(R_+;H)} \le \sum_{j=1}^{2}\left\|B_{3-j}\right\|\left\|A^{3-j}u^{(j)}\right\|_{L_2(R_+;H)} \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{2}\left\|B_{3-j}\right\| \cdot N_{j,T} \cdot \left\|P_0 u\right\|_{L_2(R_+;H)} = q \cdot \|v\|_{L_2},$$

то при выполнении неравенства $q < 1$, оператор $E + P_1 P_0^{-1}$ обратим, поэтому легко находим $u(t)$:

$$u = P_0^{-1}\left(E + P_1 P_0^{-1}\right)^{-1} f$$

Теорема доказана.

Таким образом возникает задача о нахождении точного значения числа $N_{j,T}$, $j = (1,2)$ или оценки их сверху.

С этой целью вводим полиномы зависящие от параметра

$$P_j(\lambda, \beta) = (i\lambda)^6 + 1 - \beta (i\lambda)^{2j}, \quad j = 1,2\,.$$

Имеет место

Лемма 2 [6]. *При* $\beta \in \left(0, \dfrac{3}{2^{2/3}}\right)$ *полиномы* $P_j(\lambda, \beta)$ *не имеют корней на мнимой оси, их корни симметрично относительно вещественной оси и начало координат, причем его можно представить в виде:*

$$P_j(\lambda;\beta) = \Phi_j(\lambda;\beta) \cdot \Phi_j(-\lambda;\beta), \qquad (8)$$

где

$$\Phi_j(\lambda;\beta) = \prod_{m=1}^{3}\left(\lambda - \omega_{j,m}\right) = \lambda^3 + \alpha_{j,2}(\beta)\lambda^2 + \alpha_{j,1}(\beta)\lambda + 1,$$

$\operatorname{Re}\omega_{j,m} < 0$, $\alpha_{j,m}$ – *вещественные числа* $(m = 1,2,3)$.

Используя полиномы $P_j(\lambda, \beta)$ *и* $\Phi_j(\lambda, \beta)\ (j = 1,2)$ мы *построим полиномиальные операторные пучки*

$$\Phi_j(\lambda;\beta;A)=\prod_{m=1}^{3}\left(\lambda-\omega_{j,m}A\right)=\lambda^3E+\alpha_{j,2}(\beta)\lambda^2A+\lambda\alpha_{j,1}A+A^3.$$

Очевидно, что спектр операторного пучка $\Phi_j(\lambda;\beta;A)$ *лежит на левой полуплоскости, так как* $\operatorname{Re}\omega_{j,m}<0;\ m=1,2,3;\ j=1,2.$

Докажем следующее вспомогательное утверждение

Лемма 3. *При любом* $u\in W_2^{3,T}(R_+;H)$ *и* $\beta\in\left(0,3\cdot2^{-2/3}\right)$ *имеет место тождество:*

$$\left\|P_0u\right\|_{L_2}^2-\beta\left\|A^{3-j}u^{(j)}\right\|_{L_2}^2=\left\|\Phi_j\left(d/dt;\beta;A\right)u\right\|_{L_2}^2+\left(R_j(\beta)\varphi,\varphi\right)_H, \qquad (9)$$

где

$$\left(R_j(\beta)\varphi,\varphi\right)=4\operatorname{Re}(\varphi,C\varphi)+\alpha_{1,j}(\beta)\left\|C\varphi\right\|^2+\alpha_{2,j}(\beta)\left\|\varphi\right\|^2, \qquad (10)$$

$j=1,2;\ \varphi=A^{-1/2}u''(0)\in\mathcal{H};\ \alpha_{1,j}(\beta)$ *и* $\alpha_{2,j}(\beta)$ *коэффициенты* $\Phi_j(\lambda;\beta;A)$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что $u\in W_2^{3,T}(R_+;\mathcal{H})$ и $\beta\in\left(0,3\cdot2^{-2/3}\right)$ имеет место равенство

$$\left\|\Phi_j\left(d/dt;\beta;A\right)u\right\|_{L_2}^2=\left\|u'''+\alpha_{2,j}Au''+\alpha_{1,j}A^2u'+A^3u\right\|_{L_2}^2=$$
$$=\left\|u'''\right\|_{L_2}^2+\alpha_{2,j}^2\left\|Au''\right\|_{L_2}^2+\alpha_{1,j}^2\left\|A^2u'\right\|_{L_2}^2+\left\|A^3u\right\|_{L_2}^2+\alpha_{2,j}\cdot2\operatorname{Re}\left(u''',Au''\right)_{L_2}+ \qquad (11)$$
$$+\alpha_{1,j}\cdot2\operatorname{Re}\left(u''',A^2u'\right)_{L_2}+2\operatorname{Re}\left(u''',A^3u\right)_{L_2}+\alpha_{2,j}\cdot\alpha_{1,j}2\operatorname{Re}\left(Au'',A^2u'\right)_{L_2}+$$
$$+\alpha_{2,j}2\operatorname{Re}\left(Au'',A^3u\right)_{L_2}+\alpha_{1,j}2\operatorname{Re}\left(A^2u',A^3u\right)_{L_2}$$

С интегрированием по частям проверяется справедливость следующих равенств:

$$2\operatorname{Re}\left(u''',Au''\right)_{L_2}=-\left\|A^{1/2}u''(0)\right\|_{L_2}^2$$

$$2\operatorname{Re}\left(u''',A^3u\right)_{L_2}=-2\operatorname{Re}\left(A^{1/2}u''(0),A^{5/2}u(0)\right)+\left\|A^{3/2}u'(0)\right\|_{L_2}^2$$

$$2\operatorname{Re}\left(Au'',A^2u'\right)_{L_2}=-\left\|A^{3/2}u'(0)\right\|_{L_2}^2$$

$$2\operatorname{Re}\left(A^2u',A^3u\right)_{L_2}=-\left\|A^{5/2}u(0)\right\|_{L_2}^2$$

$$2\operatorname{Re}\left(u''',A^2u'\right)_{L_2}=-2\operatorname{Re}\left(A^{1/2}u''(0),A^{3/2}u'(0)\right)-2\left\|Au''\right\|_{L_2}^2$$

$$2\operatorname{Re}\left(Au'',A^3u\right)_{L_2}=-2\operatorname{Re}\left(A^{3/2}u'(0),A^{5/2}u(0)\right)_{L_2}-2\left\|A^2u'\right\|_{L_2}$$

Учитывая все эти равенства и краевые условия (2) $\left(u'(0)=0,\ u(0)=Tu''(0)\right)$ в равенстве *(11)* получаем

$$\left\|\Phi_j\left(d/dt;\beta;A\right)u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}=\left\|u'''\right\|^2_{L_2(R_+;H)}+\left(\alpha^2_{2,j}-2\alpha_{1,j}\right)\cdot\left\|Au''\right\|^2_{L_2(R_+;H)}+$$

$$+\left(\alpha^2_{1,j}-2\alpha_{2,j}\right)\cdot\left\|A^2u'\right\|^2_{L_2(R_+;H)}+\left\|A^3u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}-\alpha_{2,j}\left\|A^{1/2}u''(0)\right\|^2_{L_2(R_+;H)}- \qquad (12)$$

$$-2\operatorname{Re}\left(A^{1/2}u''(0),A^{5/2}u(0)\right)-\alpha_{1,j}\left\|A^{5/2}u(0)\right\|^2_{L_2(R_+;H)}$$

С другой стороны при $u\in W_2^{3,T}(R_+;\mathcal{H})$

$$\left\|P_0u\right\|^2_{L_2}=\left\|u\right\|^2_{L_2}+\left\|A^2u\right\|^2_{L_2}+2\operatorname{Re}\left(A^{1/2}u''(0),A^{5/2}u(0)\right) \qquad (13)$$

Из равенства *(8)* вытекает, что

при $j=1\begin{cases}\alpha^2_{1,1}-2\alpha_{2,1}=-\beta\\ \alpha^2_{2,1}=2\alpha_{1,1}\end{cases}$, а при $j=2\begin{cases}\alpha^2_{2,2}-2\alpha_{2,1}=-\beta\\ \alpha^2_{1,2}=2\alpha_{2,2}\end{cases}$ *(14)*

Учитывая *(13)* и *(14)* в равенстве *(12)* получаем:

$$\left\|\Phi_j\left(d/dt;\beta;A\right)u\right\|^2_{L_2}=\left\|P_0u\right\|^2_{L_2}-\beta\left\|A^{3-j}u^{(j)}\right\|^2_{L_2}-4\operatorname{Re}\left(A^{1/2}u''(0),A^{5/2}u(0)\right)-$$

$$-\alpha_{1,j}\left\|A^{5/2}u(0)\right\|^2_{L_2}-\alpha_{2,j}\left\|A^{1/2}u''(0)\right\|^2_{L_2}.$$

Таким образом имеет место равенство

$$\left\|P_0u\right\|^2_{L_2}-\beta\left\|A^{3-j}u^{(j)}\right\|^2_{L_2}=\left\|\Phi_j\left(d/dt;\beta;A\right)u\right\|^2_{L_2}+4\operatorname{Re}\left(A^{1/2}u''(0),A^{5/2}Tu''(0)\right)+$$

$$+\alpha_{1,j}\left\|A^{5/2}Tu''(0)\right\|^2_{L_2}+\alpha_{2,j}\left\|A^{1/2}u''(0)\right\|^2_{L_2}.$$

Далее, учитывая $A^{1/2}u''(0)=\varphi$ и $C=A^{5/2}TA^{-1/2}$ получаем доказательство леммы.

Очевидно, что $W_2^{3,T}(R_+;\mathcal{H})\subset \mathring{W}_2^3(R_+;\mathcal{H})$. Поэтому

$$\mathring{N}_j=\sup_{0\neq u\in \mathring{W}_2^3(R_+;\mathcal{H})}\left\|A^{3-j}u^{(j)}\right\|_{L_2}\cdot\left\|P_0u\right\|^{-1}_{L_2}$$

не больше чем $N_{j,T}$ $(j=1,2)$. Как известно, имеет место

Лемма 4. [6] *Числа*

$$\mathring{N}_j=2^{1/3}\cdot 3^{-1/2},\quad j=1,2$$

Таким образом мы имеем, что $N_{j,T}\geq 3^{-1/2}\cdot 2^{1/3}$. *Теперь мы хотим объяснить, что для каких операторов* C *верно равенство*

$$N_{j,T}=2^{1/3}\cdot 3^{-1/2}$$

Теорема 3. *Число* $N_{1,T} = \overset{\circ}{N_1} = 2^{1/3}\cdot 3^{-1/2}$ *тогда и только тогда, когда при любом* $\beta\in\left(0;\,3\cdot 2^{-2/3}\right)$ *имеет место неравенство* $\left(R_1(\beta)\varphi,\varphi\right)>0,\ \varphi\in\mathcal{H}$. *Здесь* $\left(R_1(\beta)\varphi,\varphi\right)$ *определено из равенства (10).*

Доказательство. Пусть $N_{1,T} = 2^{1/3}\cdot 3^{-1/2}$. Тогда при любом $\beta\in\left(0{,}3\cdot 2^{-2/3}\right)$ и $u\in W_2^{3,T}\left(R_+;\mathcal{H}\right)$ имеет место

$$\left\|P_0u\right\|_{L_2}^2-\beta\left\|A^2u'\right\|_{L_2}^2=\left\|P_0u\right\|_{L_2}^2\left(1-\beta\left\|A^2u'\right\|_{L_2}^2\cdot\left\|P_0u\right\|_{L_2}^{-2}\right)\geq$$

$$\geq\left(1-\beta\cdot N_{1,T}\right)\cdot\left\|P_0u\right\|_{L_2}^2=\left(1-\beta\cdot 2^{1/3}\cdot 3^{-1/2}\right)>0.$$

С другой стороны по лемме 3

$$0\leq\left\|P_0u\right\|_{L_2}^2-\beta\left\|A^2u'\right\|_{L_2}^2=\left\|\Phi_j\left(d/dt;\beta;A\right)u\right\|_{L_2}^2+\left(R_1(\beta)\varphi,\varphi\right). \qquad (15)$$

Так как по формуле *(9)*

$$\Phi_1(\lambda;\beta;A)=\prod_{m=1}^{3}\left(\lambda-\omega_{1,m}A\right),$$

причем $\operatorname{Re}\omega_{1,m}<0,\ m=1,2,3$ то операторы $\omega_{1,m}A\ (m=1,2,3)$ пораждают сильно непрерывную полугруппу операторов и поэтому следующая задача Коши имеет единственное решение из пространства $W_2^{3,T}\left(R_+;H\right)$ при любом $\varphi\in\mathcal{H}$

$$\begin{cases}\Phi_1\left(d/dt;\beta;A\right)u=0\\ u(0)=TA^{-1/2}\varphi\\ u'(0)=0\\ u''(0)=A^{-1/2}\varphi\end{cases}$$

Обозначим через $u(t;\beta;\varphi)$ решение этой задачи Коши. Тогда учитывая это решение в неравенстве *(15)* получаем, что для любого $\varphi\in\mathcal{H}$ $\left(R_1(\beta)\varphi,\varphi\right)>0$. Необходимость доказана.

Теперь докажем достаточность. Пусть при любом $\varphi\in\mathcal{H}$ $\left(R_1(\beta)\varphi,\varphi\right)>0$ для любого $\beta\in\left(0;\,3\cdot 2^{-2/3}\right)$. Тогда из леммы 3 вытекает, что при любом $\beta\in\left(0;\,3\cdot 2^{-2/3}\right)$ имеет место неравенство

$$\left\|P_0u\right\|_{L_2}^2-\beta\left\|A^2u'\right\|_{L_2}^2=\left\|\Phi(d/dt;\beta;A)u\right\|_{L_2}^2+\left(R_1(\beta)\varphi,\varphi\right)>0$$

Отсюда получаем, что для любого $u\in W_2^{3,T}\left(R_+;\mathcal{H}\right)$ и $\beta\in\left(0;\,3\cdot 2^{-2/3}\right)$.

$$\left\|P_0u\right\|_{L_2}^2>\beta\left\|A^2u'\right\|_{L_2}^2$$

Переходя к пределу при $\beta \to 3\cdot 2^{-2/3}$ получаем

$$\left\|A^2 u'\right\|_{L_2} \le 3^{-1/2}\cdot 2^{1/3}\cdot \left\|P_0 u\right\|_{L_2},$$

т.е. $N_{1,T} \le 3^{-1/2}\cdot 2^{1/3} = N_0$. Так как $N_{1,T} \ge \overset{\circ}{N}_1$, то $N_{1,T} = 3^{-1/2}\cdot 2^{1/3}$.

Аналогично доказывается и в случае $j=2$.

Теорема доказана.

Из теоремы 3 получаем следующий важный результат.

Теорема 4. *Пусть* $-1\notin\sigma(c)$ *и* $\operatorname{Re} C\ge 0$. *Тогда*

$$N_{1,T} = N_{2,T} = 2^{1/3}\cdot 3^{-1/2}.$$

Доказательство. Так как

$$\left(R_j(\beta)\varphi,\varphi\right) = 4\operatorname{Re}(C\varphi,\varphi) + \alpha_{1,j}(\beta)\|C\varphi\|^2 + \alpha_{2,j}(\beta)\|\varphi\|^2, \quad j=1,2,$$

где числа $\alpha_{1,j}(\beta)$, $\alpha_{2,j}(\beta)$ удовлетворяют равенствам *(14)* сооответственно, то из этих равенств видно, что $\alpha_{1,j}\ge 0$, $\alpha_{2,j} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{1,j}^2+\beta\right) > 0$. Поэтому, если $\operatorname{Re} C\ge 0$, то $\left(R_j(\beta)\varphi,\varphi\right) > 0$ при $\beta\in\left(0, 3\cdot 2^{-2/3}\right)$, т.е. $N_{1,T} = N_{2,T} = 3^{-1/2}\cdot 2^{1/3}$.

Используя теоремы 2 и 4 может сформулировать теорему о разрешимости задачи *(1)-(2)*.

Теорема 5. *Пусть* $A = A^* > \gamma E$ $(\gamma > 0)$, $C = A^{5/2} T A^{-1/2}$, $-1\notin\sigma(c)$, $\operatorname{Re} C\ge 0$, *операторы* $B_j = A_j A^{-j}$ $(j=1,2)$ *ограничены в* $\mathcal{H}$ *и выполняется неравенство*

$$\frac{2^{1/3}}{3^{1/3}}\left(\|B_1\| + \|B_2\|\right) < 1$$

Тогда задача (1)-(2) регулярно разрешена.

Отметим, что используя методику работы [9] ïîæíî äîêàçàòü.

Теорема 6. *Пусть* $A = A^* > \gamma E$ $(\gamma > 0)$, $-1\notin\sigma(c)$, $A^{-1}\in\sigma_\infty$, $A_j A^{-j}\in\sigma_\infty$ $(j=1,2)$ *и на мнимой оси существует и ограничен* $P^{-1}(\lambda)$. *Тогда задача (1)-(2) нормально разрешима, т.е. область значения оператора* $P(d/dt)$ *замкнута в* $L_2(R_+;\mathcal{H})$ *и он имеет конечномерную ядро и коядро.*

Автор выражает глубокую благодарность М.Г.Гасымову и С.С.Мирзоеву за внимание к работе.

Литература

[1]. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* М.: Мир, 1971, с. 371.

[2]. Гасымов М.Г. Докл. АН СССР. 1971, т.199, №4, с.747-750.

[3]. Гасымов М.Г. Докл. АН СССР. 1977, т. 235, №3, с.505-508.

[4]. Гасымов М.Г. Изв. АН Арм ССР. Математика. 1971, т. 6, №2-3, с.131-147.
[5]. Дубинский Ю.А. Мат.сб., 1973, т. 90, №1, с. 3-22.
[6]. Мирзоев С.С. Докл. АН СССР. 1983, т. 273, №2, с. 292-295.
[7]. Мирзоев С.С. *Функциональный. анализ и его приложение.* 1983, т. 17, вып. 2, с. 84-85.
[8]. Шкаликов А.А. Труды семинара им.П.И.Петровского , 1989, вып. 14, с.140-224.
[9]. Гасымов М.Г., Мирзоев С.С. Дифференциальное уравнение. 1992, т. 28: №4, с. 651-661.
[10]. Якубов С.Я., Алиев Б.А. Докл. АН СССР. 1981, т. 287: №5, с. 1071-1074.
[11]. Алиев И.В., Алиев Б.А. Сиб. мат. журнал, 1990, т. 31, №4, с. 3-8.

İbrəhimova S.R.

ÜÇÜNCÜ TƏRTİB OPERATOR-DİFFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN SƏRXƏD ŞƏRTİNƏ OPERATOR DAXİL OLDUQDA QOYULMUŞ SƏRXƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNİN VARLIĞI HAQQINDA

Məqalədə separabel Hilbert fəzasında üçüncü tərtib operator diferensial tənliy üçün sərxəd məsələsinin şərtinə operator daxil olduqda qoyulmuş sərxəd məsələsinin həllinin varlığı və korrektliyi isbat olunur.

Ibragimova S.R.

SOLVABILITY OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH THE OPERATOR COEFFICIENTS FOR OPERATOR- DIFFERENTIAL EQUATIONST IN THIRD ORDER

The aim of this paper is to show the existense and correct solvability for elliptic operator diferential equations in Hilbert space with the operator coefficients.