МАТЕМАТИКА

УДК 517.98

АБДУЛЛАЕВ Дж.С.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕЗОНАНСНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СИСТЕМЫ МНОГОМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШРЕДИНГЕРА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В этой статье рассматривается оператор L_t, порождённый в $L_2\left(F;\mathbb{C}^2\right)$ выражением

$$L = -\Delta E_2 + Q(x) \quad ,$$

где

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} q_{11}(x) & q_{12}(x) \\ q_{21}(x) & q_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad q_{12}(x) \equiv q_{21}(x),\ x \in \mathbb{R}^n .$$

(Периодичность понимается в том смысле, что для некоторой решётки

$$\Omega = \left\{ \omega = \sum_{k=1}^{n} m_k \omega_k : m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \left(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \in \mathbb{R}^n\right)$$

выполняется условие: $q_{kr}(x+\omega) = q_{kr}(x),\ \omega \in \Omega,\ k,r = \overline{1,2}$, а $F \equiv \mathbb{R}^n / Q$ - фундаментальная область решётки Ω) и граничными условиями

$$u(x+\omega_k) = e^{i(t,\omega_k)} u(x), \quad k = \overline{1,n} \tag{1}$$

Здесь $t \in F^* \equiv \mathbb{R}^n / \Gamma$ и Γ - двойственная к Ω решётка, $\langle \cdot,\cdot \rangle$ - скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Собственные значения и функции оператора L_t обозначим через Λ_N и ψ_N. В случае $Q(x) \equiv 0$ спектр L_t^0 состоит из множества двухкратных собственных значений $\left\{|\gamma+t|^2 : \gamma \in \Gamma\right.$ ($|\cdot|$ - стандартная норма в $\mathbb{R}_n$), а в качестве базиса в соответствующих собственных подпространствах $H_{\gamma+t}$ можно взять функции

$$\varphi_{\gamma+t}^{(1)} = \left(e^{i\langle \gamma+t,x \rangle}, 0\right)^T, \quad \varphi_{\gamma+t}^{(2)} = \left(0, e^{i\langle \gamma+t,x \rangle}\right)^T ; \gamma \in \Gamma . \tag{2}$$

Для простоты предположим, что при $k, r = \overline{1,2}$ $q_{kr} = \sum_{\gamma_1 \in Q_{pr}} q_{pr}^{\gamma_1} e^{i(\gamma_1, x)}$;

Q_{pr} - конечное множество, $Q = \bigcup_{k,r=\overline{1,2}} Q_{pr}$.

Пусть $Q^m = \{\gamma : \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_p; \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_p \in Q;\ p \le m\}$, $V^m(\alpha) = \bigcup_{\gamma_1 \in Q^m} V_{\gamma_1}(\alpha)$, где $V_{\gamma_1}(\alpha) = \left\{x \in R^n : \left||x|^2 - |x + \gamma_1|^2\right| < |x|^\alpha\right\}$, $0 < \alpha < 2$.

Следуя [2], собственные значения оператора L_t^0 при $\gamma + t \in \mathbb{R}^n \setminus V^m(\alpha)$ назовём m-кратно нерезонансными, а при $\gamma + t \in V^m(\alpha)$- резонансными.

Существует определённый произвол при выборе собственных функций *(2)*. В [1] указано, что нахождением собственных значений $c^\pm$ и собственных векторов $(a_1^\pm, a_2^\pm)^T$ матрицы $(q_{kr}^0)_{k,r=\overline{1,2}}$ и введением с их помощью "правильных" собственных функций $\varphi_{\gamma+t}^{(\pm)} = \sum_{i=1}^{2} a_i^{(\pm)} \varphi_{\gamma+t}^{(i)}$ оператора L_t^0, доказаны асимптотические формулы порядка $O\left(|\gamma + t|^{-m\alpha}\right)$ для m-кратно нерезонансных собственных значений. В этой статье исследуются резонансные собственные значения, т.е. рассматривается случай, когда $\gamma + t \in V_{\gamma_1}(\alpha), \gamma_1 \in Q$.

Основную роль в доказательстве асимптотических формул играют следующие равенства:

$$\left(\Lambda_N - |\gamma + t|^2\right)\left(\psi_N, \varphi_{\gamma+t}^{(i)}\right) = \left(\psi_N, Q(x)\varphi_{\gamma+t}^{(i)}\right), \quad i = 1,2 \quad (3)$$

Собственное значение Λ_n переобозначим через $\Lambda_N^{(\pm)}(\gamma + t)$, если

$$\left|\left(\psi_N, \varphi_{\gamma+t}^{(\pm)}\right)\right| = \max_{\gamma'} \left\{\left|\left(\psi_N, \varphi_{\gamma'+t}^{(+)}\right)\right|; \left|\left(\psi_N, \varphi_{\gamma'+t}^{(-)}\right)\right|\right. \quad (4)$$

Собственное значение $|\gamma + t|^2$ оператора L_t^0 называется k-кратно резонансным, если

$$\gamma + t \in E_k(\alpha) \equiv \bigcup_{\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in Q} \left(V_{\gamma_1}(\alpha) \cap V_{\gamma_2}(\alpha) \cap \ldots \cap V_{\gamma_k}(\alpha)\right),$$

где $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ - линейно-независимые векторы.

Пусть сперва $|\gamma + t|^2$ - однократно резонансное (кстати, основная часть резонансных собственных значений, а при $n = 2$ и вовсе все являются однократно резонансными). Положим

$$A(\gamma + t, \gamma_1) = \{\gamma + t + p\gamma_1 : |p| \le p_0\}, \text{ где } p_0 \sim |\gamma + t|^\alpha,$$

$$\eta_{\gamma_1}\left(|\gamma_1|^2\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left||x|^2 - |x + \gamma_1|^2\right| \le |\gamma_1|^2\right\}.$$

Тогда $\{\gamma + t \in V_{\gamma_1}(\alpha) : \gamma \in \Gamma\} = \bigcup_{\gamma : \gamma + t \in \eta_{\gamma_1}(|\gamma_1|^2)} A(\gamma + t, \gamma_1)$ и из результатов [2] следует

Теорема 1. (i) *Если* $|\gamma + t|^2 \in D = \left\{|\gamma_2 + t|^2 : \gamma_2 + t \in A(\gamma + t, \gamma_1)\right\}$, *то*

$$\Lambda_N^{(\pm)}(\gamma+t)=\left[\lambda_{s^\pm}\right]+O\left(|\gamma+t|^{-\alpha}\right), \qquad (5)$$

где $\left[\lambda_{s^\pm}\right]$*- собственные значения матрицы* $\widetilde{C}=(\widetilde{c}_{lr})$ *имеющей вид*

$\widetilde{c}_{2i-1,2i-1}=|\gamma_3+t+i\gamma_1|^2+c^+$; $\widetilde{c}_{2i,2i}=|\gamma_3+t+i\gamma_1|^2+c^-$; $\widetilde{c}_{2i-1,2i}=\widetilde{c}_{2i,2i-1}=0$

при $i=\overline{-p_0,p_0}$, *а остальные коэффициенты явно выражаются через* q_{pr}^{γ}.

(ii) *Для любого* $|\gamma+t|^2\in D$ *существуют собственные значения* $\Lambda_N^{(+)}$ *и* $\Lambda_N^{(-)}$ *оператора* L_t, *удовлетворяющие асимптотике (5).*

Отметим, что последняя теорема может быть сформулирована и доказана в терминах любых базисов, выбранных в подпространствах $H_{\gamma+t}$ (т.е. выбор "правильных" собственных функций не существенен). Однако, автором доказано, что получающиеся при этом, вообще говоря, разные матрицы $\widetilde{C}$ являются подобными (см. [4]) и обладают одинаковыми собственными значениями, что влечёт за собой инвариантность асимптотической формулы *(5)*.

Подробным исследованием собственных чисел матрицы $\widetilde{C}$ доказаны:

Теорема 2. *В (5)* $\left[\lambda_{s^\pm}\right]$ *можно заменить на собственное значение системы операторов Штурма-Лиувилля (одномерных операторов Шредингера), порождённого в* $L_2\left([0,2\pi];\mathbb{C}^2\right)$ *выражением:*

$$L(\mathbf{y},\gamma_1)=-|\gamma_1|^2\mathbf{y}''-i\left(a-|\gamma_1|^2\right)\mathbf{y}'+|\gamma+t|^2\mathbf{y}+Q_{\gamma_1}(x),$$

где $\mathbf{y}$ *- двухкомпонентный вектор, а* $\widetilde{Q}_{\gamma_1}(x)$*- матрица второго порядка с элементами*

$$\left(\widetilde{Q}_{\gamma_1}\right)_{kr}(x)=\sum_s\widetilde{q}_{kr}^{s\gamma_1}e^{isx}, \quad k,r=\overline{1,2}.$$

(здесь $\widetilde{q}_{kr}^{s\gamma_1}$ *- линейная комбинация* $q_{pl}^{\gamma_1}$, $p,l=\overline{1,2}$*) и периодическими граничными условиями.*

И следующее естественное

Предложение. *В границах резонансных множеств асимптотические формулы для резонансных собственных значений переходят друг в друга.*

Теперь докажем, что собственное значение Λ_N оператора L_t, соответствующее (в каком смысле будет уточнено ниже) резонансному собственному значению оператора L_t^0, отличается от некоторого собственного значения оператора L^{γ_0}, порождённого в $L_2\left(F;\mathbb{C}^2\right)$ выражением

$$L^{\gamma_0}=-\Delta E_2+{}^{\gamma_0}Q(x), \text{ где } {}^{\gamma_0}Q(x)=\left({}^{\gamma_0}q_{kr}(x)\right)_{k,r=1,2}, \ {}^{\gamma_0}q_{kr}(x)=\sum_s q_{kr}^{s\gamma_0}e^{is(\gamma_0,x)}$$

$$k,r=\overline{1,2}$$

и граничными условиями *(1)*, на порядок $O\left(\Lambda_N^{-\alpha}\right)$, а собственные значения последнего выражаются через собственные значения системы операторов

Штурма-Лиувилля (т.е. непосредственно, не вводя матрицу $\widetilde{C}$, докажем результат теоремы 2).

Для простоты рассмотрим случай $n=2,\ t=0$. Следуя [3], занумеруем векторы $\gamma_1,\gamma_2,\ldots$ из $\eta_{\gamma_0}\left(|\gamma_0|^2\right)$ в порядке возростания по модулю: $|\gamma_1|\le|\gamma_2|\le\ldots$. Собственные функции оператора L^{γ_0} будем искать в следующем виде:

$$\varphi_{k,n}(x)=e^{i\langle\gamma_k,x\rangle}\varphi_n(\langle\gamma_0,x\rangle)\ .$$

В новой системе координат

$$\xi_1=\langle\gamma_0,x\rangle,\quad \xi_2=\langle\gamma_0^{\perp},x\rangle,\ \text{где}\ \ \langle\gamma_0^{\perp},\gamma_0\rangle=0,\quad |\gamma_0|=|\gamma_0^{\perp}|$$

$$\varphi_{k,n}(\xi)=e^{i(a_k\xi_1+b_k\xi_2)}\varphi_n(\xi_1),\ \text{где}\ \xi=(\xi_1,\xi_2),\quad a_k^2+b_k^2=|\gamma_k|^2\ .$$

Лемма 1. *Собственные значения $\lambda_{k,n}$ и функции $\varphi_{k,n}$ оператора L^{γ_0} имеют вид:*

$$\lambda_{k,n}=|\gamma_0|^2|\gamma_k|^2+\mu_n;\quad \varphi_{k,n}(x)=e^{i\langle\gamma_k,x\rangle}\varphi_n(\langle\gamma_0,x\rangle)\ ,$$

где $\mu_1,\mu_2,\ldots$ и $\varphi_1(\xi_1),\varphi_2(\xi_1),\ldots$-собственные значения и соответствующие собственные функции системы операторов Штурма-Лиувилля, порождённой выражением

$$\left(-|\gamma_0|^2\right)[\varphi''+2ia_k\varphi']+{}^{\gamma_0}Q(\xi_1)\varphi$$

и граничными условиями:

$$\varphi(2\pi)=\varphi(0),\quad \varphi'(2\pi)=\varphi'(0).$$

Доказательство. Простыми вычислениями убедимся, что $\lambda_{k,n}$ и $\varphi_{k,n}(x)$ являются собственными значениями и функциями оператора L^{γ_0}. Учитывая, что множество $\{\gamma_k+n\gamma_0:k,n\}$ покрывает все точки решетки Γ, докажем, что других собственных функций нет.

Вместо равенств *(3)* нам нужно равенство

$$(\Lambda_N-\lambda_{k,m})(\psi_N,\varphi_{k,m})=\left(\psi_N,\left(Q(x)-{}^{\gamma_0}Q(x)\right)\varphi_{k,m}\right)\ .$$

Чтобы использовать это равенство нам понадобится

Лемма 2. *Пусть $\gamma\in V_{\gamma_0}(\alpha)$ и $\Lambda_{N_i}=\Lambda_N^{(i)}\left(|\gamma|^2\right),\ i=\overline{1,2}$ (см. (4)). Тогда существует такие пары номеров (k_{N_1},m_{N_1}) и (k_{N_2},m_{N_2}), для которых*

$$\left|\left(\psi_{N_i},\varphi_{k_{N_i},m_{N_i}}\right)\right|>|\gamma|^{-\frac{\alpha}{10}}\left|\left(\psi_N,\varphi_\gamma^{(i)}\right)\right|\ ,$$

$$\varphi_{k_{N_i},m_{N_i}}=\sum_{\substack{|p|<2|\gamma|^{\frac{\alpha}{10}}\\ j=1,2}}\widetilde{a}_{j,p}^{(i)}\varphi_{\gamma+p\gamma_0}^{(j)}+O\left(\frac{1}{|\gamma|^3}\right),\quad i=\overline{1,2}.$$

Доказательство. Разложив $\left(e^{in\xi_1},0\right)^T$ в ряд по функциям $\varphi_{k,m'}(\xi_1)$, являющемися собственными функциями оператора, порождённого выражением *(6)*, соответствующие собственные значения которых удовлетворяют асимптотике $\mu_{m^{\pm}}=m^2+O(1)$ и применив одномерный вариант равенств *(3)*, получим

$$\left|\left(\psi_{N_1},\varphi^{(1)}_{\gamma+t}\right)\right|\le 2|\gamma|^{\frac{\alpha}{10}}\max_m\left\{\left|\left(\psi_{N_1},\varphi_{k,m^+}\right)\right|;\left|\left(\psi_{N_1},\varphi_{k,m^-}\right)\right|\right\}+O\left(|\gamma|^{-3}\right).$$

(Здесь k определяется заданием γ). Если максимум достигается при $m=m_{N_1}$, то разложив $\varphi_{k,m_{N_1}}$ в ряд по полной системе $\left\{\left(e^{in\xi_1},0\right)^T;\left(0,e^{in\xi_1}\right)^T\right\}_n$ с помощью методов, изложенных в [2], получим требуемое для Λ_{N_1}. Для Λ_{N_2} всё обстоит аналогично.

Заметим, что если воспользоваться методикой, изложенной в [5], то $\left|\left(\psi_N,\varphi_{k,m}\right)\right|$ можно оценить снизу автономно, а не через $\left|\left(\psi_N,\varphi^{(i)}_{\gamma+t}\right)\right|$.

Теорема 3. *Если* $\gamma\in V_{\gamma_0}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, *то собственные значения* $\Lambda^{(i)}_N\left(|\gamma|^2\right)$ *имеют вид:*

$$\Lambda^{(i)}_N\left(|\gamma|^2\right)=\lambda_{k_{N_i},m_{N_i}}+O\left(|\gamma|^{-\alpha}\right),\quad i=\overline{1,2}\ ,$$

где $\lambda_{k_{N_i},m_{N_i}}$ *определено в лемме 2.*

Доказательство. С помощью *(7)* и *(9)* получим

$$\left(\Lambda_{N_1}-\lambda_{k_{N_1},m_{N_1}}\right)\left(\psi_{N_1},\varphi_{k_{N_1},m_{N_1}}\right)=\sum_{\substack{p:\ p\le 2|\gamma|^{\frac{\alpha}{10}}\\ j=\overline{1,2}}}\tilde{a}^{(1)}_{j,p}\left(\psi_{N_1},\left(Q(x)-^{\gamma_0}Q(x)\right)\varphi^{(j)}_{\gamma+p\gamma_0}\right)+O\left(\frac{1}{|\gamma|^3}\right).$$

Воспользовавшись равенствами *(3)* и методикой, изложенной в [2], получим

$$\left(\Lambda_{N_1}-\lambda_{k_{N_1},m_{N_1}}\right)\left(\psi_{N_1},\varphi_{k_{N_1},m_{N_1}}\right)=O\left(|\gamma|^{-\alpha-\frac{\alpha}{10}}\right)\left(\psi_{N_1},\varphi^{(1)}_{\gamma}\right).$$

Разделив обе части на $\left|\left(\psi_{N_1},\varphi_{k_{N_1},m_{N_1}}\right)\right|$ и учтя неравенство *(8)* получим требуемое для Λ_{N_1}. Для Λ_{N_2} всё аналогично.

Теперь получим асимптотические формулы порядка $O\left(|\gamma+t|^{-m\alpha}\right)$.

Теорема 4. *Допустим, что* $\gamma+t\in V_{\gamma_1}\left(\frac{1}{4}\right),\gamma+t\notin V_{\gamma_2}\left(\frac{1}{2}\right)$, *где* γ_2 *произвольный, не пропорциональный* γ_1, *вектор из* Q^m. *Пусть для некоторого номера* N, *такого, что* $\left|\Lambda_N-|\gamma+t|^2\right|<2M$, *где* M *- достаточно большое число, выполнено одно из следующих соотношений:*

$$\left|b^{(+)}_{N,\gamma}\right|>|\gamma+t|^{-(m-1)/2},\quad\left|b^{(-)}_{N,\gamma}\right|>|\gamma+t|^{-(m-1)/2},\quad\left(b^{(\pm)}_{N,\gamma}\stackrel{def}{\equiv}\left(\psi_N,\varphi^{(\pm)}_{\gamma+t}\right)\right).$$

Тогда собственное значение Λ_N *удовлетворяет асимптотике*

$$\Lambda_N=\lambda_k(\gamma+t)+\left(|\gamma+t|^{-\frac{3}{8}}\right),$$

где $\lambda_k(\gamma+t)$- *собственное значение матрицы* $\widetilde{C}$ *из теоремы 1. В частности, собственные значения* $\Lambda_N^{(\pm)}(\gamma+t)$ *всегда удовлетворяют асимптотике (10).*

Доказательство. Написав систему *(3)* для всех

$$\gamma+t+p\gamma_1 \in A(\gamma+t,\gamma_1), \quad p_0 \sim \frac{|\gamma+t|^{\frac{1}{4}}}{|\gamma_1|}$$

и учитывая, что для $\widetilde{\gamma}+t \in (A+Q)\setminus A$

$$\left| |\widetilde{\gamma}+t|^2 - |\gamma+t+p\gamma_1|^2 \right| > \frac{1}{4}|\gamma+t|^{\frac{1}{2}}$$

после простых манипуляций, получим

$$\left(\widetilde{C}-\Lambda_N I\right)\left(b_{N,\gamma-p_0\gamma_1}^{(+)}, b_{N,\gamma-p_0\gamma_1}^{(-)}, b_{N,\gamma-(p_0-1)\gamma_1}^{(+)}, \ldots, b_{N,\gamma-p_0\gamma_1}^{(-)}\right)^T =$$

$$= \left(O\left(|\gamma+t|^{-\frac{1}{2}} \right) \max_{p=-p_0,p_0} \left\{ \left|b_{N,\gamma+p\gamma_1}^{(+)}\right|; \left|b_{N,\gamma+p\gamma_1}^{(-)}\right| \right\} + O\left(|\gamma+t|^{-\frac{m}{2}} \right) \right)(1,\ldots,1)^T .$$

Отсюда и из того факта, что

$$\left\| \left(\widetilde{C}-\Lambda_N I\right)^{-1} \right\| \le \max_k \frac{1}{|\Lambda_N - \lambda_k(\gamma+t)|}$$

получим требуемое. Теорема доказана.

Введём в рассмотрение матрицу $\widetilde{C}^1 = \left(\widetilde{c}_{ij}^1\right)$ с элементами

$$\widetilde{c}_{2i-1,2i-1}^1 = |\gamma+t+i\gamma_1|^2 + \sum_{\gamma_2\in Q_{11}} \frac{\left|\widetilde{q}_{11}^{\gamma_2}\right|^2}{\lambda_k(\gamma+t)-|\gamma+t+i\gamma_1+\gamma_2|^2} +$$

$$+ \sum_{\gamma_2\in Q_{12}} \frac{\left|\widetilde{q}_{12}^{\gamma_2}\right|^2}{\lambda_k(\gamma+t)-|\gamma+t+i\gamma_1+\gamma_2|^2} ,$$

$$\widetilde{c}_{2i,2i}^1 = |\gamma+t+i\gamma_1|^2 + \sum_{\gamma_2\in Q_{22}} \frac{\left|\widetilde{q}_{22}^{\gamma_2}\right|^2}{\lambda_k(\gamma+t)-|\gamma+t+i\gamma_1+\gamma_2|^2} +$$

$$+ \sum_{\gamma_2\in Q_{12}} \frac{\left|\widetilde{q}_{12}^{\gamma_2}\right|^2}{\lambda_k(\gamma+t)-|\gamma+t+i\gamma_1+\gamma_2|^2} ,$$

$$\widetilde{c}_{2i-1,2j-1}^1 = \widetilde{q}_{11}^{(j-i)\gamma_1} + \sum_{\gamma_2\in Q_{11}} \frac{\widetilde{q}_{11}^{-\gamma_2}\widetilde{q}_{11}^{(j-i)\gamma_1+\gamma_2}}{\lambda_k(\gamma+t)-|\gamma+t+i\gamma_1+\gamma_2|^2} +$$

$$+ \sum_{\gamma_2\in Q_{12}} \frac{\widetilde{q}_{12}^{-\gamma_2}\widetilde{q}_{12}^{(j-i)\gamma_1+\gamma_2}}{\lambda_k(\gamma+t)-|\gamma+t+i\gamma_1+\gamma_2|^2} ,$$

$$\widetilde{c}_{2i,2j}^1 = \widetilde{q}_{22}^{(j-i)\gamma_1} + \sum_{\gamma_2\in Q_{22}} \frac{\widetilde{q}_{22}^{-\gamma_2}\widetilde{q}_{22}^{(j-i)\gamma_1+\gamma_2}}{\lambda_k(\gamma+t)-|\gamma+t+i\gamma_1+\gamma_2|^2} +$$

$$+\sum_{\gamma_2\in Q_{12}}\frac{\widetilde{q}_{12}^{\,\gamma_2}\widetilde{q}_{12}^{(j-i)\gamma_1+\gamma_2}}{\lambda_k(\gamma+t)-|\gamma+t+i\gamma_1+\gamma_2|^2},$$

$$\widetilde{c}_{2i-1,2j}^{\,1}=\widetilde{q}_{12}^{(j-i)\gamma_1}+\sum_{\gamma_2\in Q_{11}}\frac{\widetilde{q}_{11}^{\,-\gamma_2}\widetilde{q}_{12}^{(j-i)\gamma_1+\gamma_2}}{\lambda_k(\gamma+t)-|\gamma+t+i\gamma_1+\gamma_2|^2}+$$

$$+\sum_{\gamma_2\in Q_{12}}\frac{\widetilde{q}_{12}^{\,-\gamma_2}\widetilde{q}_{22}^{(j-i)\gamma_1+\gamma_2}}{\lambda_k(\gamma+t)-|\gamma+t+i\gamma_1+\gamma_2|^2},$$

$$\widetilde{c}_{2i,2j-1}^{\,1}=\widetilde{q}_{12}^{(j-i)\gamma_1}+\sum_{\gamma_2\in Q_{22}}\frac{\widetilde{q}_{22}^{\,-\gamma_2}\widetilde{q}_{12}^{(j-i)\gamma_1+\gamma_2}}{\lambda_k(\gamma+t)-|\gamma+t+i\gamma_1+\gamma_2|^2}+$$

$$+\sum_{\gamma_2\in Q_{12}}\frac{\widetilde{q}_{12}^{\,-\gamma_2}\widetilde{q}_{11}^{(j-i)\gamma_1+\gamma_2}}{\lambda_k(\gamma+t)-|\gamma+t+i\gamma_1+\gamma_2|^2},$$

$$\widetilde{c}_{2i,2i-1}=\widetilde{c}_{2i-1,2i}=0,\quad i,j=\overline{-p_0,p_0},\ i\neq j.$$

Аналогично теореме 4 доказывается, что

$$\Lambda_N=\lambda_k^1(\gamma+t)+\left(|\gamma+t|^{-1+\frac{1}{8}}\right),$$

где $\lambda_k^1(\gamma+t)$ является собственным значением матрицы $\widetilde{C}^1$. Повторяя этот процесс m раз получим, что

$$\Lambda_N=\lambda_k^r(\gamma+t)+\left(|\gamma+t|^{-\frac{r+1}{2}+\frac{1}{8}}\right),\quad r=2,3,\ldots,m,$$

где $\lambda_k^r(\gamma+t)$- собственное значение матрицы $\widetilde{C}^r$, которая строится аналогично $\widetilde{C}^1$. Этот факт может быть доказан в терминах любых базисов из $H_{\gamma+t}$. Полученные при этом матрицы будут подобны $\widetilde{C}^r$.

Случай k-кратно резонансных собственных значений отличается от рассмотренного тем, что вместо $\eta_{\gamma_1}\left(|\gamma_1|^2\right)$ используется пересечение k таких множеств и всюду вместо системы операторов Штурма-Лиувилля изучается система k- мерных операторов Шредингера.

Автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность проф. Велиеву О.А. за постановку задачи и ценные советы.

Литература

[1]. Абдуллаев Дж.С. *Асимптотические формулы для собственных значений системы многомерных операторов Шредингера.* /M.Ə.Rəsulzadə adına BDU aspirantlarının və gənc tədqiqatçılarının elmi konfransının materialları. Б., 1995, с.8.

[2]. Велиев О.А. *Асимптотические формулы для собственных чисел многомерного оператора Шредингера и периодичесие дифференциальные операторы.* / Препринт №157, ИФ АН Азерб.ССР, 1985, 65 с.

[3]. Велиев О.А. *Асимптотические формулы для собственных чисел оператора Шредингера и гипотеза Бете-Зоммерфельда.* // Функц. ана-

лиз и его прилож., 1987, т.21, вып.2, с.1-15.
[4]. Мальцев А.И. *Основы линейной алгебры.* –М., -Наука, 1975, 400с.
[5]. Veliev O.A. *On inverse problem for multidimensional periodic Schrodinger operator by isoenergetic surfaces.* // Azərb. Riyaziyyat Cəmiyyətinin əsərləri. C.1, B., 1994, s.29-44.

Abdullayev C.S.

PERİODİK ƏMSALLI ÇOXÖLÇÜLÜ ŞREDİNGER OPERATORLARI SİSTEMİNİN REZONANS MƏXSUSİ ƏDƏDLƏRİ ÜÇÜN ASİMPTOTİK DÜSTURLAR

$$L = -\Delta E_2 + Q(x)$$

ifadəsi və kvaziperiodik sərhəd şərtləri ilə törənmiş sistem nəzərdən keçirilir. Burada Δ- Laplas operatorudur, E_2- vahid, $Q(x)$ isə simmetrik ikinci tərtib matrislərdir. Bu operatorun $Q(x) \equiv 0$ olduqda məxsusi ədədləri q/rezonans və rezonans adlanan iki qrupa ayrılmışdır. İşdə rezonans məxsusi ədədlərin həyəcanlanması üçün asimptotik düsturlar alınmışdır.

Abdullayev Dj.S.

ASYMPTOTIC FORMULAE FOR RESONANCE EIGENVALUES OF SYSTEM OF MULTIDIMENSIONAL SCHRÖDINGER OPERATORS WITH PERIODIC COEFFICIENTS

It is considered the system, generated by expression

$$L = -\Delta E_2 + Q(x)$$

and the quasperiodic boundary conditions, where Δ-Laplace operator, E_2- unit, $Q(x)$- symmetric second order matrix. The eigenvalues of this operator with $Q(x) \equiv 0$ is divided into two groups: non-resonance and resonance one. In this work the asymptotic formulae for perturbation of resonance eigenvalues are obtained.