УДК 517. 51

ИЛЬЯСОВ Н.А.

К НЕРАВЕНСТВУ ДЖЕКСОНА-СТЕЧКИНА В ПРОСТРАНСТВАХ $L_p(T^m)$, $1<p<\infty$.

Установлена точность в смысле порядка многомерного L_p - аналога неравенства Джексона- Стечкина в разных метриках на классе с заданной мажорантой модуля гладкости функции или её смешанных производных. Выяснены условия (необходимые и достаточные) существования индивидуальных функций, доставляющих оценку снизу в соответствующем неравенстве.

В заметке используются следующие обозначения: R^m - m - мерное эвклидово пространство точек $x=(x_1,\dots x_m)$ с нормой $|x|=(x_1^2+\dots+x_m^2)^{1/2}$; $T^m=\{x\in R^m;0\le x_i<2\pi, i=\overline{1,m}\}$ - m - мерный тор; $L_p(T^m), 1<p<\infty$,- пространство всех измеримых 2π-периодических по каждой переменной x_i $(i=\overline{1,m})$ функций $f(x)=f(x_1,\dots x_m)$, для которых $\|f\|_{L_p(T^m)}\equiv\|f\|_{p,m}=$ $=\left\{(2\pi)^{-m}\int\limits_{T^m}|f(x)|^p dx\right\}^{1/p}<\infty$, $L_\infty(T^m)=C(T^m)$- соответствующее пространство непрерывных функций, $\|f\|_{\infty,m}=\max\{|f(x)|;x\in T^m\}$, $W_p^r(T^m)$, $1\le p\le\infty$, $r\in N$, класс функций $f\in L_p(T^m)$, имеющих производные $D^\alpha f(x)\in L_p(T_m)$ при всех $|\alpha|\le r$, $\|f;W_p^r(T^m)\|=\sum\limits_{0\le|\alpha|\le r}\frac{r!}{\alpha!}\|D^\alpha f\|_{p,m}$, где $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)$, $\alpha_i\in Z_+$ $(i=\overline{1,m})$, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m$, $\alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\dots\alpha_m!$, $D^\alpha f(x)=\frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_m^{\alpha_m}}$, $D^0 f(x)\equiv f(x)$; $E_{n_1,\dots,n_m}(f)_{p,m}$- полное наилучшее в метрике $L_p(T^m)$ приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка $\le n_i\in Z_+$ соответственно по переменной x_i $(i=\overline{1,m})$; $\omega_l(f;\delta)_{p,m}$- полный модуль гладкости l-го порядка функции $f\in L_p(T^m)$, $l\in N:\omega_l(f;\delta)_{p,m}=$ $\sup\{\|\Delta_h^l f\|_{p,m}; h\in R^m, |h|\le\delta\}$, $\delta>0$, где $\Delta_h^l f(x)=\sum\limits_{\nu=0}^{l}(-1)^{l-\nu}\binom{l}{\nu}f(x+\nu h)=$

$\sum_{\nu=0}^{l}(-1)^{l-\nu}\binom{l}{\nu}f(x_1+\nu h_1,\ldots,x_m+\nu h_m)$; $\omega_l^{(i)}(f;\delta)_{p,m}$ - частный модуль гладкости l-го порядка функции $f\in L_p(T^m)$ по переменной x_i $(i=\overline{1,m})$: $\omega_l^{(i)}(f;\delta)_{p,m}=$ $\sup\left\{\left\|\Delta^l_{i\,\eta} f\right\|_{p,m};\eta\in R,|\eta|\le\delta\right\}$, где $\Delta^l_{i\,\eta} f(x)=\sum_{\nu=0}^{l}(-1)^{l-\nu}\binom{l}{\nu}f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+\eta,$ $x_{i+1},\ldots,x_m)$.

Между полным наилучшим приближением и частными модулями гладкости функции $f\in L_p(T^m)$ существует известная связь, выражаемая прямой теоремой теории приближений (см. напр., [1; с. 288]):

$$E_{n-1,\ldots,n-1}(f)_{p,m}\le C_1(l,m)\sum_{i=1}^{m}\omega_l^{(i)}(f;\pi/n)_{p,m},$$

откуда,в силу очевидного неравенства $\omega_l^{(i)}(f;\delta)_{p,m}\le\omega_l(f;m^{1/2}\delta)_{p,m}$ $(i=\overline{1,m})$, следует оценка ($\rho=\pi m^{1/2}$; см. [2; с. 226], [1; с. 338], случай $m=1$)

$$E_{n-1,\ldots,n-1}(f)_{p,m}\le mC_1(l,m)\omega_l(f;\rho/n)_{p,m}\ . \qquad (1)$$

Полагая в этой оценке $l=k+r,k\in N,r\in Z_+$, в силу неравенства $\omega_{k+r}(f;\delta)_{q,m}\le m^r\delta^{r-m(1/p-1/q)}\max_{|\alpha|=r}\omega_k(D^\alpha f;\delta)_{p,m}$ (см. ниже 2) леммы 3) имеем $(f\in W_p^r(T^m),1\le p\le q\le\infty)$

$$E_{n-1,\ldots,n-1}(f)_{q,m}\le C_2(k,r,m)(\rho/n)^{r-m(1/p-1/q)}\max_{|\alpha|=r}\omega_k(D^\alpha f;\rho/n)_{p,m}, \qquad (2)$$

где $C_2(k,r,m)=m^{r+1}C_1(k+r,m),r\ge0$ при $p=q,r>m(1/p-1/q)$ при $1\le p<q\le\infty,r=m(1/p-1/q)$ при $p=1,q=\infty$ и $1<p<q<\infty$ (последние условия обеспечивают вложение класса $W_p^r(T^m)$ в $L_q(T^m)$ при $p<q$; см. [3]).

Для заданных $r\in Z_+,k\in N,1\le p\le\infty$ и $\omega\in\Omega_k(0,\rho]$ обозначим

$$W^rH^k_{p,m}[\omega]=\left\{f\in W_p^r(T^m);\max_{|\alpha|=r}\omega_k(D^\alpha f;\delta)_{p,m}\le\delta\in(0,\rho]\right\},$$

$W^0H^k_{p,m}[\omega]\equiv H^k_{p,m}[\omega]$, где $\Omega_k(0,\rho]$- класс функций $\omega(\delta)$, определенных на $(0,\rho]$ и удовлетворяющих условиям: $0<\omega(\delta)\downarrow0(\delta\downarrow0)$ и $\delta^{-k}\omega(\delta)\downarrow(\delta\uparrow)$.

Теорема 1. *Пусть* $1<p\le q<\infty,r\in Z_+,k\in N,m\ge1,r\ge0$ *при* $p=q$ *и* $r\ge m(1/p-1/q)$ *при* $p<q,\ \omega\in\Omega_k(0,\rho]$; *тогда* $(n\in N)$

$$\sup\left\{E_{n-1,\ldots,n-1}(f)_{q,m};f\in W^rH^k_{p,m}[\omega]\right\}\asymp n^{-r+m(1/p-1/q)}\omega(\rho/n). \qquad (3)$$

Оценка сверху в *(3)* следует из неравенства *(2)*. Оценка снизу в *(3)* реализуется с помощью семейства функций (см. ниже лемму 4)

$$\left\{(C_7(k,r,p,m))^{-1}G_n(x;p;r;m;\omega)\right\}_{n=1}^{\infty}\subset W^rH^k_{p,m}[\omega]\ .$$

Лемма 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\lambda \in Z_+$, $m \ge 1$, $s \in N$, $n \in Z_+$, $s \ge 2n$, $\sigma = \lambda + m(1 - 1/p)$, $d_{n,s}(y) = \sum_{\nu=n+1}^{s} \cos \nu y$, $y \in R$; *тогда справедливы оценки*

$$C_3(p;\lambda;m)(s-n)^{\sigma} \le \max_{|\alpha|=\lambda} \left\| D^{\alpha} \prod_{i=1}^{m} d_{n,s}(x_i) \right\|_{p,m} \le C_4(p;\lambda;m)(s-n)^{\sigma}, \qquad (4)$$

где $C_3(p;\lambda;m) = [C_5(p)]^m (\lambda+2)^{-m}$, $C_4(p;\lambda;m) = [C_6(p)]^m 2^{\lambda}$.

Доказательство. При $m = 1$ доказательство *(4)* приведено в [4; лемма 1.3]. При $m > 1$ в силу очевидного равенства $\left\| D^{\alpha} \prod_{i=1}^{m} d_{n,s}(x_i) \right\|_{p,m} = \prod_{i=1}^{m} \left\| d_{n,s}^{(\alpha_i)}(x_i) \right\|_{p,1}$ имеем $(\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m), |\alpha| = \lambda)$
$\left\| D^{\alpha} \prod_{i=1}^{m} d_{n,s}(x_i) \right\|_{p,m} \le \prod_{i=1}^{m} C_6(p) 2^{\alpha_i} (s-n)^{\alpha_i + 1 - 1/p} = [C_6(p)]^m 2^{\lambda} \prod_{i=1}^{m} (s-n)^{\alpha_i + 1 - 1/p} =$
$= [C_6(p)]^m 2^{\lambda} (s-n)^{\lambda + m(1-1/p)}$, $\left\| D^{\alpha} \prod_{i=1}^{m} d_{n,s}(x_i) \right\|_{p,m} \ge \prod_{i=1}^{m} C_5(p)(2+\alpha_i)^{-1} (s-n)^{\alpha_i + 1 - 1/p} =$
$= [C_5(p)]^m \prod_{i=1}^{m} (2+\alpha_i)^{-1} \prod_{i=1}^{m} (s-n)^{\alpha_i + 1 - 1/p} \ge [C_5(p)]^m (\lambda+2)^{-m} (s-n)^{\lambda + m(1-1/p)}$,
откуда и следуют требуемые оценки.

Лемма 2. *Пусть* $f \in L_p(T^m)$, $m > 1$, $1 \le p \le \infty$, $l \in N$; *тогда для* $\forall h = (h_1, \ldots, h_m) \in R^m$

$$\left\| \Delta_h^l f(x) \right\|_{p,m} \le \sum_{|\alpha|=l} \frac{l!}{\alpha!} \left\| \Delta_{h_1,\ldots,h_m}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m} f(x) \right\|_{p,m} \qquad (5)$$

где $\Delta_{h_1,\ldots,h_m}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m} f(x) = \underset{1\ h_1}{\Delta}^{\alpha_1} \ldots \underset{m\ h_m}{\Delta}^{\alpha_m} f(x_1, \ldots, x_m)$, $\underset{i\ h_i}{\Delta}^{0} f(x) = f(x)$.

Доказательство неравенства *(5)* приведено в [5; лемма 1] (см. также [6]). Отметим, что *(5)* можно доказать также индукцией по l, так как при $l = 1$ оно принимает вид $\left\| \Delta_h^1 f(x) \right\|_{p,m} \le \sum_{i=1}^{m} \left\| \underset{i\ h_i}{\Delta}^{1} f \right\|_{p,m}$, которое, с учетом инвариантности операции сдвига $T_{\eta}^{(i)} f(x) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \eta, x_{i+1}, \ldots x_m)$, $\eta \in R$, в пространствах $L_p(T^m)$, следует из очевидного тождества

$$\Delta_{(h_1,\ldots,h_m)}^1 f(x_1, \ldots x_m) = \sum_{i=1}^{m} \underset{i\ h_i}{\Delta}^{1} f(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1} + h_{i+1}, \ldots, x_m + h_m).$$

Лемма 3. *Пусть* $f \in W_p^r(T^m)$, $1 \le p \le q \le \infty$, $k \in N$, $r \in N$, $m \ge 1$, $r \ge 1$ *при* $p = q$, $r > m(1/p - 1/q)$ *при* $1 \le p < q \le \infty$, $r = m(1/p - 1/q)$ *при* $p = 1$, $q = \infty$ *и* $1 < p < q < \infty$; *тогда справедливы оценки*

1) $\omega_r(f;\delta)_{q,m} \le \delta^{r - m(1/p - 1/q)} \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} \left\| D^{\alpha} f \right\|_{p,m} \le m^r \delta^{r - m(1/p - 1/q)} \max_{|\alpha|=r} \left\| D^{\alpha} f \right\|_{p,m}$;

2) $\omega_{k+r}(f;\delta)_{q,m} \le \delta^{r-m(1/p-1/q)} \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} \omega_k(D^\alpha f;\delta)_{p,m} \le$

$$\le m^r \delta^{r-m(1/p-1/q)} \max_{|\alpha|=r} \omega_k(D^\alpha f;\delta)_{p,m}.$$

Доказательство. Неравенства 1) и 2) при $m=1$ и $p=q$ хорошо известны (см., напр., [7, с. 104]). Если $m>1$, $p=q$ и $f \in W_p^r(T^m)$, то для $\forall h=(h_1,\dots,h_m) \in R^m$, $|h| \le \delta$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_m)$, $|\alpha|=r$ имеем (при $m=1$ см., напр., [7], неравенство (109) на с. 102)

$$\left\|\Delta_{h_1,\dots,h_m}^{\alpha_1,\dots,\alpha_m} f\right\|_{p,m} \le \prod_{i=1}^m |h_i|^{\alpha_i} \left\|D^\alpha f\right\|_{p,m} \le |h|^r \left\|D^\alpha f\right\|_{p,m},$$

откуда в силу леммы 2 (полагаем $l=r$) получаем

$$\left\|\Delta_h^r f\right\|_{p,m} \le \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} \left\|\Delta_{h_1,\dots,h_m}^{\alpha_1,\dots,\alpha_m} f\right\|_{p,m} \le |h|^r \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} \left\|D^\alpha f\right\|_{p,m} \le$$

$$\le \delta^r \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} \left\|D^\alpha f\right\|_{p,m} \le m^r \delta^r \max_{|\alpha|=r} \left\|D^\alpha f\right\|_{p,m}.$$

Неравенства 1) и 2) при $m=1$ и $p<q$ следуют из оценки (см., напр., [7;с.136]) $\left\|\Delta_\eta^r f\right\|_{q,1} \le |\eta|^{r-(1/p-1/q)} \left\|f^{(r)}\right\|_{p,1}$ $(\eta \in R,\ f \in W_p^r(T))$, которую применительно к случаю $m>1$ можно переписать следующим образом $\left\|\Delta_{i\ h_i}^{\alpha_i} f\right\|_{q,m} \le$ $\le |h_i|^{\alpha_i-(1/p-1/q)} \left\|\partial^{\alpha_i} f / \partial x_i^{\alpha_i}\right\|_{p,m}$ $(i=\overline{1,m})$.

Последовательное применение этой оценки приводит к неравенству (если некоторое $\alpha_i=0$, то соответствующий множитель в произведении отсутствует) $\left\|\Delta_{h_1,\dots,h_m}^{\alpha_1,\dots,\alpha_m} f\right\|_{q,m} \le \prod_{i=1}^m |h_i|^{\alpha_i-(1/p-1/q)} \left\|D^\alpha f\right\|_{p,m} \le |h|^{r-m(1/p-1/q)} \left\|D^\alpha f\right\|_{p,m}$, откуда в силу леммы 2 получаем требуемую оценку в 1). Неравенство 2) следует из 1), если её применить к функции $g(x)=\Delta_h^k f(x) \in W_p^r(T^m)$, $h=$ $=(h_1,\dots,h_m) \in R^m$, $|h| \le \delta$.

Лемма 4. *Пусть* $1<p\le q<\infty$, $m\ge 1$, $k \in N$, $r \in Z_+$, $\omega \in \Omega_k(0,\rho]$. *Существует последовательность функций* $\{G_n\}_{n=1}^\infty \subset W_p^r(T^m)$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $\max_{|\alpha|=r} \omega_k(D^\alpha G_n;\delta)_{p,m} \le C_7(k,r,p,m)\omega(\delta)$, $\delta \in (0,\rho]$;

2) $E_{n\ 1,\dots,n-1}(G_n)_{q,m} \ge C_8(q,m) n^{-r+m(1/p-1/q)} \omega(\rho/n)$.

Доказательство леммы 4 в случае $r=0$, $m=1$ приведено в [8, лемма 2]. Функции G_n определяются следующим образом:

$$G_n(x;p;m;r;\omega) = n^{-r+m(1/p-1)} \omega(\rho/n) \prod_{i=1}^m d_{0,2n}(x_i).$$

Для $\forall\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m),|\alpha|\le r$ в силу правого неравенства в *(4)*
$\|D^\alpha G_n\|_{p,m}=n^{r+m(1/p-1)}\omega(\rho/n)\left\|D^\alpha\prod_{i=1}^m d_{0,2n}(x_i)\right\|_{p,m}\le C_4(p;r;m)2^{r+m(1-1/p)}\omega(\rho/n)$,
откуда $\sup_n\max_{|\alpha|\le r}\|D^\alpha G_n\|_{p,m}\le C_4(p,r,m)2^{r+m(1-1/p)}\omega(\rho)<\infty$, т.е. $\{G_n\}\subset W_p^r(T^m)$.

Для доказательства 1) заметим, что при $\forall\delta\in(0,\rho]$ и фиксированном $n\in N$ возможны два случая: $\delta<\rho/n$ или $\delta\ge\rho/n$. При $\delta<\rho/n$, учитывая $\delta^{-k}\omega(\delta)\downarrow(\delta\uparrow)$, имеем в силу 1) леммы 3 (случай $p=q$)

$$\max_{|\alpha|=r}\omega_k(D^\alpha G_n;\delta)_{p,m}\le m^k\delta^k\max_{|\alpha|=r}\max_{|\beta|=k}\|D^\beta(D^\alpha G_n)\|_{p,m}\le$$

$$\le m^kC_4(p;k+r;m)2^{r+k+m(1-1/p)}n^k\delta^k\omega(\rho/n)\le C_9(p;k;r;m)\omega(\delta);$$

при учёте $\delta\ge\rho/n$, с учётом $\omega(\delta)\uparrow(\delta\uparrow)$, получаем

$$\max_{|\alpha|=r}\omega_k(D^\alpha G_n;\delta)_{p,m}\le 2^k\max_{|\alpha|=r}\|D^\alpha G_n\|_{p,m}\le$$

$$\le C_4(p,r,m)2^{r+k+m(1-1/p)}\omega(\rho/n)\le C_{10}(p;k;r;m)\omega(\delta).$$

Докажем 2). Обозначая $T_{2n,\ldots,2n}(x_1,\ldots,x_m)=\prod_{i=1}^m d_{0,2n}(x_i)-\prod_{i=1}^m d_{0,n}(x_i)$, в силу неравенства Джексона- Никольского (см., напр., [1], с. 246, неравенство (18)) имеем $(2^m-1)n^m=|T_{2n,\ldots,2n}(0,\ldots,0)|\le\|T_{2n,\ldots,2n}\|_{\infty,m}\le 2^m(2n)^{m/q}\|T_{2n,\ldots,2n}\|_{q,m}$, откуда $\|T_{2n,\ldots,2n}\|_{q,m}\ge(2^m-1)2^{-m(1+1/q)}n^{m(1-1/q)}$.

Учитывая последнюю оценку, в силу неравенства М. Рисса *(6)* [1; с. 339] получаем ($S_{n_1,\ldots,n_m}(f;x_1,\ldots,x_m)$- частная сумма порядка n_i по переменной x_i $(i=\overline{1,m})$ ряда Фурье функции f) $C_{11}^m(q)E_{n-1,\ldots,n-1}(G_n)_{q,m}\ge$
$\ge C_{11}^m(q)E_{n,\ldots,n}(G_n)_{q,m}\ge\|G_n-S_{n,\ldots,n}(G_n)\|_{q,m}=n^{-r+m(1/p-1)}\omega(\rho/n)\|T_{2n,\ldots,2n}\|_{q,m}\ge$
$\ge(2^m-1)2^{-m(1+1/q)}n^{-r+m(1/p-1/q)}\omega(\rho/n)$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть* $1<p<\infty, m\ge1, k\in N, r\in Z_+, \omega\in\Omega_k(0,\rho]$. *Для существования индивидуальной функции* $F_0\in W^rH_{p,m}^k[\omega]$, *доставляющей оценку снизу в (3) в случае* $p=q$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\omega\in S_k$ *при* $r=0$ *и* $\omega\in S\cap S_k$ *при* $r>0$, *где* S_k *и* S *- классы функций* $\omega\in\Omega_k(0,\rho]$, *удовлетворяющих соответственно* (S_k) *и* (S) *условиям Стечкина* (см., напр., [9; §2])*: существуют числа* $\gamma_1,\gamma_2\in(0,k)$ *такие, что* $\delta^{-(k-\gamma_1)}\omega(\delta)\downarrow$ $(\delta\uparrow)$ *и* $\delta^{-\gamma_2}\omega(\delta)\uparrow(\delta\uparrow)$.

Доказательство. Достаточность. Если $\omega\in S_k$ при $r=0$ и $\omega\in S\cap S_k$ при $r>0$, то в качестве требуемой подходит (с точностью до постоянного множителя) всякая функция $F_0\in L_p(T^m)$, для которой

$E_{n-1,\dots,n-1}(F_0)_{p,m} = n^{-r}\omega(\rho/n)$ (существование таких функций обеспечивается известной теоремой С.Н. Бернштейна, см., напр., [1;с.51]). Покажем, что $F_0 \in W^r H^k_{p,m}[\omega]$. При $r=0$ в силу правого неравенства в *(9)* [10; с.21] (см. также [11; с.53], неравенство *(1)* из предложения 1) имеем ($\theta = \min\{2, p\}$)

$$\omega_k(F_0;\rho/n)_{p,m} \le C_{12}(k;p,m)n^{-k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta k-1}E^{\theta}_{\nu-1,\dots,\nu-1}(F_0)_{p,m}\right)^{1/\theta} = C_{12}(k;p,m)n^{-k}\times$$

$$\times\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta k-1}\omega^{\theta}\left(\frac{\rho}{\nu}\right)\right)^{1/\theta} \le C_{12}(k;p,m)n^{-k}n^{k-\gamma_1}\omega\left(\frac{\rho}{n}\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta\gamma_1-1}\right)^{1/\theta} \le$$

$$\le C_{12}(p;k,m)C_{13}(\gamma_1,\theta)\omega(\rho/n),$$

откуда $\omega_k(F_0;\rho/n)_{p,m} \le C_{14}(k;p,m,\gamma_1)\omega(\rho/n)$;

при $r>0$ в силу условия $\omega \in S$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{\theta r-1}E^{\theta}_{n-1,\dots,n-1}(F_0)_{p,m}\right)^{1/\theta} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\omega^{\theta}\left(\frac{\rho}{n}\right)\right)^{1/\theta} \le$$

$$\le \omega(\rho)\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\theta\gamma_2-1}\right)^{1/\theta} \le C_{15}(\gamma_2,\theta)\omega(\rho) < \infty,$$

следовательно, в силу неравенства 4) из предложения 1 [11; с. 53] (при $m=1$ см. [12; теорема 2]) получаем $F_0 \in W^r_p(T^m)$ и

$$\max_{|\alpha|=r}\omega_k(D^{\alpha}F_0;\rho/n)_{p,m} \le C_{16}(p,r,k,m)\left\{\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\theta r-1}E^{\theta}_{\nu-1,\dots,\nu-1}(F_0)_{p,m}\right)^{1/\theta} +\right.$$

$$\left.+n^{-k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta(k+r)-1}E^{\theta}_{\nu-1,\dots,\nu-1}(F_0)_{p,m}\right)^{1/\theta}\right\} = C_{16}(p,r,k,m)\left\{\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{-1}\omega^{\theta}\left(\frac{\rho}{\nu}\right)\right)^{1/\theta} +\right.$$

$$\left.+n^{-k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta k-1}\omega^{\theta}\left(\frac{\rho}{\nu}\right)\right)^{1/\theta}\right\} \le C_{16}(p,r,k,m)\left\{n^{\gamma_2}\omega(\rho/n)\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{-\theta\gamma_2-1}\right)^{1/\theta} +\right.$$

$$\left.+n^{-\gamma_1}\omega(\rho/n)\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta\gamma_1-1}\right)^{1/\theta}\right\} \le C_{16}(p,r,k,m)\{C_{17}(\gamma_2,\theta)+C_{13}(\gamma_1,\theta)\}\omega(\rho/n),$$

откуда $\max\limits_{|\alpha|=r}\omega_k(D^{\alpha}F_0;\rho/n)_{p,m} \le C_{18}(p,r,k,m,\gamma_1,\gamma_2)\omega(\rho/n)$.

Осталось заметить, что если для некоторой функции $f \in L_p(T^m)$ $\omega_k(f;\rho/n)_{p,m} \le C_{19}\omega(\rho/n)$, $n=1,2,\dots$, то $\omega_k(f;\delta)_{p,m} \le 2^k C_{19}\omega(\delta)$, $\delta \in (0,\rho]$; следовательно, $[2^k C_{19}]^{-1}F_0 \in W^r H^k_{p,m}[\omega]$, где $C_{19} = C_{14}(p,k,m,\gamma_1)$ при $r=0$ и $C_{19} = C_{18}(p,r,k,m,\gamma_1,\gamma_2)$ при $r>0$.

Необходимость. Допустим, что существует индивидуальная функция $F_0 \in W^r H^k_{p,m}[\omega]$, для которой имеет место оценка снизу в *(3)* при $p=q$:

$E_{n-1,\dots,n-1}(F_0)_{p,m} \ge C_{20}(p,r,k,m)n^{-r}\omega(\rho/n)$. При $r=0$ в силу левого неравенства в *(9)* [10; с.21] имеем ($\beta=\max\{2,p\}$)

$$n^{-k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\beta k-1}\omega^{\beta}\left(\frac{\rho}{\nu}\right)\right)^{1/\beta} \le C_{21}(p,k,m)n^{-k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\beta k-1}E^{\beta}_{\nu-1,\dots,\nu-1}(F_0)_{p,m}\right)^{1/\beta} \le$$
$$\le C_{22}(p,k,m)\omega_k(F_0;\rho/n)_{p,m} \le C_{23}(p,k,m)\omega(\rho/n),$$

откуда $n^{-k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\beta k-1}\omega^{\beta}\left(\frac{\rho}{\nu}\right)\right)^{1/\beta} \le C_{23}(p,k,m)\omega(\rho/n)$, $n=1,2,\dots$, что равносильно условию $\omega\in S_k$ (см. [9; §2]).

При $r>0$ воспользуемся следующим утверждением (при $m=1$ первая часть следует из соответствующих результатов [12]): если $f\in W_p^r(T^m)$, $1<p<\infty$, то $(\beta=\max\{2,p\})$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta r-1}E^{\beta}_{n-1,\dots n-1}(f)_{p,m}\right)^{1/\beta}<\infty$ и справедлива оценка

$$\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\beta r-1}E^{\beta}_{\nu-1,\dots\nu-1}(f)_{p,m}\right)^{1/\beta} + n^{-k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\beta(k+r)-1}E^{\beta}_{\nu-1,\dots\nu-1}(f)_{p,m}\right)^{1/\beta} \le$$
$$\le C_{24}(p,r,k,m,)\max_{|\alpha|=r}\omega_k(D^{\alpha}f;\rho/n)_{p,m}.$$

Применяя эту оценку для функции $F_0\in W^rH^k_{p,m}[\omega]$, получаем

$$\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{-1}\omega^{\beta}\left(\frac{\rho}{\nu}\right)\right)^{1/\beta} + n^{-k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\beta k-1}\omega^{\beta}\left(\frac{\rho}{\nu}\right)\right)^{1/\beta} \le$$
$$\le C_{25}(p,r,k,m)\left\{\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\beta r-1}E^{\beta}_{\nu-1,\dots,\nu-1}(F_0)_{p,m}\right)^{1/\beta} + \right.$$
$$\left. + n^{-k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\beta(k+r)-1}E^{\beta}_{\nu-1,\dots,\nu-1}(F_0)_{p,m}\right)^{1/\beta}\right\} \le$$
$$\le C_{26}(p,r,k,m)\max_{|\alpha|=r}\omega_k(D^{\alpha}F_0;\rho/n)_{p,m} \le C_{27}(p,r,k,m)\omega(\rho/n),$$

откуда

$$\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{-1}\omega^{\beta}\left(\frac{\rho}{\nu}\right)\right)^{1/\beta} = O(\omega(\rho/n)), \quad n^{-k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\beta k-1}\omega^{\beta}\left(\frac{\rho}{\nu}\right)\right)^{1/\beta} = O(\omega(\rho/n)),$$

что равносильно условию $\omega\in S\cap S_k$ (см. [9; §2]).

Литература

[1]. Тиман А.Ф. *Теория приближения функций действительного переменного.* М., Физматгиз, 1960.

[2]. Стечкин С.Б. *О порядке наилучших приближений непрерывных функций.* Изв. АН СССР, Сер. Матем., т. 15, №3, 1951, с. 219-242.

[3]. Соболев С.Л. *Об одной теореме функционального анализа.* Матем. сборник, т. 4, №3, 1938, с. 471- 497.
[4]. Ильясов Н.А. *Теоремы вложения для структурных и конструктивных характеристик функций.* Канд. дисс., Баку, 1987, 150 с.
[5]. Perz F., Szulc T. *On an imbedding theorem.* Труды международной конференции по конструктивной теории функций. София, 1980, с. 455- 460.
[6]. Тиман М.Ф. *О разностных свойствах функций многих переменных.* Изв. АН СССР, Сер. матем., т.33, №3, 1969, с. 667- 676.
[7]. Жук В.В. *Аппроксимация периодических функций.* Л., изд- во ЛГУ, 1982.
[8]. Ильясов Н.А. *К неравенствам между наилучшими приближениями и модулями гладкости разных порядков периодических функций в* $L_p, 1 \le p \le \infty$. Сб. "Сингулярные интегральные операторы", Баку, 1991, с. 40-52.
[9]. Бари Н.К., Стечкин С.Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций.* Труды Моск. Матем. о-ва, т.5, 1956, с. 483-522.
[10]. Тиман М.Ф. *Особенности основных теорем конструктивной теории функций в пространствах* L_p -. В кн. "Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций.", Баку, 1965, с. 18-25.
[11]. Ильясов Н.А. *О порядках* L_p *-модулей гладкости функций на* m *- мерном торе.* Сб. "Сингулярные интегральные операторы", Баку, 1989, с. 43-58.
[12]. Бесов О.В. *О некоторых условиях принадлежности к* L_p *производных периодических функций.* Научн. Докл. Высш. Школы.Физ.-мат.н., №1, 1959, с. 13-17.

İlyasov N.A. **$L_p(T^m)$, $1 < p < \infty$, FƏZALARINDA CEKSON-STEÇKİN BƏRABƏRSİZLİYİ HAQQINDA**

Məqalədə funksiyanın və ya onun qarışıq törəmələrinin majorantı verilmiş hamarlıq moduluolan sinifdə Cekson-Steçkin bərabərsizliyinin müxtəlif metrikalarda çoxölçülü L_p analoqunun tərtib mə'nada dəqiqliyinin isbatı verilmişdir. Uygun bərabərsizlində aşagıdan qiymətləndirilməni verən fərdi funksiyanın varlıgının zəruri və kafi şərtləri tanılmışdır.

Il'yasov N.A. **ON THE JACKSON- STECHKIN INEQUALITY IN SPACES $L_p(T^m)$, $1 < p < \infty$**

In this paper we proof the sharpness in sense of order of multiple- dimensional L_p- analogue of Jackson- Stechkin inequality in different metrics for a class of functions with prescribe majorant of their or their mixed derivatives moduli of smoothness. We obtained (necessary and sufficient) conditions of existence of individual functions delivering the lower bound in corresponding inequlity.