УДК 517.5

ИСМАИЛОВ В.Э.

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ СВОЙСТВЕ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА КЛАССОВ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Разработка способов вычисления и оценок значения наилучшего приближения функций многих переменных суммами функций меньшего числа переменных помимо теоритического, имеет также весьма важное значение с точки зрения приложений. В этой связи следует отметить работы М- Б.А. Бабаева [1-3], в которых были получены способы вычисления наилучшего приближения функций многих переменных из специально построенного им класса M (см. [3], в работах [1- 2] этот класс обозначен через $\Pi_{k,q}$) различными суммами функций меньшего числа переменных. В работе [3] было также установлено характеристическое свойство класса M на языке наилучшего приближения (см. ниже).

В настоящей статье на базе основного класса M строится непересекающиеся классы функций двух переменных, зависящие от некоторого численного параметра и предлагается простая формула вычисления наилучшего приближения функций из этих классов суммами функций одной переменной . Аналогично результатам М- Б.А. Бабаева, устанавливаются характеристические свойства построенных классов в терминах формул для вычисления наилучшего приближения.

§1. Краткий обзор известных результатов

Пусть

$$\Pi = [a_1, b_1; a_2, b_2] \stackrel{def}{=} \{(x,y) : a_1 \le x \le b_1, a_2 \le y \le b_2$$

_ прямоугольник на плоскости $x0y$. Рассмотрим приближение непрерывной функции $f = f(x,y) \in C(\Pi), \|f\|_{C(\Pi)} = \max_{P\in\Pi} |f(P)|$, суммами вида $\varphi(x) + \psi(y)$, где $\varphi(x) \in C[a_1, b_1], \psi(y) \in C[a_2, b_2]$.

Определим наилучшее приближение через

$$E(f) = E[f, \varphi + \psi, \Pi] \stackrel{def}{=} \inf_{\varphi+\psi} \|f - \varphi - \psi\|_{C(\Pi)}.$$

Обозначим через $M(\Pi)$ (см. [3]) класс непрерывных функций, для которых справедливо неравенство

$$f(x', y') + f(x'', y'') - f(x', y'') - f(x'', y') \ge 0,$$

при произвольных $a_1 \le x' \le x'' \le b_1, a_2 \le y' \le y'' \le b_2$.

В статье [1] приведена

Теорема * **[1].** *Для каждой функции* $f \in M(\Pi)$

$$E[f, \varphi + \psi, \Pi] = \frac{1}{4}[f(a_1, a_2) + f(b_1, b_2) - f(a_1, b_2) - f(b_1, a_2)].$$

Эта теорема позволяет вычислить значение наилучшего приближения функции f из класса $M(\Pi)$ исходя из значений приближаемой функции всего лишь в четырех угловых точках прямоугольника Π. В статье [3] было показано, что вычисление наилучшего приближения непрерывной функции $f \in C(\Pi)$ для произвольного прямоугольника $Q[x_1, x_2; y_1, y_2] \subset \Pi$ формулой

$$E[f, \varphi + \psi, Q] = \frac{1}{4}[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2) - f(x_2, y_1)]$$

является не только необходимым, но и достаточным условием того, чтобы функция f принадлежала классу $M(\Pi)$. Иными словами было установлено характеристическое свойство класса $M(\Pi)$ на языке наилучшего приближения.

§2. Основные определения и факты

Рассмотрим сечение прямоугольника Π относительно оси x прямой

$$x = c, \quad a_1 < c \le b_1. \tag{1}$$

Обозначим $\Pi_1 = [a_1, c; a_2, b_2], \Pi_2 = [c, b_1; a_2, b_2]$.

В основе построения классов и дальнейших результатов лежит следующая

Лемма1. *Для произвольного сечения (1) прямоугольника* Π *существует такая функция* $f \in M(\Pi)$, *что*

$$f(c, y'') - f(c, y') \ge \frac{1}{2}[f(a_1, y'') - f(a_1, y') + f(b_1, y'') - f(b_1, y')], \tag{2}$$

для всех $a_2 \le y' \le y'' \le b_2$.

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$f_0(x, y) = \varphi_0(x)\psi_0(y) = \left(\frac{x - a_1}{b_1 - a_1}\right)^{\frac{1}{n}} \psi_0(y),$$

где n некоторое натуральное число, $n \ge \log_2 \frac{b_1 - a_1}{c - a_1}$, а $\psi_0(y)$ возрастающая функция. Так как функция $\varphi_0(x)$ также возрастает, то нетрудно проверить, что рассматриваемая функция f_0 входит в класс $M(\Pi)$. Теперь покажем, что функция f_0 удовлетворяет функциональному неравенству *(2)*. Учитывая выражение $f_0(x, y)$ в *(2)* получим

$$\varphi_0(c)[\psi_0(y'')-\psi_0(y')]\geq\frac{1}{2}(\varphi_0(a_1)+\varphi_0(b_1))[\psi_0(y'')-\psi_0(y')]$$

Поскольку $\psi_0(y'')-\psi_0(y')\geq 0$, при любых $a_2\leq y'\leq y''\leq b_2$, то достаточно показать, что

$$\varphi_0(c)\geq\frac{1}{2}(\varphi_0(a_1)+\varphi_0(b_1))$$

или же учитывая выражение $\varphi_0(x)$

$$\left(\frac{c-a_1}{b_1-a_1}\right)^{\frac{1}{n}}\geq\frac{1}{2}.$$

Последнее неравенство с учетом выбора числа n проверяется непосредственно.

Определим следующий класс, который является переходным для построения основного класса.

Определение 1. *Будем говорить, что функция* $f(x,y)\in M(\Pi)$ *принадлежит классу* $M_C(\Pi), C\in(a_1,b_1]$, *если для этой функции удовлетворяется неравенство (2).*

Факт1. *1) Для произвольного сечения* $x=c, c\in(a_1,b_1]$ *класс* $M_C(\Pi)$ *не пуст.*

2) Для произвольных сечений $x=c'$ *и* $x=c''$, $a_1\leq c'\leq c''\leq b_1$ *имеет место вложение* $M_{C'}(\Pi)\subset M_{C''}(\Pi)$, *в частности* $M_{b_1}(\Pi)\subset M(\Pi)$.

Доказательство. Утверждение *1)* следует из вышеуказанной леммы 1. Докажем утвеждение *2)* факта 1.

Пусть $f\in M_{C''}(\Pi)$ и $c''\geq c'$. Из определения 1, $f\in M(\Pi)$. Тогда

$$f(c'',y'')-f(c'',y')\geq f(c',y'')-f(c',y'),\ \text{при люых}\ a_2\leq y'\leq y''\leq b_2$$

откуда с учетом неравенства *(2)*

$$f(c'',y'')-f(c'',y')\geq\frac{1}{2}[f(a_1,y'')-f(a_1,y')+f(b_1,y'')-f(b_1,y')],$$

т.е. $f\in M_{C''}(\Pi)$. Для доказательства совпадения классов $M_{b_1}(\Pi)$ и $M(\Pi)$ в неравенстве *(2)* поставим b_1 вместо c.

Тогда имеем

$$f(b_1,y'')-f(b_1,y')\geq f(a_1,y'')-f(a_1,y'),\ \text{при любых}\ a_2\leq y'\leq y''\leq b_2.$$

Поскольку последнему неравенству удовлетворяет любая фунуция из $M(\Pi)$, факт 1 доказан.

Определение 2. *Будем говорить, что непрерывная функция* $F(x,y)$ *принадлежит классу* $\Phi_C(\Pi)$, $C\in(a_1,b_1]$, *если функция*

$$f_1(x,y)\overset{def}{=}\begin{cases}F_1(x,y),(x,y)\in\Pi_1\\ -F_1(x,y),(x,y)\in\Pi_2\end{cases},\ \text{где}\ F_1(x,y)\overset{def}{=}F(x,y)-F(c,y) \qquad (3)$$

принадлежит классу $M_C(\Pi)$.

Факт 2.

1) Для произвольного сечения $x = c, c \in (a_1, b_1]$ *класс* $\Phi_C(\Pi)$ *не пуст.*

2) Если $F \in \Phi_C(\Pi)$, *то* $F \in M(\Pi_1)$ *и* $-F \in M(\Pi_2)$.

3) При произвольных $a_1 \le c' \le c'' \le b_1$ *классы* $\Phi_{C'}(\Pi)$ *и* $\Phi_{C''}(\Pi)$ *не имеют общих элементов.*

4) $\Phi_{b_1}(\Pi) = M(\Pi)$.

Для доказательства факта 2 преведем одно эквивалентное определение класса $\Phi_C(\Pi)$:

Определение 2*. *Будем говорить, что непрерывная функция* $F(x,y)$ *принадлежит классу* $\Phi_{C'}(\Pi)$, $c \in (a_1, b_1]$, *если разность* $F_1(x,y) = F\,(x,y) - F\,(c,y)$ *представима в виде*

$$F_1(x,y) = \begin{cases} f(x,y) - f(c,y), (x,y) \in \Pi_1 \\ f(c,y) - f(x,y), (x,y) \in \Pi_2, \end{cases} \quad \text{где} \quad f \in M_C(\Pi). \tag{4}$$

Равносильность определений 2 и 2* очевидна если положить $f_1(x,y) = f(x,y) - f(c,y)$.

Доказательство факта 2. Утверждение 1) следует из определения 2* и из утверждения 1) факта1. Утверждение 2) следует из определения 1 и 2.

Докажем утверждение 3). Предположим противное. Пусть существует функция $F(x,y)$, такая что $F \in \Phi_{C'}(\Pi)$, $F \in \Phi_{C''}(\Pi)$ и $c' < c''$. Тогда из утверждения 2) факта 2 получаем

$$F \in M([a_1, c'; a_2, b_2]), -F \in M([c', b_1; a_2, b_2])$$

и

$$F \in M([a_1, c''; a_2, b_2]), -F \in M([c'', b_1; a_2, b_2]),$$

откуда следует, что одновремено

$$F \in M([c', c''; a_2, b_2]) \quad \text{и} \quad -F \in M([c', c''; a_2, b_2])$$

Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения 3) факта 2. Утверждение 4) почти очевидно:

Согласно определению 2* класс $\Phi_{b_1}(\Pi)$ состоит из функций F, для которых разность $F_1(x,y) = F(x,y) - F(b_1,y)$ представляется в виде $F_1(x,y) = f(x,y) - f,(b_1,y)$ где $f \in M_{b_1}(\Pi)$. С другой стороны в силу утверждения 2) факта 1 $M_{b_1}(\Pi) = M(\Pi)$. Но тогда $F_1 \in M(\Pi), F \in M(\Pi)$ и $\Phi_{b_1}(\Pi) \subset M(\Pi)$. Обратное включение получается автоматически, так как $F_1(x,y) = F(x,y) - F\,(b_1,y)$.

Факт 2 доказан полностью.

§3 Основные результаты.

Теорема 1. *Для каждой функции* $F(x,y)$ *из класса* $\Phi_C(\Pi)$, $c \in (a_1, b_1]$

$$E[F,\varphi+\psi,\Pi]=\frac{1}{4}\left[F(a_1,a_2)+F(c,b_2)-F(a_1,b_2)-F(c,a_2)\right]$$

Замечание 1. При $c=b_1$ теорема 1 и теорема * из [1] равносильны. Для доказательства теоремы 1 нам понадобится

Лемма 2. *Пусть* $F\in\Phi_C(\Pi)$, $c\in(a_1,b_1]$ *и* $Q[a_1,b_1;y_1,y_2]\subset\Pi$. *Тогда функция*

$$h_Q(x)\overset{def}{=}F(a_1,y_1)+F(x,y_2)-F(a_1,y_2)-F(x,y_1)$$

имеет следующие свойства:

а) $h_Q(x)\geq 0, x\in[a_1,b_1]$ *(5)*

б) $\max\limits_{[a_1,b_1]}h_Q(x)=h_Q(c)$ *и* $\min\limits_{[a_1,b_1]}h_Q(x)=h_Q(a_1)=0$.

Доказательство леммы 2. Пусть $Q[a_1,b_1;y_1,y_2]\subset\Pi$ произвольный прямоугольник. Так как в силу утверждения 2) факта 2 функция $F_1\in M(\Pi_1)$, то при $x\in[a_1,c]$ неравенство *(5)* очевидно.

Пусть $x\in[c,b_1]$. Учитывая вид *(4)* функции $F_1(x,y)$ в определении 2* можем написать

$$\left.\begin{aligned}F_1(a_1,y_1)=f(a_1,y_1)-f(c,y_1), F_1(a_1,y_2)=f(a_1,y_2)-f(c,y_2),\\ F_1(x,y_1)=f(c,y_1)-f(x,y_1), F_1(x,y_2)=f(c,y_2)-f(x,y_2)\end{aligned}\right\}, \qquad (6)$$

где $f(x,y)\in M_C(\Pi)$.

Учитывая равенства *(6)* в определениифункции $h_Q(x)$ имем

$$h_Q(x)=2[f(c,y_2)-f(c,y_1)]+[f(a_1,y_1)-f(a_1,y_2)+f(x,y_1)-f(x,y_2)] \qquad (7)$$

Так как $M_C(\Pi)\subset M(\Pi)$ (см. определение 1), то

$$f(x,y_1)-f(x,y_2)\geq f(b_1,y_1)-f(b_1,y_2).$$

Учитывая последнее неравенство *(7)* имеем.

$$h_Q(x)\geq 2[f(c,y_2)-f(c,y_1)]+[f(a_1,y_1)-f(a_1,y_2)+f(b_1,y_1)-f(b_1,y_2)]$$

Так как $f(x,y)\in M_C(\Pi)$, то неравенство *(2)* позволяет написать $h_Q(x)\geq 0$, при $x\in[c,b_1]$. Итак $h_Q(x)\geq 0$, при всех $x\in[a_1,b_1]$. Отсюда сразу следует, что $\min\limits_{[a_1,b_1]}h_Q(x)=h_Q(a_1)=0$.

Докажем, что максимум достигается в точке $x=c$. Пусть сначала $a_1\leq x_1\leq x_2\leq c$. Тогда

$$h_Q(x_2)-h_Q(x_1)=F(x_2,y_2)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1).$$

Так как в силу утверждения 2) факта 2 $F(x,y)\in M(\Pi_1)$, то $h_Q(x_2)-h_Q(x_1)\geq 0$, иными словами функция $h_Q(x)$ возрастает на отрезке $[a_1,c]$. Пусть теперь $c\leq x_1\leq x_2\leq b_1$. Тогда в силу того же утверждения $(-F(x,y)\in M(\Pi_2))$ $h_Q(x_2)-h_Q(x_1)\leq 0$, другими словами функция $h_Q(x)$ убывает на отрезке $[c,b_1]$. Это означает, что $\max\limits_{[a_1,b_1]}h_Q(x)=h_Q(c)$. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Обозначим

$$L(F)=\frac{1}{4}\left[F(a_1,a_2)+F(c,b_2)-F(a_1,b_2)-F(c,a_2)\right].$$

Легко убедиться, что линейный функционал $L(F)$ является аннулятором функций вида $\varphi(x)+\psi(y)$, т.е. $L(\varphi+\psi)=0$. Поэтому $L(F)=L(F-\varphi-\psi)$. Тогда $L(F)\le\|F-\varphi-\psi\|_{C[\Pi]}$. Так как сумма $\varphi+\psi$ произвольная, то $L(F)\le E[F,\varphi+\psi,\Pi]$. Для завершения доказательства теоремы достаточно найти функцию $\varphi_0(x)+\psi_0(y)$, для которой

$$\|F-\varphi_0-\psi_0\|_{C[\Pi]}=L(F). \tag{8}$$

Введём в рассмотрение функцию

$$g(x,y)=F(x,y)-F(x,a_2)-F(a_1,y)+F(a_1,a_2). \tag{9}$$

Функция g имеет следующие очевидные свойства:

1) $g(x,a_2)=g(a_1,y)=0$.

2) $L(F)=L(g)=\frac{1}{4}g(c,b_2)$, $\quad E(F)=E(g)$.

Кроме того из утверждения 2) факта 2 следует

3) функция одной переменной $g(c,y)$ возрастает.

На самом деле при любом выборе $a_2\le y'\le y''\le b_2$

$$g(c,y'')-g(c,y')=F(c,y'')+F(a_1,y')-F(c,y')-F(a_1,y'')\ge 0.$$

Последнее свойство функции g позволяет нам написать

$$0=g(c,a_2)\le\frac{1}{2}g(c,b_2)\le g(c,b_2).$$

Отсюда и в силу непрерывности $g(x,y)$ следует, что существует решение $y=\bar{y}$ уравнения

$$g(c,y)=\frac{1}{2}g(c,b_2).$$

Обозначим

$$\varphi_1(x)=g(x,\bar{y}),$$

$$\psi_1(y)=\frac{1}{2}\left[g(c,y)-g(c,\bar{y})\right],$$

$$G(x,y)=g(x,y)-\varphi_1(x)-\psi_1(y).$$

Вычислим норму функции $G(x,y)$ на прямоугольнике Π.

Разобъём прямоугольник Π на два прямоугольника

$$\Pi'=[a_1,b_1;\bar{y},b_2],\quad \Pi''=[a_1,b_1;a_2,\bar{y}]$$

Очевидно,

$$\|G\|_{C(\Pi)}=\max\{\|G\|_{C(\Pi')},\|G\|_{C(\Pi'')}\}$$

Сначала вычислимс норму $\|G\|_{C(\Pi')}$:

$$\|G\|_{C(\Pi')} = \max_{(x,y)\in\Pi'}|G(x,y)| = \max_{y\in[\bar{y},b_2]}\max_{x\in[a_1,b_1]}|G(x,y)| \qquad (10)$$

Пусть y произвольное число из отрезка $[\bar{y},b_2]$.

$$\max_{x\in[a_1,b_1]} G(x,y) = \max_{x\in[a_1,b_1]}\left[g(x,y)-g(x,\bar{y})\right]-\psi_1(y) \qquad (11)$$

$$\min_{x\in[a_1,b_1]} G(x,y) = \min_{x\in[a_1,b_1]}\left[g(x,y)-g(x,\bar{y})\right]-\psi_1(y) \qquad (12)$$

Функция

$$h_{\bar{Q}}(x) = g(x,y)-g(x,\bar{y}) = F(a_1,\bar{y})+F(x,y)-F(a_1,y)-F(x,\bar{y}),$$

где $\bar{Q}=[a_1,b_1;\bar{y},y]$, в силу леммы 2 достигает своего максимума в точке $x=c$, а миниумум в точке $x=a_1$:

$$\max_{x\in[a_1,b_1]} h_{\bar{Q}}(x) = \max_{x\in[a_1,b_1]}\left[g(x,y)-g(x,\bar{y})\right] = g(c,y)-g(c,\bar{y}),$$

$$\min_{x\in[a_1,b_1]} h_{\bar{Q}}(x) = \min_{x\in[a_1,b_1]}\left[g(x,y)-g(x,\bar{y})\right] = 0.$$

Учитывая эти равенства в *(11)* и *(12)* получим

$$\max_{x\in[a_1,b_1]} G(x,y) = g(c,y)-g(c,\bar{y})-\psi_1(y) = \frac{1}{2}\left[g(c,y)-g(c,\bar{y})\right]$$

$$\min_{x\in[a_1,b_1]} G(x,y) = -\psi_1(y) = -\frac{1}{2}\left[g(c,y)-g(c,\bar{y})\right].$$

Поэтому для произвольного $y\in[\bar{y},b_2]$

$$\max_{x\in[a_1,b_1]}|G(x,y)| = \frac{1}{2}\left[g(c,y)-g(c,\bar{y})\right]$$

Теперь можно продолжить цепочку равенств в *(10)*

$$\|G\|_{C(\Pi')} = \max_{y\in[\bar{y},b_2]}\frac{1}{2}\left[g(c,y)-g(c,\bar{y})\right] = \frac{1}{2}\left[g(c,b_2)-g(c,\bar{y})\right] = \frac{1}{4}g(c,b_2).$$

Последние равенства получим из свойства 3) функции g и из того, что $g(c,\bar{y}) = \frac{1}{2}g(c,b_2)$.

Аналогично можно убедиться, что

$$\|G\|_{C(\Pi'')} = \frac{1}{4}g(c,b_2).$$

Тогда

$$\|G\|_{C(\Pi)} = \frac{1}{4}g(c,b_2) = L(F).$$

Но,

$$G(x,y) = g(x,y)-\varphi_1(x)-\psi_1(y) = F(x,y)-\varphi_0(x)-\psi_0(y),$$

где $\varphi_0(x) = F(x,a_2)+\varphi_1(x)-F(a_1,a_2)$, $\psi_0(y) = F(a_1,y)+\psi_1(y)$.

Итак,

$$\|F-\varphi_0-\psi_0\|_{C(11)}=L(F).$$

Мы доказали равенство *(8)*, тем самым и теорему 1. Доказательство замечания 1 лекго получается из утверждения 4) факта 2.

Приведём характеристическое свойство класса $\Phi_C(\Pi)$.

Теорема 2. *Для того чтобы непрерывная функция* $F(x,y)$ *принадлежала классу* $\Phi_C(\Pi)$, $c\in(a_1,b_1]$, *необходимо и достаточно, чтобы*

1) $\forall Q_1=[x_1,x_2;y_1,y_2]\subset\Pi_1$

$$E[F,\varphi+\psi,Q_1]=\frac{1}{4}[F(x_1,y_1)+F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)],$$

2) $\forall Q_2=[x_1,x_2;y_1,y_2]\subset\Pi_2$

$$E[F,\varphi+\psi,Q_2]=-\frac{1}{4}[F(x_1,y_1)+F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)],$$

3) $\forall Q=[a_1,b_1;y_1,y_2]\subset\Pi$

$$E[F,\varphi+\psi,Q\;]=\frac{1}{4}[F(a_1,y_1)+F(c,y_2)-F(a_1,y_2)-F(c,y_1)]$$

Из-за ограничений на объём статьи приводить доказательство теоремы 2 не представляется возможным.

Замечание 2. Все результаты этой статьи справедливы и при аналогичном сечении прямоугольника Π относительно оси y.

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую благодарность проф. М.-Б.А Бабаеву за постоянное внимание к работе.

Литература

[1]. Бабаев М.-Б.А. *О приближении многочленов двух переменных суммами функций одной переменной.* Доклад АН СССР, 1970, 193, № 5, с. 967- 969.

[2]. Бабаев М.-Б.А. *О точных оценках приближения функций многих переменных суммами функций меньшего числа переменных.* Матем. заметки, 1972, т.12, № 1, с. 105-114.

[3]. Бабаев М.-Б.А. *Экстремальные свойства и двусторонние оценки в приближении суммами функций меньшего числа переменных..* Матем.заметки, 1984, т. 36, № 5, с. 647-659.

İsmailov V.E.

ƏN YAXŞI YAXINLAŞMANIN VİR SİNİFLƏR AİLƏSİN XARAKTERİSTİK XÜSÜSİYYƏT HAQQINDA

Məqalədə hər hansı ədədi parametrdən asılı ikidəyişli funksiyalardan ibarət siniflər qurulur və bu siniflərdən olan funksiyalara birdəyişənli funksiyaların çəmi ilə ən yaxşı yaxınlaşmanın qiymətinin hesablanması üçün sadə düstur təklif olunur. Həmçinin qurulan siniflərin xarakteristik xüsüsiyyətləri ən yaxşı yaxınlaşma dilində müəyyən edilir.

Ismailov V.E.

ON THE CHARACTERISTIC PROPERTY OF CLASSES FAMILY OF THE BEST APPROXIMATION

In this paper the classes of functions of two variables depending on some numerical parameter are constructed and the simple calculation formula for the best approximation of functions from these classes by the sum of functions of one variable is suggested. The characteristic properties of constructed classes are also established in terms of the best approximation.