1997 ТОМ VI (XIV)

УДК 517.983

ИСМАЙЛОВ З.И.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Назовем ядром оператора T действующего в гильбертовом пространстве H множество $N(T)=\{f\in D(T),\ Tf=0\}$, а множество $R(T)=\{Tf,\ f\in D(T)\}$ областью значений. Множество $R(T)^{\perp}$ ($\perp$-ортогональное дополнение) называется коядром оператора T в H. Если $N(T)$ или $R(T)^{\perp}$ конечномерно, то индексом оператора T назовем величину $\lambda(T)=\dim N(T)-\dim R(T)^{\perp}$. Оператор T называется нормально разрешимым, если $R(T)$ замкнута в H, регулярно разрешимым, если он нормально разрешим и $\lambda(T)=0$. Если $R(T)=H$, $N(T)=0$, то оператор T называется разрешимым, а если $N(T)=0$, $R(T)=H$ и обратный оператор к оператору T ограничен в H, то он называется корректно разрешимым в H. Общее положение об этих и многих других ситуаций четко изложены в работах [1], [2].

1. В дальнейшем мы будем исследовать регулярную разрешимость в гильбертовом пространстве $L_2(H,(0,1))$ вектор-функций на конечном отрезке следующей краевой задачи:

$$Lu=u'(t)+Au(t),\ 0\le t\le 1, \tag{1.1}$$

с граничным условием

$$u(1)=Tu(0), \tag{1.2}$$

где A - линейный самосопряженный неотрицательный, а T - линейный замкнутый оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H.

Исследование регулярной разрешимости указанной задачи ведется именно в терминах операторных коэффициентов A и T.

Класс всевозможных корректно разрешимых граничных задач для указанного дифференциального выражения *(1.1)* исследованы в работах [3] и [4].

Теория разрешимости краевых задач на конечном отрезке для обыкновенных дифференциальных операторов с непрерывными коэффициентами в пространствах $C[0,1]$ и $L_p[0,1],\ 1\le p\le\infty$, исследована С.Т.Крейном [2].

При регулярности скалярных краевых задач на конечном отрезке регулярная разрешимость в $L_p(H,(0,1)),\ 1<p<\infty$, H -гильбертово пространство, дифференциально- операторных уравнений исследована С.Я.Якубовым [5].

Нормальная разрешимость для более общих дифференциально-операторных уравнений на полуоси в гильбертовом пространстве $L_2(H, R_1^+)$ с другой точки зрения исследована в работах [6] и [7].

2. Через $H_\tau, -\infty < \tau < \infty$, обозначим гильбертову шкалу пространств, построенных по оператору $(A+E)^\tau$, E-единичный оператор H. Оператор $A+E$ можно рассматривать как оператор, изометрически переводящий H_{+1} в H, а сопряженый к нему оператор $\widetilde{A}+\widetilde{E}$, $\widetilde{E}$ - уже единичный оператор в H_{-1}, является его расширением. Если рассматривать оператор $\widetilde{A}+\widetilde{E}$ как оператор в H_{-1} с областью определения $D(\widetilde{A}) = H$, оказывается, что $\widetilde{A}$ самосопряжен, причем $\widetilde{A} \geq 0$ [8]. Обозначим

$$\widetilde{L}u = u'(t) + \widetilde{A}u(t).$$

Структура областей опеределения максимального и минимального операторов, порожденных дифференциальным выражением $\widetilde{L}u$ в $L_2(H,(0,1))$ исследовались в [9].

Через L_T обозначим дифференциальный оператор, который порождается дифференциально-операторным выражением $\widetilde{L}u$ и граничным условием (1.2) в пространстве $L_2(H,(0,1))$.

Сопряженый оператор L_T^* оператору L_T в пространстве $L_2(H,(0,1))$ порождается дифференциальным выражением

$$\widetilde{L}^*\vartheta = -\vartheta'(t) + \widetilde{A}\vartheta(t)$$

и граничным условием

$$\vartheta(0) = T^*\vartheta(1)$$

Заметим, что общие решения уравнений $\widetilde{L}u = f(t)$ и $\widetilde{L}^*\vartheta = g(t)$ в $L_2(H,(0,1))$ представим в виде

$$u(t) = \bar{e}^{\widetilde{A}t} f + \int_0^t \bar{e}^{\widetilde{A}(t-s)} f(s)ds,$$

$$\vartheta(t) = \bar{e}^{\widetilde{A}t} g + \int_t^1 \bar{e}^{\widetilde{A}(s-t)} g(s)ds$$

где $f, g \in H-1/2$, $f(t), g(t) \in L_2(H,(0,1))$.

Верна следующая теорема о ядрах операторов L_T и L_T^*.

Теорема 2.1. *Имеют место*

$$\dim \ker L_T = \dim \ker\left(T - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right)$$

$$\dim co\ker L_T = \dim \ker L_T^* = \dim \ker\left(T^* - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right).$$

Из этой теоремы в частности следует, что если T ограниченный самосопряженный оператор в H, то

$$\dim \ker L = \dim co\ker L \leq \infty.$$

Однако верен более общий факт.

Теорема 2.2. *Если оператор* T *представим в виде*

$$T = T_1 + iT_2,$$

где T_1 *и* T_2*-самосопряженные операторы в* H, *то*

$$\dim \ker L_T = \dim co\ker L_T \leq \infty .$$

Доказательство. По теореме 2.1., будем исследовать ядра операторов $T - \exp\left(-\widetilde{A}\right)$ и $T^* - \exp\left(-\widetilde{A}\right)$.

Пусть $x \in \ker\left(T - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right)$, $y \in \ker\left(T^* - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right)$, т.е

$$\left(T - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right)x = 0,$$
$$\left(T^* - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right)y = 0.$$

Скалярно умножая первое равенство на x, а второе на y в H получим

$$(Tx, x)_H - \left(\exp\left(-\widetilde{A}\right)x, x\right)_H = 0,$$
$$(T^*y, y)_H - \left(\exp\left(-\widetilde{A}\right)y, y\right)_H = 0.$$

Отсюда имеем

$$(T_1x, x)_H - \left(\exp\left(-\widetilde{A}\right)x, x\right)_H + i(T_2x, x)_H = 0,$$
$$(T_1y, y)_H - \left(\exp\left(-\widetilde{A}\right)y, y\right)_H - i(T_2y, y)_H = 0,$$

или же

$$(T_1x, x)_H - \left(\exp\left(-\widetilde{A}\right)x, x\right)_H = 0, \quad (T_2x, x)_H = 0,$$
$$(T_1y, y)_H - \left(\exp\left(-\widetilde{A}\right)y, y\right)_H = 0, \quad (T_2y, y)_H = 0.$$

Итак,

$$\ker\left(T - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right) = \ker\left(T^* - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right) =$$
$$= \left\{x \in H, \left(T_1 - \exp\left(-\widetilde{A}\right)x, x\right)_H = 0, (T_2x, x)_H = 0\right\}.$$

Факт доказан.

Из схемы доказательства предыдущей теоремы следует

Следствие 2.1. *Если* T *представим в виде* $T = T_1 + iT_2$ *и оператор* T_2 *неотрицателен в* H, *то*

$$\ker\left(T - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right) = \ker\left(T^* - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right) \subset \ker T_2^{1/2},$$
$$\ker\left(T - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right) = \ker\left(T^* - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right) =$$
$$= \left\{x \in H,\ (T_1x, x)_H = \left\|\exp\left(-\widetilde{A}/2\right)x\right\|_H^2,\ T_2^{1/2}x = 0\right\}.$$

В частности, если T_2 положительно определен в H, то

$$\ker\left(T - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right) = \ker\left(T^* - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right) = \{0\}$$

Далее можно доказать следующую теорему.

Теорема 2.3. *Если* T *любой замкнутый оператор в* H, *то имеют место*

$$\operatorname{Im}\left(\left(T - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right)x, x\right)_H = \operatorname{Im}(Tx, x)_H,$$

$$\operatorname{Re}\left(\left(T - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right)x / x\right)_H + \left\|\exp\left(-\widetilde{A}/2\right)x\right\|_H^2 = \operatorname{Re}(Tx, x)_H,\ x \in H$$

$$\operatorname{Re}(L_T u, u)_{L_2(H,(0,1))} = \|Tu(0)\|_H^2 - \|u(0)\|_H^2 + 2\left\|\widetilde{A}^{1/2}u\right\|_{L_2(H,(0,1))}^2, \ u(t) \in D(L_T).$$

Легко доказать следующие теоремы.

Теорема 2.4. *Если линейный замкнутый оператор* T *в* H *представим в виде*

$$T = T_1 + iT_2,$$

где T_1 *и* T_2 *- самосопряженые операторы в* H *и*

$$T_1 \le 0, \quad T_2 \ge 0, \ \textit{то}$$

$$\ker\left(T - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right) = \ker\left(T^* - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right) =$$

$$= \ker(-T_1)^{1/2} \cap \ker\left(T_2^{1/2}\right) \cap \ker\left(\exp\left(-\widetilde{A}/2\right)\right) = \{0\},$$

а если $T_1 \ge E, \quad T_2 \ge 0$, то

$$\ker\left(T - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right) = \ker\left(T^* - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right) =$$

$$= \ker(T_1 - E)^{1/2} \cap \ker T_2^{1/2} \cap \ker\left(E - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right)^{1/2}.$$

Теорема 2.5. *Если* T *линейный замкнутый оператор в* H*, то*

$$\ker\left(T - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right) = \ker\left(T^* - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right) =$$

$$= \left\{x \in H, \quad \operatorname{Im}(Tx, x)_H = 0, \quad \operatorname{Re}(Tx, x)_H = \left\|\exp\left(-\widetilde{A}/2\right)x\right\|_H^2\right\}.$$

Более того, если $\operatorname{Re}(Tx, x) \ge 0$, $x \in D(T)$, *то*

$$\ker\left(T - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right) = \ker\left(T^* - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right) = \{0\},$$

а если $\operatorname{Re}((T - E)x, x) \ge 0$, $x \in D(T)$, *то*

$$\ker\left(T - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right) = \ker\left(T^* - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right) =$$

$$= \left\{x \in H, \quad \operatorname{Im}(Tx, x)_H = 0, \quad \operatorname{Re}((T - E)x, x)_H = 0, \quad \exp\left(-\widetilde{A}/2\right)x = x\right\}$$

Теорема 2.6. *Если* T *линейный замкнутый оператор в* H,

$$\operatorname{Re}((T - E)x, x) \ge 0, \ x \in D(T) \ \textit{и} \ \left(\widetilde{A} + \widetilde{E}\right)^{-1} \in \sigma_\infty(H_{-1}), \ \textit{то}$$

$$\dim \ker\left(T - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right) = \dim \ker\left(T^* - \exp\left(-\widetilde{A}\right)\right) < \infty.$$

Теперь рассмотрим дифференциальный оператор L_T в пространстве $L_2(H,(0,1))$:

$$Lu = u' + Au,$$

$$u(1) = \widetilde{T}u(0),$$

где $\widetilde{T}$ -линейный замкнутый оператор в $H_{-1/2}$, $D\left(\widetilde{T}\right) \subset H_{-1/2}$, $R\left(\widetilde{T}\right) \subset H_{-1/2}$.

Граничное условие можно переписать в виде

$$\left(\widetilde{A} + \widetilde{E}\right)^{1/2} u(1) = T\left(\widetilde{A} + \widetilde{E}\right)^{-1/2} u(0),$$

$$T = \left(\widetilde{A} + \widetilde{E}\right)^{1/2} \widetilde{T}\left(\widetilde{A} + \widetilde{E}\right)^{1/2}.$$

Оператор T является линейным замкнутым оператором уже в H. Сопряженный оператор L_T^* к оператору L_T порождается формально сопряженным дифференциальным выражением

$$L^*\vartheta = -\vartheta'\vartheta(t) + \widetilde{A}\vartheta(t)$$

и граничным условием

$$\left(\widetilde{A}+\widetilde{E}\right)^{1/2}\vartheta(0)=T^{*}\left(\widetilde{A}+\widetilde{E}\right)^{-1/2}\vartheta(1).$$

Исследование ядра операторов L_T и L_T^* сводится к изучению операторных уравнений

$$\left(\widetilde{T}-\exp\left(-\widetilde{A}\right)\right)f=0,\quad f\in H_{-1/2}$$

$$\left(\widetilde{T}^{*}-\exp\left(-\widetilde{A}\right)\right)g=0,\quad g\in H_{-1/2}$$

соответственно. Полная картина исследований последних двух уравнений в пространстве H уже имеется.

3. В этом пункте будем исследовать нормальную разрешимость оператора L_T.

Верна следующая

Теорема 3.1. *Если T линейный замкнутый оператор в H, $0\in\rho(T-E)$ и $A\in\sigma_\infty(H)$, то оператор L_T нормально разрешим в $L_2(H,(0,1))$.*

Доказательство. Оператор L_T представим в виде

$$L_T=L_T^0+A,$$

где L_T^0 порождается дифференциальным выражением $L^0u=u'$ и граничным условием $u(1)=Tu(0)$.

В рамках ограничений теоремы можно доказать, что

$$\left(L_T^0\right)^{-1}f(t)=(T-E)^{-1}\int_0^1 f(t)dt+\int_0^t f(\tau)d\tau,$$

$$f(t)\in L_2(H,(0,1)).$$

Уравнение

$$\left(L_T^0+A\right)u=f(t),\ \ u(t)\in D\left(L_T^0\right),\ \ f(t)\in L_2(H,(0,1))$$

можно переписать в виде

$$\left(E+\left(L_T^0\right)^{-1}A\right)u=\left(L_T^0\right)^{-1}f(t)\tag{3.1}$$

Поскольку A - компактный оператор в H, то из следующего представления

$$\left(L_T^0\right)^{-1}Ah(t)=(T-E)^{-1}\int_0^1 Ah(t)dt+\int_0^t Ah(\tau)d\tau$$

вытекает, что

$$\left(L_T^0\right)^{-1}A\in\sigma_\infty\left(L_2(H,(0,1))\right).$$

Если последовательность $f_n(t),\ n=1,2,\ldots$ принадлежит $R(L_T)$ и она сходится к некоторой функции в $L_2(H,(0,1))$, то и последовательность $\left(L_T^0\right)^{-1}f_n(t),\ n=1,2,\ldots$ сходится. Тогда из равенства (3.1) следует, что существует последовательность $u_n(t)\in D(L_T),\ n=1,2,\ldots$, что, во первых

$$\left(E+\left(L_T^0\right)^{-1}A\right)u_n(t)=\left(L_T^0\right)^{-1}f_n(t)$$

и во-вторых $u_n(t), n=1,2,\dots$ сходится к некоторой функции $u(t)$ в $L_2(H,(0,1))$. Итак мы получаем, что

$$L_T u_n(t) = f_n(t) \to f(t) \text{ и } u_n(t) \to u(t), n \to \infty.$$

Поскольку оператор L_T замкнут в $L_2(H,(0,1))$, то $u(t) \in D(L_T)$ и $L_T u(t) = f(t) \in R(L_T)$. Этим нормальная разрешимость оператора L_T доказана.

Замечание. С помощью схемы доказательства предыдущей теоремы, в рамках указанных ограничений можно установить и регулярную разрешимость оператора L_T в $L_2(H,(0,1))$.

В случае неограниченности оператора A верна следующая

Теорема 3.2. *Пусть A линейный неограниченный самосопряженный неотрицательный, а T линейный замкнутый операторы в H.*

Если для некоторого числа $\tau > 0$ оператор

$$\left(\widetilde{A} + \tau\widetilde{E}\right)^{-1}\left(L_T^0 - \tau\widetilde{E}\right) \in \sigma_\infty(L_2(H,(0,1))),$$

то оператор L_T нормально разрешим в $L_2(H,(0,1))$.

Доказательство этой теоремы следует из следующего соотношения

$$\left(\widetilde{A} + \tau\widetilde{E}\right)^{-1} L_T = \left(\widetilde{E} + \left(\widetilde{A} + \tau\widetilde{E}\right)^{-1}\left(L_T^0 - \tau\widetilde{E}\right)\right).$$

Отметим одну теорему о корректной разрешимости оператора L_T.

Теорема 3.3. *Если A линейный самосопряженный неотрицательный, а T линейный замкнутый операторы в H, $0 \in \rho(T-E)$ и $\left\|(T-E)^{-1}\right\|_H < 1/2$, то оператор L_T корректно разрешим в $L_2(H,(0,1))$.*

Автор пользуясь случаем выражает свою глубокую благодарность к.ф.-м.н. Р.В. Гусейнову за ряд ценных замечаний.

Литература

[1]. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Основны положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов.* УМН, 1957, т. XII, в. 2(74), с. 43-118.

[2]. Крейн С.Г. *Линейные уравнения в банаховом пространстве.* Изд. Наука, Москва, 1971, 104 с.

[3]. Дезин А.А. *Общие вопросы теории граничных задач.* Москва, Наука, 1980, 208 с.

[4]. Пивторак Н.И. *Разрешимые граничные задачи для дифференциально-операторного уравнения параболического типа. Сб. Прямые и обратные задачи спектральной теории дифференциальных операторов.* Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 104-107 с.

[5]. Якубов С.Я. *Линейные дифференциально - операторные уравнения и их приложения.* Баку, Элм, 1985, с.220.

[6]. Гасымов М.Г., Мирзоев С.С. *Нормальная разрешимость начально - краевых задач для дифференциально - операторных уравнений.* УМН, 1986, т. 41, в. 4(250), с. 204.

[7]. Мирзоев С.С. *Вопросы теории разрешимости краевых задач для дифференциально – операторных уравнений в гильбертовом пространстве и*

спектральные задачи связанные с ними. Автоפереферат на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук, Баку, 1994, 32 с.
[8]. Горбачук М.Л. *Самосопряженные граничные задачи для дифференциального уравнения второго порядка с неограниченным операторным коэффициентом, Функ. анализ и его прил.*, 1971, т. 5, в. 1, с. 10-21.
[9]. Левчук В.В. *Слабые решения дифференциально – операторного уравнения первого порядка. В кн. Школа по теории операторов в функциональных пространствах,* Минск, Изд. БГУ, 1982, с. 104.

İsmayılov Z.İ. **BİR SİNİF BİRİNCİ TƏRTİB DİFFERENSİAL OPERATORLARIN HƏLL OLUNMAQLIĞI HAQQINDA**

İşdə bir sinif birinci tərtib diferensial-operator tənliklər üçün qoyulmuş operator sərhəd məsələsinin requlyar həll olunmaqlığı operator əmsalları dilində tədqiq olunmuşdur.

Ismailov Z.I. **ON REGULAR SOLVABILITY FOR ONE CLASS OF DIFFERRENTIAL OPERATORS OF THE FIRST ORDER**

In this work for regular solvability of differential-operator eguations of first order with operator boundary condition is investigated in the term of operator coefficients.