УДК 517.984

КЕРИМОВ Я.Р., СОЛОВЬЕВ А.Н.

ИСЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА ОДНОГО КЛАССА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть L-оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y) \equiv -y'' + q(x)y + p(x)y \qquad (1)$$

в пространстве $L_2(-\infty,\infty)$ в предположении, что

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n e^{inx} \qquad (2)$$

где q_n-комплексные числа,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |q_n| < \infty \qquad (3)$$

и $p(x)$- комплекснозначная функция на $(-\infty;\infty)$ при некотором $\varepsilon > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\varepsilon|x|}|p(x)|dx < \infty \qquad (4)$$

Заметим, что оператор L является возмущением оператора L_0, порожденного дифференциальным выражением $l_0(y) \equiv y'' + q(x)y$ в $L_2(-\infty;\infty)$. Оператор L_0 исследован М.Г. Гасымовым [1]. Спектр задачи L в случае финитного возмущения исследован в работе [2] авторов. Здесь исследуется спектр оператора L. В работе придерживаемся обозначений из работы [2].

I. О специальных решениях уравнения $l(y) = k^2 y$. В работе [1] доказано, что $l(y) = k^2 y$ имеет решение вида

$$f(x,k) = e^{ixk}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2k} \sum_{\alpha=n}^{\infty} \vartheta_{n\alpha} e^{i\alpha x}\right) \qquad (5)$$

причем этот ряд допускает дважды почленное дифференцирование.

Непосредственно проверяется, что ограниченное на (α,∞) решение интегрального уравнения

$$F_+(x,k) = f(x,k) + \frac{1}{2ik}\int_x^{\infty} [f(x,k)f(t,-k) -$$
$$- f(t,k)f(x,-k)]p(t)F_+(t,k)dt \qquad (6)$$

является решением уравнения

$$l(y) = k^2 y \tag{7}$$

Исследуем уравнение *(6)*. Из результатов работы [1] вытекает, что

$$\operatorname*{Res}_{2k+n=0} f(x,k) = V_{nn} f\left(x, +\frac{n}{2}\right) \tag{8}$$

и поэтому ядро

$$A(x,t,k) \equiv \frac{1}{2ik}\left[f(x,k)f(t,-k) - f(t,k)f(x,-k)\right]p(t) \tag{9}$$

является целой функцией относительно k и справедлива оценка

$$|A(x,t,k)| \le c|x-t|e^{|Jmk|\cdot|x-t|} \cdot p(t), \quad |k| \le 1$$

$$|A(x,t,k)| \le \frac{c}{|k|}e^{|Jmk|\cdot|x-t|} \cdot p(t), \quad |k| \ge 1 \tag{10}$$

Теперь исследуем уравнение *(6)* при $Jmk > -\frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть

$$Z(x,k) = F_+(x,k)\exp(-ikx),$$
$$Z_0(x,k) = f(x,k)\exp(-ikx).$$

Тогда

$$Z(x,k) = Z_0(x,k) + \int_x^\infty e^{ik(t-x)} \cdot A(x,t,k)Z(t,k)dt \tag{11}$$

и из оценок *(10)* вытекает, что при $t \ge x$

$$\left|e^{ik(t-x)}A(x,t,k)\right| \le c\frac{(t-x)+1}{1+|k|}e^{(-Jmk+|Jmk|)(t-x)} \cdot p(t) \le$$

$$\le c\frac{1+2t}{1+|k|}|p(t)|\exp\left[2t(|Jmk| - Jmk)\right] \equiv V(t) \tag{12}$$

Очевидно, что при $Jmk > -\frac{\varepsilon}{2}$ и при любом $a \in (-\infty, \infty)$ сходится интеграл

$$\int_a^\infty V(t)dt < \infty \tag{13}$$

Поэтому уравнение (11) допускает мажорантное уравнение

$$|Z(x,k)| \le |Z_0(x,k)| + \int_x^\infty V(t)|Z(t,k)|dt$$

и откуда вытекает, что уравнение *(11)* решается методом последовательных приближений и имеет место неравенство

$$|Z(x,k)| \le |Z_0(k)|\exp\left\{\int_x^\infty V(s)ds\right\}$$

где

$$|Z_0(x,k)| \le Z_0(k),$$

$$Z_0(k)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|n+2k|}\sum_{\alpha=n}^{\infty}|\vartheta_{n\alpha}|.$$

Таким образом доказана следующая

Теорема 1. *Дифференциальное уравнение (7) имеет решение* $F_+(x,k)$ *которое является мероморфной функцией в области* $D_\varepsilon=\left\{k: Jmk>-\frac{\varepsilon}{2}\right\}$ *с возможными полюсами первого порядка в точках вида* $k_n=-\frac{n}{2}$, $n=1,2,\dots$

Далее,

$$|F_+(x,k)|\le Z_0(k)\exp\{-Jmk\cdot k\} \tag{14}$$

Замечание 1. *При любом* $a\in(-\infty,\infty)$ *и при* $Jmk>0$ *имеет место*

$$\int_a^{\infty}|F_+(x,k)|^2dx<\infty.$$

Замечание 2. *Из оценок (10), (13) и (14) вытекает, что при* $Jmk\ge-\frac{\varepsilon}{2}$

$$|F_+(x,k)-f(x,k)|\le\frac{Z_0(k)}{1+|k|}\exp\{-Jmk\cdot x\}.$$

Замечание 3. *Имеет место*

$$\operatorname*{Res}_{k=-\frac{n}{2}}F_+(x,k)=V_{nn}F_+\left(x,\frac{n}{2}\right).$$

Замечание 4. *Проведенные выше рассуждения позволяют также исследовать уравнение*

$$F_-(x,k)=f(x,-k)-\int_{-\infty}^{x}A(x,t,k)F_-(t,k)dt \tag{15}$$

и получить соответствующие свойства функции $F_-(x,k)$, *которое является решением уравнения (7):*

а) Дифференциальное уравнение (7) имеет решение $F_-(x,k)$, *которое является мероморфной функцией в области* $D_\varepsilon=\left\{k: Jmk>-\frac{\varepsilon}{2}\right\}$ *с возможными полюсами первого порядка в точках вида* $k_n=\frac{n}{2}$, $n=1,2,\dots$

Далее

$$|F_-(x,k)|\le Z_0(k)\exp\{Jmk\cdot x$$

б) При любом $a\in(-\infty,\infty)$ *и при* $Jmk>0$ *имеет место*

$$\int_{-\infty}^{a}|F_-(x,k)|^2dx<\infty.$$

в) При $Jmk > -\frac{\varepsilon}{2}$

$$|F_-(x,k) - f(x,-k)| \le \frac{Z_0(k)}{1+|k|}\exp\{Jmk \cdot x\}.$$

2. О свойствах вронскиана решений $F_+(x,k)$ и $F_-(x,k)$.

Пусть

$$W(k) = \begin{vmatrix} F_+(x,k) & F_-(x,k) \\ F_+'(x,k) & F_-'(x,k) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} f(0,k) + \int\limits_0^\infty A(0,t,k)F_+(t,k)dt & f(0,-k) - \int\limits_{-\infty}^0 A(0,t,k)F_-(t,k)dt \\ f'(0,k) + \int\limits_0^\infty A_x'(0,t,k)F_+(t,k)dt & f'(0,-k) - \int\limits_{-\infty}^0 A_x'(0,t,k)F_-(t,k)dt \end{vmatrix} =$$

$$= 2ik - \begin{vmatrix} f(0,k) & \int\limits_{-\infty}^0 A(0,t,k)F_-(t,k)dt \\ f'(0,k) & \int\limits_{\infty}^0 A_x'(0,t,k)F_-(t,k)dt \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \int\limits_0^\infty A(0,t,k)F_+(t,k)dt & f(0,-k) \\ \int\limits_0^\infty A_\alpha'(0,t,k)F_+(t,k)dt & f'(0,-k) \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} \int\limits_0^\infty A(0,t,k)F_+(t,k)dt & \int\limits_{-\infty}^0 A(0,t,k)F_-(t,k)dt \\ \int\limits_0^\infty A_x'(0,t,k)F_+(t,k)dt & \int\limits_{-\infty}^0 A_x'(0,t,k)F_-(t,k)dt \end{vmatrix}$$

Очевидно, что $W(k)$ является мероморфной функцией в области D_κ с возможными полюсами первого порядка в точках $\pm\frac{n}{2}$, $n = 1,2,\dots$

Предложение 1. *Пусть*

$D_{\varepsilon,\delta} = D_\varepsilon \setminus \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty}\left\{k : \left|k + \frac{n}{2}\right| < \delta\right\} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left\{k : \left|k - \frac{n}{2}\right| < \delta\right\}$, *где* $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$. *Тогда если* $k \in D_{\varepsilon,\delta}$ *и* $|k| \to \infty$, *то*

$$W(k) = 2ik\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

Это предложение является простымследствием результатов п.1.

Предложение 2. *Если* $k \in \left\{k : \left|k - \frac{n}{2}\right| < \delta\right\}$ *и* $|k| \to \infty$, *то*

$$W(k) = 2ik + \frac{a_n}{n+2k} + O(1)$$

Заметим, что

$$a_n = 2\operatorname*{Res}_{k=-\frac{n}{2}} W(k)$$

и не обязательно отлично от нуля, однако $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Предложение 3. *Функция* $W(k)$ *в области* $D_\varepsilon = \left\{k : Jmk > -\gamma > -\frac{\varepsilon}{2}\right\}$ *имеет не более чем счетное множество нулей с возможными предельными точками в бесконечности, причем большие нули функции* $W(k)$ *являются однократными и асимптотически приближаются к точкам вида* $\left(\frac{n}{2}\right)^2$, $n = \pm1, \pm2, \dots$

3. Построение резольвенты и исследование спектра оператора L.

Сначала построим ядро резольвенты $(L - \lambda E)^{-1}$. Пусть $k = \sqrt{\lambda}$ и $Jmk > 0$ при $\lambda \notin [0, \infty)$. Тогда нетрудно проверить, что ядро $R(x,t,k)$ оператора $(L - \lambda E)^{-1}$ равно

$$R(x,t,k) = \frac{1}{W(k)}\begin{cases} F_+(x,k)F_-(t,k), & t < x \\ F_-(x,k)F_+(t,k), & t > x \end{cases}$$

Отсюда видно, что оператор $L - k^2E$ имеет ограниченный обратный там, где $W(k) \neq 0$ и $Jmk > 0$.

Теорема 2. *На вещественной полуоси* $[0, \infty)$ *оператор* L *не имеет дискретных собственных значений.*

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in [0, \infty)$ и является собственным знакением оператора L. Соответствующую собственную функцию обозначим через $\varphi_0(x)$. Тогда $\varphi_0(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ и $L\varphi_0(x) = \lambda\varphi_0(x)$. Поэтому существуют числа a и b, где $|a| + |b| \neq 0$ и

$$\varphi_0(x) = F_+(x, k_0)a + F_+(x, -k_0)b,$$

$k_0 = \sqrt{\lambda_0}$. Отсюда при $x \to +\infty$ имеет место

$$|\varphi_0(x)|^2 = \left|ae^{ikx} + be^{-ikx} + O\left(e^{-\varepsilon x}\right)\right|^2 =$$
$$= |a|^2 + |b|^2 + a\bar{b}e^{2ikx} + \bar{a}be^{-2ikx} + O\left(e^{-\varepsilon x}\right)$$

и, следовательно,

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}|\varphi_0(x)|^2 dx = \infty.$$

Получили противоречие. Теорема доказана.

Терема 3. *Полуось* $[0,\infty)$ *входит в непрерывный спектр оператора* L.

Доказательство. *Пусть* $\sup p\theta_n(x)\in(-n,n)$, $\theta_n(x)\in C^2(-\infty,\infty)$,

$$\theta_n(x)=\begin{cases} , & x\in(-n,n-1) \\ 0, & |x|>n. \end{cases}$$

Такая последовательность существует. Пусть $\lambda\in[0,\infty)$ и $k=\sqrt{\lambda}$. Положим

$$\varphi_n(x)=\frac{F(x,k)\theta_n(x)}{\int\limits_{-n}^{n}|F(x,k)|^2\theta_n^2(x)dx}$$

Очевидно, что $\|\varphi_n\|=1$, $L\varphi_n(x)-k^2\varphi_n(x)=\psi_n(x)$, где

$$\psi_n(x)=\left(2F'\theta_n'+F\theta_n''\right)\Big/\int\limits_{-n}^{n}|F(x,k)|^2\,\theta_n^2(x)dx$$

и $\psi_n(x)\equiv 0$, $|x|\le n-1$ или $|x|>n$, а при $n-1\le|x|<n$ справедливо неравкенство

$$|\psi_n(x)|\le c\cdot\frac{1}{n}$$

Отсюда

$$\int\limits_{n-1}^{n}|\psi_n|^2dx+\int\limits_{-n}^{-n+1}|\psi_n|^2dx\to 0$$

при $n\to\infty$ и по определению непрерывного спектра λ входит в непрерывный спектр оператора L.

Теорема 4. *Для того, чтобы число* $\lambda\in[0,\infty)$ *было собственным значением оператора* L *необходимо и достаточно* $W(k)=0$.

Доказательство. Пусть $W(k_0)=0$ *и* $k_0^2=\lambda_0$, $\lambda_0\notin[0,\infty)$. Тогда $Jm\lambda>0$ и поэтому

$$F_+(x,k_0)\in L_2(0,\infty),\quad F_-(x,k_0)\in L_2(-\infty,0)$$

и они линейно зависимы:

$$F_+(x,k_0)=c_0F_-(x,k_0).$$

Отсюда вытекает, что $F_+(x,k_0)\in L_2(-\infty,\infty)$, и следовательно, является собственной функцией оператора L, отвечающая собственному числу λ_0.

Теперь пусть $\lambda_0\notin[0,\infty)$ и является собственным значением оператора L. Соответствующую собственную функцию обозначим через $\varphi_0(x)$. Тогда при

$$\varphi_0(x)\sim aF_+(x,k_0) \text{ при } x\to+\infty,$$
$$\varphi_0(x)\sim bF_-(x,k_0) \text{ при } x\to-\infty,$$

Следовательно, $F_+(x,k_0)$ и $F_-(x,k_0)$ линейно зависимы. Тогда их вронскиан $W(k_0)=0$.

Принимая во внимание результаты п.2 и приведенные выше теоремы получаем следующий результат.

Теорема 5. *Оператор* L *имеет не более чем счетное число комплексных собственных значений конечной кратности, при этом большие собственные значения асимптотически приближаются к числам вида* $\left(\frac{n}{2}\right)^2$*; непрерывный спектр совпадает с* $[0,\infty)$*, на котором может быть не более чем счетное множество спектральных особенностей конечной кратности, при этом большие спектральные особенности асимптотически приближаются к числам вида* $\left(\frac{n}{2}\right)^2$*. Расстояние между множеством собственных значений и множеством спектральных особенностей ограничено снизу положительным числом.*

4. Построение спектрального ядра оператора L. Пусть

$$A(k)=-\frac{1}{2ik}\begin{vmatrix}F_-(x,k) & F_+(x,-k)\\ F_-'(x,k) & F_+'(x,-k)\end{vmatrix},$$

$$B(k)=-\frac{1}{2ik}W(k).$$

Тогда нетрудно проверить, что

$$W(x,t,k)=R\left(x,t,\sqrt{\lambda i+io}\right)-R\left(x,t,\sqrt{\lambda i-io}\right)=$$
$$=R(x,t,k)-R(x,t,-k)=F_+(x,k)F_+(t,k)\frac{A(k)}{W(k)}+$$
$$+F_+(x,k)F_+(t,-k)-F_+(x,-k)F_+(t,k)-$$
$$-F_+(x,-k)F_+(t,-k)\frac{A(-k)}{W(-k)}.$$

Используя это соотношение, можно написать спектральное разложение по собственным функциям оператора L.

Литература

[1]. Гасымов М.Г. *Спектральный анализ одного класса несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка.* Функ. анализ и его приложения , 1980, т. 14, в. 1, с. 14-19.

[2]. Керимов Я.Р., Соловьев А.Н. *О структуре спектра финитно - возмущенной периодической задачи.* Спектр. Анализ операторов. АГУ, Баку, 1982, с. 53-58.

[3]. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* Изд. Наука, Москва, 1969.

[4]. Марченко В.А. *Некоторые вопросы теории одномерных дифференциальных операторов второго порядка.* Труды Моск. Матем. общ-ва, М. 1952, т. 1, с. 347-420.

Kərimov Y.R., Solovyov A.N.

BİR SİNİF ÖZ-ÖZÜNƏ QOŞMA OLMAYAN İKİ TƏRTİBLİ DİFERENSİAL OPERATOR-LARIN SPEKTRİNİN TƏDBİQİ

Məqalədə $q(x)$ və $p(x)$ operatorların üzərinə bəzi şərtlər qoşmaqla

$$\bar{e}(y) \equiv -y'' + q(x)y + p(x)y$$

diferensial ifadəsi ilə təyin olunan L operatorun spektri öyrənilmişdir.

Kerimov Ya.R., Solovyov A.N.

THE INVESTIGATION OF A SPECTRUM OF A CLASS OF NONSELFADJOINT SECOND ORDER DIFFERENTIAL OPERATORS

Under some conditions on $q(x)$ and $P(x)$ operators a spectrum of L operators defined by the differential expression

$$l(y) \equiv -y'' + q(x)y + p(x)y$$

is studied in the paper.