1997 ТОМ VI (XIV)

УДК 517. 957

ЛЕОНОВ К.Я.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрен вопрос о степенях суммируемости первых производных решений начально- краевых задач для квазилинейных гиперболических уравнений. Наилучшим решением этого вопроса является получение равенств между соответствующими интегральными нормами в актуальный и начальный моменты времени, т.е. нахождение соответствующих законов сохранения. Для широкого класса уравнений автору удалось описать множество законов сохранения первого порядка (определение см. ниже) и найти в явном виде бесконечную серию законов сохранения, показывающую сохранение произвольной степени суммируемости первых производных решений начально- краевых задач при консервативных и диссипативных граничных условиях.

Вывод законов сохранения, основанный на симметрийном подходе Э. Нетер, позволяет практически находить только отдельные законы сохранения, обусловленные явными симметриями лангранжиана. При использовании законов сохранения для оценок решений начально- краевых задач, желательно иметь непосредственное описание множества пар "плотность-поток", представляющих законы сохранения.

Насколько известно автору, первой работы, в которой давалось непосредственное систематическое описание множества пар "плотность-поток" для квазилинейных гиперболических и эллиптических уравнений, является работа М.Д. Крускала и Н. Забуски [1]. Однако, в их статье были в явном виде найдены только отдельные законы сохранения, причем, ни один из них (за исключением очевидного "интеграла энергии"), не давал информации о степени суммируемости первых производных, а предлагаемая в их работе методика исследования допускает в качестве граничных условий только условия периодичности.

Давать определение законов сохранения и проводить доказательства теорем целесообразно в терминах дифференциальных форм. Если исходить из заданного уравнения или системы уравнений в частных производных, то переход к дифферинциальным формам может быть осуществлен различными способами. Например, для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}N(u_t,u_x)+\frac{\partial}{\partial x}M(u_t,u_x)=0 \qquad (1)$$

полагая $u_t = p$, $u_x = q$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} N(p,q) + \dfrac{\partial}{\partial x} M(p,q) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t} q = \dfrac{\partial}{\partial x} p \end{cases}$$

или в дифферинциальных формах

$$\begin{cases} d(N(p,q))dx - d(M(p,q))dt = 0 \\ dqdx + dpdt = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Для уравнения вариационного типа

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L(u_t,u_x)}{\partial u_t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L(u_t,u_x)}{\partial u_x}\right) = 0$$

можно воспользоваться каноническими переменными

$$p = \frac{\partial L}{\partial u_t}, \quad q = \frac{\partial L}{\partial u_x}, \quad H(p,q) = pu_t + qu_x - L,$$

в которых получим систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} p + \frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad u_t = H_p, \quad u_x = H_q,$$

или (исключая "потенциал" $u(x,t)$) систему

$$\begin{cases} dpdx - dqdt = 0 \\ d(H_q)dx + d(H_p)dt = 0 \end{cases} \tag{3}$$

В пространстве 1- форм построенном на базе расширенного фазового пространства переменных системы уравнений *(2)* (p,q,t,x) рассмотрим подпространство форм вида $\alpha \equiv a(p,q,t,x)dx + b(p,q,t,x)dt$.

Определение. *Дифферинциальная форма* $\alpha \equiv a(p,q,t,x)dx + b(p,q,t,x)dt$ *называется формой, определяющей закон сохранения первого порядка для системы уравнений (2), если на любом интегральном многообразии этой системы*

$$\oint_S \alpha = 0 \tag{4}$$

по любой замкнутой гиперповерхности S пространства независимых аргументов.

Замечание 1. Название "первого порядка" отражает зависимость коэффициентов формы α только от производных первого порядка исходного уравнения *(1)*.

Замечание 2. Формы α, естественно, определяется с точностью до дифференциала произвольной скалярной функции.

По теореме Стокса (при соответствующих условиях гладкости интегрального многообразия, коэффициентов формы α и поверхности S) форма α определяет закон сохранения для системы уравнений *(2)* тогда и только тогда, когда

$$d\alpha = 0 \tag{5}$$

на любом интегральном многообразии этой системы. Соотношения *(4)* и *(5)* называют обычно законами сохранения в интегральной и дифференциальной формах соответственно.

Доказана следующая

Теорема. *Для того чтобы дифференциальная форма* $\alpha \equiv f(p,q)dx - g(p,q)dt$ *определяла закон сохранеия первого порядка для системы уравнений (2) необходимо и достаточно, чтобы функции* $f(p,q)$ *и* $g(p,q)$ *удовлетворяли системе уравнений*

$$\begin{cases} M_q f_p - N_p g_q = 0 \\ N_p\left(f_q + g_p\right) = f_p\left(N_q + M_p\right) \end{cases} \tag{6}$$

Замечание 3. В формулировке теоремы тип системы уравнений *(2)* (гиперболический, эллиптический) не играет никакой роли. Тип уравнения определяет специфические свойства коэффициентов формы α.

При выполнении условий $N_q + M_p = 0$ или $M_q \pm N_p = 0$ удобно ввести производящую функцию закона сохранения. Например, при условии $N_q + M_p = 0$, которое часто выполняется в моделях представляющих практический интерес, для производящей функции $\Phi(p,q)$: $\Phi_p = f,\ \Phi_q = -g$ получаем уравнение

$$M_q \Phi_{pp} + N_p \Phi_{qq} = 0.$$

В том случае, когда отношение M_q к N_p не зависит от p, производящие функции интересующей нас серии законов сохранения (степень суммируемости) имеют вид

$$\Phi_k(p,q) = p^{2k+1} + \varphi_1(q)p^{2k-1} + \cdots + \varphi_m(q)p^{2k+1-2m} + \cdots + \varphi_k(q)p, \quad (k = 1,2,\ldots)$$

где функции $\varphi_m(q)$ определяются рекуррентными соотношениями

$$N_p\varphi_m''(q) + (2k+1-2m)(2k^2-2m)M_q\varphi_{m-1}(q) = 0, \varphi_0(q) \equiv 1 \quad (m = 1,\ldots,k) \tag{7}$$

Например, для уравнения

$$u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha u_x + \beta u_x^3\right) = 0, \quad (\alpha > 0, \beta \geq 0)$$

получаем, при $k = 2$

$$\Phi_2(p,q) = p^5 + \left(10\alpha q^2 + 5\beta q^4\right)p^3 + \left(5\alpha^2 q^4 + 7\alpha\beta q^6 + \frac{45}{28}\beta^2 q^8\right)p.$$

Следовательно, плотность и поток соответствующего закона сохранения имеют вид (с точностью до произвольного числового множителя общего для f и g)

$$f(p,q) = 5p^4 + 15\left(2\alpha q^2 + \beta q^4\right)p^2 + 5\alpha^2 q^4 + 7\alpha\beta q^6 + \frac{45}{28}\beta^2 q^8,$$

$$g(p,q) = -20p^3\left(\alpha q + \beta q^3\right) - p\left(20\alpha^2 q^3 + 42\alpha\beta q^5 + \frac{90}{7}\beta^2 q^7\right).$$

Замечание 4. При интегрировании соотношений *(7)* следует выбирать нулевые аддитивные постоянные для получения функций $\varphi_m(q)$ с нужными свойствами.

Аналогичная серия законов сохранения имеет место и для системы уравнений *(3)*.

Отметим, что так называемые характеристики законов сохранения Q_i (см. например [2]) связаны с плотностями этих законов простыми соотношениями $Q_1 N_p = f_p$, $Q_2 = f_q - Q_1 N_q$, поэтому можно не составлять отдельных таблиц для этих характеристик, как это иногда делается. Указанные характеристики законов сохранения могут быть использованы для "прямого" способа вывода законов сохранения с помощью умножения первого уравнения системы *(2)* на Q_1, второго уравнения на Q_2, сложения полученных равенств и использования самых уравнений системы *(2)* для упрощений.

Непосредственное рассмотрение полученных однопараметрических (параметр k) серий законов сохранения для систем уравнений *(2)* и *(3)* показывает, что с их помощью можно получать оценки интегральных норм первых производных при граничных условиях соответствующих первой ($u_t \equiv p = 0$ на границе пространственной области), второй ($q = \dfrac{\partial L}{\partial u_x} = 0$ на границе области), и третьей ($\dfrac{\partial L}{\partial u_x} = \psi(u)$, где $\psi(\cdot)$ соответствующая нечетная функция) краевым задачам, а также при диссипативных граничных условиях, например, типа $\dfrac{\partial L}{\partial u_x} = \psi(u_t)$.

Замечание 5. Система уравнений *(3)* описывает одномерные гидродинамические течения при следующей интерпритации переменных: импульс $p = \rho_0 \vartheta$, где ϑ - скорость частицы жидкости; q – давление; $H_p = \vartheta$, $H_q = V$ – удельный объем; (t, x) – лагранжевые координаты.

Литература

[1]. Kruskal M.D., Zabusky N. I. Math. Phys., 1966, v. 7, №7, p. 1256-1267.

[2]. Олвер П. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.* Москва, Мир, 1989, с. 635.

Leonov K.Y.

KVAZİXƏTTİ HİPERBOLİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİR SİNİF SAXLANMA QANUNLARI HAQDA

İşdə kvazixətti hiperbolik tənliklər üçün başlanğıc- sərhəd məsələsinin həllərinin birinci tərtib törəmələrinin dərəcəli çəmlənməsi məsələsinə baxılmışdır.

Leonov C. J.

ON ONE CLASS OF CONSERVATION LOWS FOR QUASI- LINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS

For quasi- linear hyperbolic equations the description of the set of pairs "density-flow", that determine conservation laws of first order (that is depending on derivates of first order). Is given such set has two- place functional power of freedom. The question of finding obvious form of conservation lows is coming to the question of finding obvious form of solutions of linear equations with variable coefficients.

For wide class of the equations was found in obvious form infinite set of conservation lows that shows the conservation of summing with arbitrary power of first derivatives of solutions of initial- boundary value problems with conservative and dissipative boundary conditions.