УДК 517.97

САДЫГОВ М.А.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В работах [1-3] введено пространство $M_{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E})$ и изучен ряд его свойств. Отметим, что при помощи пространства $M_{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E})$ вводится понятие обобщенного решения экстремальных задач. В этой работе получены ряд новых свойств пространства $M_{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E})$. Далее изучаются компактности или "типа компактности" множества решений разных гиперболических включений и рассмотрено существование обобщенного решения задачи оптимального управления.

§1. Некоторые свойства проостранства $M_{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E})$.

Пусть G ограниченное измеримое множество в R^m, $E\subset L^{(n)}_{(\alpha)}(G)=$ $=L^{n_1}_{\alpha_1}(G)\times\ldots\times L^{n_s}_{\alpha_s}(G)$, $(n)=(n_1,\ldots,n_s)$, $n=n_1+\ldots+n_s$, $(\alpha)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$, $1\le$ $\le\alpha_i\le+\infty$, и функция $\Psi:G\times R^n\to[0,+\infty]$ $\mathcal{L}\times B$ - измерима. Положим

$$S(\Psi,\mathrm{E})=\left\{u\in\mathrm{E}:\int_G\Psi(x,u(x))dx<+\infty\right\}.$$

Если $f_1(x,u(x))=f_2(x,u(x))$ п.в. x для любого $u\in S(\Psi,\mathrm{E})$, то будем говорить, что две $\mathcal{L}\times B$- измеримые функции f_1 и f_2 из $G\times R^n$ в $\overline{R}=$ $=R\bigcup\{\pm\infty\}$ эквивалентные относительно (Ψ,E). Обозначим через A множество всех эквивалентных относительно (Ψ,E) классов $\mathcal{L}\times B$-измеримых функций $f:G\times R^n\to\overline{R}$. Через $M^{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E})$ обозначим множество тех $f\in A$, которые удовлетворяют условию:

$$|f(x,z)|\le a(x)+c\sum_{i\in\mathrm{I}}|z_i|^{\alpha_i}+b(x)\sum_{i\in\mathrm{I}_0}|z_i|^p+c\psi(x,z)\ ,$$

$$z=(z_1,\ldots,z_s)\in R^{n_1}\times\ldots R^{n_s}$$

$$\mathrm{I}_0=\{i:i=\overline{1,s};\ \alpha_i=+\infty\},\quad \mathrm{I}=\{1,\ldots,s\}\setminus\mathrm{I}_0$$

для некоторого $a(\cdot)$, $b(\cdot)\in L^+_1(G)$, $p\ge1$ и $c\ge0$. Предположим, что $S(\Psi,\mathrm{E})\ne\varnothing$ и для каждого $k\in N$, для которого $B_k=\{u\in S(\Psi,\mathrm{E}):\|u\|_{(\alpha)}=$ $=\|u_1\|_{\alpha_1}+\ldots+\|u_s\|_{\alpha_s}\le k\}\ne\varnothing$ (через $\|\cdot\|_{\alpha_i}$ обозначена норма в $L^{n_i}_{\alpha_i}(G)$)

$$\sup_{u\in B_k}\int_G \Psi(x,u(x))dx<+\infty\ .$$

Ясно, что $M^{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E})$ линейное пространство и

$$P_k(f)=\sup_{u\in B_k}\int_G |f(x,u(x))|dx\,,\quad k\in N\quad (B_k\neq\varnothing)$$

является счетным разделяющим семейством полунорм на этом пространстве, поэтому семейство $\{P_k\}$ индуцирует локально-выпуклую топологию τ со счетной локальной базой. Далее, через $M_{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E})$ обозначим локально-выпуклое пространство, порожденное семейством полунорм $\{P_k\}$. Если $\mathrm{E}=L^{(n)}_{(\alpha)}(G)$, то вместо $M_{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E})$ будем писать $M_{(\alpha)}(\Psi)$. Через $M^*_{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E})$ обозначим пространство, сопряженное с $M_{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E})$ и везде считаем, что $M^*_{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E})$ снабжено $\sigma(M^*_{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E}),$ $M_{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E}))$ топологией. Легко проверяется, что $\nu_{(u,\vartheta)}(f)=\int_G \vartheta(x)f(x,u(x))dx$ для любого $u\in S(\Psi,\mathrm{E})$ и $\vartheta(\cdot)\in L_\infty(G)$ является линейным непрерывным функционалом на пространстве $M_{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E})$, т.е. $\nu_{(u,\vartheta)}\in M^*(\Psi,\mathrm{E})$. Для простоты $\nu_{(u,1)}$ обозначим через ν_u.

Положим $$H=\left\{f\in M_{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E}):\int_G f(x,u(x))dx=0,\ \forall u\in S(\Psi,\mathrm{E})\right\}.$$

Аннулятор $H^\perp$ определяется следующим образом: $H^\perp=\{\nu\in M^*_{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E}):$ $\nu(f)=0$ для всех $f\in H\}$.

Обозначим $K=\left\{f\in M_{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E}):\sup\limits_{u\in S(\Psi,\mathrm{E})}\left|\int_G f(x,u(x))dx\right|\le 1\right\}$, $g=\dfrac{1}{\mu(G)}$,

$$A_1=\overline{co}\{\pm\nu_u:u\in S(\Psi,\mathrm{E})\},\quad A_2=\{\nu\in H^\perp:|\nu(f)|\le 1\ \text{для}\ f\in K\}.$$

Лемма 1. *Если* $S(\Psi,\mathrm{E})$ *ограничено, то* $A_1=A_2$.

Доказательство. Легко проверяется, что $A_1\subset A_2$. Покажем, что $A_2\subset A_1$. Предположим противное. Пусть существует $\bar\nu\in A_2$, что $\bar\nu\notin A_1$. Тогда по теореме отделимости существует $f\in M_{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E})$ и ε, что

$$\bar\nu(f)\le\int_G f(x,u(x))dx-\varepsilon\,,\quad \bar\nu(f)\le-\int_G f(x,u(x))dx-\varepsilon$$

для любого $u\in S(\Psi,\mathrm{E})$. Отсюда вытекает, что $f\notin H$ и

$$-\bar\nu(f)\ge\left|\int_G f(x,u(x))dx\right|+\varepsilon \tag{1}$$

для любого $u \in S(\Psi, \mathrm{E})$. Положив $\bar{f}(x,u) = \left\{ \sup\limits_{u \in S(\Psi,\mathrm{E})} \left| \int\limits_G f(x,u(x))dx \right| \right\}^{-1} \cdot f(x,u)$

получим, что $\sup\limits_{u \in S(\Psi,\mathrm{E})} \left| \int\limits_G \bar{f}(x,u(x))dx \right| = 1$. Из *(1)* вытекает, что $-\bar{\nu}(\bar{f}) \geq 1 + \tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\varepsilon} > 0$. Отсюда получим, что $\left|\bar{\nu}(\bar{f})\right| > 1$. Получаем противоречие, т.е. $A_2 \subset A_1$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если* $S(\Psi, \mathrm{E})$ *ограничено, то*

$$\overline{co}\{\nu_u : u \in S(\Psi,\mathrm{E})\} = \left\{ \nu \in H^{\perp} : \sup_{f \in K} |\nu(f)| = 1,\ \nu(g) = 1 \right\}.$$

Доказательство. Из леммы 1 вытекает, что

$$B \equiv \left\{ \nu \in A_1 : \sup_{f \in K} |\nu(f)| = 1,\ \nu(g) = 1 \right\} = \left\{ \nu \in H^{\perp} : \sup_{f \in K} |\nu(f)| = 1,\ \nu(g) = 1 \right\}.$$

Легко проверяется, что

$$\overline{co}\{\nu_u : u \in S(\Psi,\mathrm{E})\} \subset B, \quad \overline{co}\{-\nu_u : u \in S(\Psi,\mathrm{E})\} \cap B = \varnothing.$$

Пусть $\nu_1 \in co\{\nu_u : u \in S(\Psi,\mathrm{E})\}$, $\nu_2 \in co\{-\nu_u : u \in S(\Psi,\mathrm{E})\}$. Тогда ясно, что

$$(\alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2)(g) = \alpha\,\nu_1(g) + (1-\alpha)\nu_2(g) = 2\alpha - 1.$$

Отсюда вытекает, что $(\alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2)(g) = 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 1$, т.е. $(\alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2)(g) = \nu_1(g)$. Таким образом получим, что

$$\overline{co}\{\nu_u : u \in S(\Psi,\mathrm{E})\} = B.$$

Лемма доказана.

Если $S(\Psi, \mathrm{E})$ ограничено, то легко проверяется, что пространство $M_{(\alpha)}(\Psi, \mathrm{E})$ нормируемо и норму можно взять следующим образом:

$$\|f\| = \sup_{u \in S(\Psi,\mathrm{E})} \int\limits_G |f(x,u(x))| dx.$$

Лемма 3. *Если* $S(\Psi, \mathrm{E})$ *ограничено, то*

$$\overline{co}\{\nu_{u,\vartheta} : u \in S(\Psi,\mathrm{E}),\ \|\vartheta\|_{\infty} = 1\} = \{\nu \in M^{*}_{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E}) : \|\nu\| \leq 1\}.$$

Доказательство. Легко проверяется, что

$$\overline{co}\{\nu_{u,\vartheta} : u \in S(\Psi,\mathrm{E}),\ \|\vartheta\|_{\infty} = 1\} \subset \{\nu \in M^{*}_{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E}) : \|\nu\| \leq 1\}.$$

Докажем обратное неравенство. Пусть существует $\bar{\nu} \in \{\nu \in M^{*}_{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E}) : \|\nu\| \leq 1\}$, что $\bar{\nu} \notin \overline{co}\{\nu_{u,\vartheta} : u \in S(\Psi,\mathrm{E}),\ \|\vartheta\|_{\infty} = 1\}$. Тогда по теореме отделимости существует $f \in M_{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E})$, $f \neq 0$ и $\varepsilon > 0$, что

$$\bar{\nu}(f) \leq \int\limits_G \vartheta(x) f(x,u(x))dx - \varepsilon$$

для любого $u \in S(\Psi,\mathrm{E})$, $\vartheta \in L_{\infty}(G)$, $\|\vartheta\|_{\infty} = 1$. Отсюда вытекает, что

$$-\bar{\nu}(f) \geq \int\limits_G |f(x,u(x))| dx + \varepsilon, \quad u \in S(\Psi,\mathrm{E}).$$

Положив $\bar{f}(x,u) = \left\{ \sup\limits_{u \in S(\Psi,\mathrm{E})} \int\limits_G |f(x,u(x))| dx \right\}^{-1} \cdot f(x,u)$ получим, что

$$-\bar{\nu}(\bar{f}) \geq \sup_{u \in S(\Psi,\mathrm{E})} \int_G |\bar{f}(x,u(x))| dx + \tilde{\varepsilon}\ , \quad \tilde{\varepsilon} > 0\ .$$

Поэтому $-\bar{\nu}(\bar{f}) \geq 1 + \tilde{\varepsilon}$. Так как $\|\bar{f}\| = 1$ отсюда получим противоречие. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если для* $\vartheta_i \in L^+_\infty(G)$, $\vartheta_i(x) \in \{0;1\}$, $i = 1,\dots,k$, *где* $\sum\limits_{i=1}^{k} \vartheta_i(x) = 1$ *и из* $u_i \in S(\Psi,\mathrm{E})$ *следует, что* $\sum\limits_{i=1}^{k} \vartheta_i u_i \in S(\Psi,\mathrm{E})$, *то*

$$\overline{co}\{\nu_u : u \in S(\Psi,\mathrm{E})\} = cl\{\nu_u : u \in S(\Psi,\mathrm{E})\}\ .$$

Следствие 1. *Если* $\mathrm{E} = L^{(n)}_{(\alpha)}(G)$, *то*

$$\overline{co}\{\nu_u : u \in S(\Psi,\mathrm{E})\} = cl\{\nu_u : u \in S(\Psi,\mathrm{E})\}\ .$$

Положив

$$B_k = \{u \in S(\Psi,\mathrm{E}) : \|u\|_{(\alpha)} \leq k\}, \quad \Phi_k = \left\{f \in M_{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E}) : \sup_{u \in B_k} \left|\int_G f(x,u(x))dx\right| \leq 1\right\},$$

$$H_k = \left\{ f \in M_{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E}) : \int_G f(x,u(x))dx = 0 \text{ для } u \in B_k \right\},$$

$$H_k^{\perp} = \{\nu \in M^*_{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E}) : \nu(f) = 0 \text{ для } f \in H_k\},\ Q_k = \{f : P_k(f) \leq 1\}\ ,$$

$$A_1^k = \overline{co}\{\pm \nu_u : u \in B_k\}, \quad A_2^k = \{\nu \in H_k^{\perp} : |\nu(f)| \leq 1 \text{ для } f \in \Phi_k\}\ ,$$

аналогично доказываются следующие утверждения:

$$A_1^k = A_2^k\ , \quad \overline{co}\{\nu_u : u \in B_k\} = \left\{ \nu \in H_k^{\perp} : \sup_{f \in \Phi_k} |\nu(f)| = 1,\ \nu(g) = 1 \right\}\ ,$$

$$\overline{co}\{\nu_{u,\vartheta} : u \in B_k, \|\vartheta\|_\infty = 1\} = \{\nu \in M^*_{(\alpha)}(\Psi,\mathrm{E}) : |\nu(f)| \leq 1,\ f \in Q_k\}\ .$$

В работе [1-3] рассмотрены пространства $M(S)$. Аналогичные утверждение верно в пространстве $M(S)$.

Лемма 5. *Если* $S(\Psi)$ *ограничено, то*

$$\overline{co}\{\pm \nu_x : x \in S(\Psi)\} = \{\nu \in M^*(S) : \|\nu\| \leq 1\}\ ,$$

$$\overline{co}\{\nu_x : x \in S(\Psi)\} = \{\nu \in M^*(S) : \|\nu\| = 1,\ \nu(\bar{f}) = 1,\ \bar{f} \equiv 1\}\ .$$

§2. О компактности множества решений гиперболических включений.

Пусть D некоторая ограниченная область m-мерного пространства R^m, $T > 0$, $V \subset R^k$, $Q_T = \{(x,t) : x \in D, 0 < t < T\}$, $D_0 = \{(x,0) : x \in D\}$, $D_T = \{(x,T) : x \in D\}$, $\Gamma_T = \{(x,t) : x \in \partial D, 0 < t < T\}$ - боковая поверхность цилиндра Q_T, $f : Q_T \times R \times V \to R$, $k(\cdot) \in C^1(\overline{D})$, $a(\cdot) \in C(\overline{D})$, $k(x) \geq k_0 > 0$, 2^V -

множество всех подмножеств V, отображение $\Gamma : Q_T \to 2^V$ измеримо и при всех (x,t) $\Gamma(x,t)$ - непусто, $\Psi \in L_2(D)$ и $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(D)$.

Изучим компактности множества решений следующей задачи

$$u_{tt} - div(k(x)\nabla u) + a(x)u = g(x,t) \qquad (1)$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi, \quad u_t\big|_{t=0} = \Psi, \quad u\big|_{\Gamma_T} = 0 \quad, \qquad (2)$$

где $g(\cdot) \in L_2(Q_T)$, $g(x,t) \in f(x,t,u(x,t),\Gamma(x,t))$.

Принадлежащая пространству $H^1(Q_T)$ функция $u(\cdot)$ называется (см. [4]) обобщенным решением в Q_T первой смешанной задачей *(1)*, *(2)*, если она удовлетворяет начальному условию $u\big|_{t=0} = \varphi$, граничному уловию $u\big|_{\Gamma_T} = 0$ и тождеству

$$\int_{Q_T} (k\nabla u \nabla \vartheta + au\vartheta - u_t\vartheta_t)dxdt = \int_{D_0} \Psi\,\vartheta dx + \int_{Q_T} f\vartheta dxdt \qquad (3)$$

при всех $\vartheta \in H^1(Q_T)$, $\vartheta\big|_{D_T} = 0$.

Для простоты в работе рассматривается только первая смешанная задача. Отметим, что когда $\varphi \in H^1(D)$ аналогичные результаты верны и для второй и третьей смешанных задач. Можно рассмтреть случай, когда $u(\cdot) \in W^n_{p,1}(Q_T) = (W^1_p(Q_T))^n$, $1 < p < +\infty$.

Известно (см. [4]), что существует обобщенное решение $u(\cdot)$ задачи *(1)*, *(2)* и имеет место неравенство

$$\|u\|_{H^1(Q_T)} \le c\left(\|\varphi\|_{H^1(D)} + \|\Psi\|_{L_2(D)} + \|g\|_{L_2(Q_T)}\right) , \qquad (4)$$

в котором положительная постоянная c не зависит от φ, Ψ и g.

Теорема 1. *Пусть V - компакт, многозначное отображение Γ измеримо, $\Gamma(x,t)$ непусто и компактно, функция $(x,t) \to f(x,t,u,\omega)$ измерима, функция $(u,\omega) \to f(x,t,u,\omega)$ непрерывна и $|f(x,t,u,\omega)| \le \lambda(x,t)$ для любого $(u,\omega) \in R \times V$, где $\lambda(\cdot) \in L_2(Q_T)$. Кроме того $f(x,t,u,\Gamma(x,t))$ выпукло. Тогда множество обобщенных решений задачи (1), (2) компактно в $L_2(Q_T)$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательности решений $u_n(x,t)$ задачи *(1)*, *(2)*, которые соответствуют $g_n(x,t) \in f(x,t,u_n(x,t),\Gamma(x,t))$. По теореме 1.7.10 [5] существует измеримая функция $\omega_n(x,t) \in \Gamma(x,t)$, что $g_n(x,t) = f(x,t,u_n(x,t),\omega_n(x,t))$. Не умаляя общности можно считать, что $\omega_n(\cdot)$ слабо сходится к $\omega(\cdot) \in L^k_2(Q_T)$. Так как $|f(x,t,u_n(x,t),\omega_n(x,t))| \le$ $\le \lambda(x,t)$ то по неравенству *(4)* существует постоянная M, что

$\|u_n\|_{H^1(Q_T)} \le M$. Поэтому по теореме Реллиха (см. [6]) u_n сходится в $L_2(Q_T)$ к некоторой функции $\bar{u} \in L_2(Q_T)$ и ясно, что ∇u_n слабо сходится к некоторой функции $\bar{\vartheta} \in L_2^m(Q_T)$. Покажем, что $\bar{u}$ также является решением *(1)*, *(2)*. По условию

$$\int_{Q_T} \left(k\nabla u_n \nabla \vartheta + au_n \vartheta - u_{n_t} \vartheta_t\right) dxdt =$$

$$= \int_{D_0} \Psi\, \vartheta\, dx + \int_{Q_T} \vartheta(x,t) f(x,t,u_n(x,t), \omega_n(x,t)) dxdt \quad . \qquad (5)$$

Ясно, что

$$\int_{Q_T} \vartheta(x,t) f(x,t,u_n(x,t),\omega_n(x,t)) dxdt = \int_{Q_T} \vartheta(x,t)\big(f(x,t,u_n(x,t),\omega_n(x,t)) -$$

$$- f(x,t,\bar{u}(x,t),\omega_n(x,t))\big) dxdt + \int_{Q_T} \vartheta(x,t) f(x,t,\bar{u}(x,t),\omega_n(x,t)) dxdt \; .$$

Не умаляя общности можно считать, что u_n сходится к $\bar{u}$ почти всюду. По теореме 1.2.15 [5] для почти всех $(x,t) \in Q_T$ имеем $\lim_{n\to\infty} f(x,t,u_n(x,t),\omega) =$ $= f(x,t,\bar{u}(x,t),\omega)$ равномерно для $\omega \in V$. Ясно, что

$$\lim_{n\to\infty} \big(f(x,t,u_n(x,t),\omega_n(x,t)) - f(x,t,\bar{u}(x,t),\omega_n(x,t))\big) = 0 \qquad \text{п.в.}$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \int_{Q_T} \vartheta(x,t)\big(f(x,t,u_n(x,t),\omega_n(x,t)) - f(x,t,\bar{u}(x,t),\omega_n(x,t))\big) dxdt = 0 \; .$$

По условию $|f(x,t,\bar{u}(x,t),\omega_n(x,t))| \le \lambda(x,t)$, поэтому не умаляя общности можно считать, что $f(x,t,\bar{u}(x,t),\omega_n(x,t))$ слабо сходится к некоторой функции $g(\cdot) \in L_2(Q_T)$. Так как $f(x,t,\bar{u}(x,t),\omega_n(x,t)) \in f(x,t,\bar{u}(x,t),\Gamma(x,t))$, то используя теорему 8.2.1 [7] и свойства интеграла Кастена (или из леммы Мазура [5, 8]) легко проверить, что $g(x,t) \in f(x,t,\bar{u}(x,t),\Gamma(x,t))$. По теореме 1.7.10 [5] существует измеримая функция $\omega_0(x,t) \in \Gamma(x,t)$, что $g(x,t) =$ $= f(x,t,\bar{u}(x,t),\omega_0(x,t))$.

Используя определение обобщенной производной Шварца легко получим, что $\bar{\vartheta} = \nabla \bar{u}$. Поэтому из *(5)* получим, что $\bar{u}$ является решением задачи *(1)*, *(2)* и соответствует $\omega_0(x,t)$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $V \subset R^k$, $\Gamma(x,t) = V$, $f : Q_T \times R \times V \to R$, *функция* $(x,t) \to f(x,t,u,\omega)$ *измерима, функция* $(u,\omega) \to f(x,t,u,\omega)$ *непрерывна,* $|f(x,t,u,\omega)| \le \alpha(x,t) + c_0(|u| + \|\omega\|)$, *где* $\sqrt{3}cc_0 < 1$, $\alpha(\cdot) \in L_2(Q_T)$. *Кроме того* $f(x,t,u,V)$ *выпукло, замкнуто и последовательность управлений* $\omega_n(\cdot) \in L_2^k(Q_T)$ *слабо сходится. Тогда существует подпоследовательность последовательности обобщенных решений* $\{u_n\}$ *задачи (1), (2) соответствующих последовательностиуправлений* $\omega_n(x,t)$, *которая сходится в* L_2 *к решению задачи (1), (2).*

Доказательство. Пусть u является решением задачи *(1)*, *(2)* соответствующей управлению $\omega(\cdot)$. Ясно, что

$$\|u\|_{H^1(Q_T)} \le c\left(\|\varphi\|_{H^1} + \|\Psi\|_{L_2} + \|f\|_{L_2}\right) \le c\left(\|\varphi\|_{H^1} + \|\Psi\|_{L_2} + \right.$$

$$+\left(\int_{Q_T}\left(\alpha(x,t) + c_0\left(|u| + \|\omega\|\right)\right)^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \le c\left(\|\varphi\|_{H^1} + \|\Psi\|_{L_2} + \right.$$

$$+\left(\int_{Q_T}\left(3\alpha^2(x,t) + 3c_0^2|u|^2 + 3c_0^2\|\omega\|^2\right)dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \le c\left(\|\varphi\|_{H^1} + \|\Psi\|_{L_2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{3}\|\alpha\|_{L_2} + \sqrt{3}c_0\|u\|_{L_2} + \sqrt{3}c_0\|\omega\|_{L_2^k}\right).$$

Отсюда получим, что

$$\left(1 - \sqrt{3}cc_0\right)\|u\|_{H^1(Q_T)} \le c\left(\|\varphi\|_{H^1} + \|\Psi\|_{L_2} + \sqrt{3}\|\alpha\|_{L_2} + \sqrt{3}c_0\|\omega\|_{L_2^k}\right). \qquad (6)$$

Так как ω_n слабо сходится, то $\|\omega_n\|_{L_2^k}$ ограничено. Из *(6)* получим, что $\|u_n\|_{H^1(Q_T)}$ ограничено. Поэтому по теореме Реллиха, не умаляя общности, можно считать, что последовательность $\{u_n\}$ сходится в $L_2(Q_T)$ к некоторой функции $\bar{u}$. Покажем, что $\bar{u}$ также является решением *(1)*, *(2)*. Ясно, что

$$\int_{Q_T}\vartheta(x,t)f(x,t,u_n(x,t),\omega_n(x,t))dxdt = \int_{Q_T}\vartheta(x,t)(f(x,t,u_n(x,t),\omega_n(x,t)) -$$

$$- f(x,t,\bar{u}(x,t),\omega_n(x,t)))dxdt = \int_{Q_T}\vartheta(x,t)f(x,t,\bar{u}(x,t),\omega_n(x,t))dxdt\ .$$

Аналогично доказательству леммы 4.2.1 [9] можно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_{Q_T}\vartheta(x,t)(f(x,t,u_n(x,t),\omega_n(x,t)) - f(x,t,\bar{u}(x,t),\omega_n(x,t)))dxdt = 0\ .$$

Так как $\|f(x,t,\bar{u}(x,t),\omega_n(x,t))\|_{L^2} \le \sqrt{3}\|\alpha\|_{L_2} + \sqrt{3}c_0\|\bar{u}\|_{L_2} + \sqrt{3}c_0\|\omega_n\|_{L_2^k}$, то не умаляя общности можно считать, что $f(x,t,\bar{u}(x,t),\omega_n(x,t))$ слабо сходится к некоторой функции $g(\cdot) \in L_2(Q_T)$. Ясно, что $f(x,t,\bar{u}(x,t),\omega_n(x,t)) \in$ $\in f(x,t,\bar{u}(x,t),V)$. Используя лемму Мазура получим, что $g(x,t) \in$ $\in f(x,t,\bar{u}(x,t),V)$. По определению обобщенной производной Шварца получим, что ∇u_n слабо сходится к $\nabla\bar{u}$. Поэтому из *(5)* получим, что $\bar{u}$ является решением задачи *(1)*, *(2)*. Теорема доказана.

Используя теорему 4.1.10, теорему 4.1.11 и теорему 6.2.3 [4] можно показать, что аналогичные результаты верны и для эллиптической и параболической включений.

Пусть $V_i, i = \overline{1,4}$, компактные множества в R^{k_i}, $V \subset R^k$; A_1, A_2, A_3 - компактные множества в пространствах $C^1(\overline{D},R^{k_1})$, $C(\overline{D},R^{k_2})$, $C^1(\overline{D},R^{k_3})$ соответственно; $k(\cdot) \in C^1(\overline{D}\times V_1)$, $k(x,\omega_1) \ge k_0 > 0$ при всех $(x,\omega_1) \in \overline{D}\times V_1$; $a \in C(\overline{D}\times V_2)$, $\Gamma : Q_T \to 2^V$ и $\Gamma_1 : D \to 2^{V_4}$ измеримы, $\varphi : D\times V_3 \to R$,

$\Psi : D \times V_4 \to R$, $f : Q_T \times (R \times V) \to R$. Кроме того f, φ и Ψ каратеодориевские функции и существуют функции $\lambda_1 \in L_2(D)$ и $\lambda_2 \in L_2(D)$, что $|\varphi(x,\cdot)|_{\sup} \le \ \le \lambda_1(x)$, $|\Psi(x,\cdot)|_{\sup} \le \lambda_2(x)$ (или $|\Psi(x,\omega)| \le \alpha_1(x) + c_1\|\omega\|$, где $\alpha_1 \in L_2(D)$, $c_1 \ge 0$).

Рассмотрим компактности множества решений задачи:

$$u_{tt} - div(k(x,\omega_1(x))\nabla u) + a(x,\omega_2(x))u = g(x,t) \qquad (1')$$

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x,\omega_3(x)), \quad u_t\Big|_{t=0} = \Psi(x,\omega_4(x)), \quad u|_{\Gamma_T} = 0 \ , \qquad (2')$$

где $g(\cdot) \in L_2(Q_T)$, $g(x,t) \in f(x,t,u(x,t),\Gamma(x,t))$, $\omega_i(\cdot) \in \{\omega_i \in A_i : \omega_i(x) \in V_i\}$, $\omega_4(x) \in \Gamma_1(x)$ и измеримо, $\varphi(\cdot,\omega_3(\cdot)) \in \overset{\circ}{H}{}^1(D)$.

Пусть $\overline{\lambda}_s$ и $\underline{\lambda}_s$ собственные значения первой краевой задачи в D для операторов $\overline{\mathrm{L}} = div(\overline{k}\nabla) - \overline{a}(x) = \overline{k}\Delta - \overline{a}(x)$ и $\underline{\mathrm{L}} = \underline{k}\Delta - \underline{a}(x)$ соответственно, где $\overline{k} = \max\{k(x,\omega) : (x,\omega) \in \overline{D} \times V_1\}$, $\underline{k} = \min\{k(x,\omega) : (x,\omega) \in \overline{D} \times V_1\}$, $\overline{a}(x) = = \max\limits_{\omega \in V_2} a(x,\omega)$, $\underline{a}(x) = \min\limits_{\omega \in V_2} a(x,\omega)$. Тогда в силу утверждения 2 теоремы 4.1.4 [4] для $s = 1, 2, \ldots$ имеют место $\overline{\lambda}_s \le \lambda_s \le \underline{\lambda}_s$, где λ_s собственные значения в D для оператора $\mathrm{L} = div(k(x,\omega_1(x))\nabla) - a(x,\omega_2(x))$. Поэтому аналогично теореме 5.2.2 [4] доказывается, что существует положительная постоянная $c = c(\overline{k}, \underline{k}, \overline{a}, \underline{a})$, которая не зависит от φ, Ψ и g, и что решение задачи (1),(2) удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{H^1(Q_T)} \le c\left(\|\varphi(\cdot,\omega_3(\cdot))\|_{H^1(D)} + \|\Psi(\cdot,\omega_4(\cdot))\|_{L_2(D)} + \|g(\cdot)\|_{L_2(Q_T)}\right).$$

Поэтому аналогичные теореме 1 и теореме 2 доказываются следующие теорема 1′ и теорема 2′.

Теорема 1'. *Пусть удовлетворяется условие теоремы 1 и множество $\Psi(x,\Gamma_1(x))$ выпукло. Тогда множество обобщенных решений задачи (1), (2) компактно $L_2(Q_T)$.*

Теорема 2'. *Пусть удовлетворяется условие теоремы 2, множество $\Psi(x,\Gamma_1(x))$ выпукло и последовательность управлений $\omega_n(x,t) \in L_2^k(Q_T)$ слабо сходится к $\omega(x,t) \in L_2^k(Q_T)$. Тогда существует подпоследовательность последовательности обобщенных решений $\{u_n\}$ задачи (1'), (2'), соответствующих последовательности управлений $\{\omega_{1n}(x), \omega_{2n}(x), \omega_{3n}(x), \omega_{4n}(x), \omega_n(x,t)\}$, сходится в L_2 к решению задачи (1'), (2').*

Пусть $a : [0,T] \times [0,S] \times R^n \to 2^{R^n}$ причем множества $a(\tau, \nu, z)$ компактны при всех (τ, ν, z), $\varphi(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,S]$, $\Psi(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,T]$. Функция $u \in \in \{u \in C^n([0,T] \times [0,S]) : u_{ts} \in L_1^n([0,T] \times [0,S])\}$, удовлетворяющая условиям

$$u_{ts}(\tau, \nu) \in a(\tau, \nu, u(\tau, \nu))$$
$$u(0,\nu) = \varphi(\nu), \quad u(\tau,0) = \Psi(\tau), \quad \varphi(0) = \Psi(0) \qquad (7)$$

называется решением задачи *(7)*. Отметим, что двух переменная функция $u(\cdot)$ называется абсолютно непрерывным в $[0,T]\times[0,S]$, если представляется в виде

$$u(t,s)=u(0,0)+\int_0^t \varphi_1(\tau)d\tau+\int_0^s \varphi_2(\nu)d\nu+\int_0^t\int_0^s q(\tau,\nu)d\tau d\nu \ ,$$

где $\varphi_1(\cdot)\in L_1^n[0,T]$, $\varphi_2(\cdot)\in L_1^n[0,S]$, $q(\cdot)\in L_1^n([0,T],[0,S])$. Легко проверяется, что решение задачи *(7)* абсолютно непрерывно. Далее предположим, что отображение $(\tau,\nu)\to a(\tau,\nu,z)$ измеримо, отображение $z\to a(\tau,\nu,z)$ полунепрерывно сверху. Предположим также, что

$$\|a(\tau,\nu,z)\|\le\alpha(\tau,\nu)+\beta\|z\| \ ,$$

где $\alpha(\cdot)\in L_1([0,T]\times[0,S])$, $\beta>0$. Обозначим

$$P(u)(\tau,\nu)=\{q(\tau,\nu)\in a(\tau,\nu,u(\tau,\nu)):q(\cdot)\in L_1^n([0,T]\times[0,S])\} .$$

Рассмотрим оператор

$$K(u)=\varphi(s)+\Psi(t)-\varphi(0)+\int_0^t\int_0^s p(u)(\tau,\nu)d\tau\, d\nu .$$

Лемма 1. *Задача (7) имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение следующее интегральное включение* $u\in K(u)$.

Лемма 2. *Множества решений задачи (7) относительно компактно в* $C^n([0,T]\times[0,S])$.

Доказательство. Сначала докажем ограниченность множества решений. Ясно,что

$$\|u(t,s)\|\le\|\varphi(s)-\varphi(0)\|+\|\Psi(t)\|+\int_0^t\int_0^s\|P(u)(\tau,\nu)\|d\tau\, d\nu\le$$

$$\le\|\varphi(\cdot)-\varphi(0)\|+\|\Psi(\cdot)\|+\int_0^t\int_0^s(\alpha(\tau,\nu)+\beta\|u(\tau,\nu)\|)d\tau d\nu \ .$$

Обозначив $c=\|\varphi(\cdot)-\varphi(0)\|+\|\Psi(\cdot)\|+\int_0^T\int_0^S\alpha(\tau,\nu)d\tau\, d\nu$ получим, что

$$\|u(t,s)\|\le c+\beta\int_0^t\int_0^s\|u(\tau,\nu)\|d\tau\, d\nu \ .$$

Применяя обобщенную лемму Гронуолла отсюда имеем, что

$$\|u(t,s)\|\le ce^{J_0(2i\sqrt{\beta ts})},$$

где $J_0(r)=1-\left(\frac{r}{2}\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^4-\frac{1}{(3!)^2}\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^6+\ldots$ функция Бесселя нулевого порядка. Ясно, что

$$\|u(\cdot)\|\le ce^{J_0(2i\sqrt{\beta TS})+1}=L \ . \qquad (8)$$

Теперь докажем равностепенную непрерывность множества решений. Пусть u является решением задачи *(7)* и (t_1,s_1), $(t_2,s_2)\in[0,T]\times[0,S]$. Тогда

$$\|u(t_1,s_1)-u(t_2,s_2)\| \le \|\varphi(s_1)-\varphi(s_2)\| + \|\Psi(t_1)-\Psi(t_2)\| + \left|\int_{t_1}^{t_2}\int_{s_1}^{s_2}\|P(u)(\tau,\nu)\|d\tau\, d\nu\right| \le$$

$$\le \|\varphi(s_1)-\varphi(s_2)\| + \|\Psi(t_1)-\Psi(t_2)\| + \left|\int_{t_1}^{t_2}\int_{s_1}^{s_2}\alpha(\tau,\nu)d\tau\, d\nu\right| + \beta L|(t_2-t_1)(s_2-s_1)|.$$

Используя абсолютную непрерывность интеграла Лебега отсюда легко получим, что множества решений задачи *(7)* равностепенно непрерывно. Таким образом, по теореме Арцела получим, что множества решений задачи *(7)* относительно компактно в $C^n([0,T]\times[0,S])$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть удовлетворяется вышесказанное условие. Кроме того множество* $a(\tau,\nu,z)$ *выпукло при всех* (τ,ν,z). *Тогда множество решений задачи (7) компактно в* $C^n([0,T]\times[0,S])$.

Доказательство. Пусть последовательность решений $\{u_k\}$ задачи *(7)* равномерно сходится к непрерывной функции $\bar{u}$. Покажем, что $\bar{u}$ также является решением задачи *(7)*.

Из оценки *(8)* получим, что $\|u_{k_{ts}}(\tau,\nu)\| \le \alpha(\tau,\nu)+\beta L$ для любого k. Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что $u_{k_{ts}}$ сходится к $w(t,s)$ в топологии $\sigma(L_2,L_2)$. По лемме Мазура найдется последовательность выпуклых комбинаций $\sum_{k=i}^{N}\alpha_k u_{k_{ts}}$ сходящихся к $w(t,s)$ в $L_2^n([0,T]\times[0,S])$. Используя связь между обобщенной производной Соболева и Шварца получим, что $w=\bar{u}_{ts}$. Тогда можно выбрать подпоследственность последовательности $\sum_{k=i}^{N}\alpha_k u_{k_{ts}}$, почти всюду сходящуюся к $\bar{u}_{ts}$. Поэтому для любого i

$$\bar{u}_{ts}(\tau,\nu)\in \overline{co}\{u_{k_{ts}}(\tau,\nu): k\ge i\}. \qquad (9)$$

Отсюда вытекает, что $\forall i\in N$

$$\bar{u}_{ts}(\tau,\nu)\in \overline{co}\bigcup_{k\ge i} a(\tau,\nu,u_k(\tau,\nu)), \quad (\tau,\nu)\in[0,T]\times[0,S].$$

Так как многозначное отображение a полунепрерывно сверху и u_k равномерно сходится к $\bar{u}$, то для любого $\varepsilon>0$ существует такое i, что

$$a(\tau,\nu,u_k(\tau,\nu))\subset a(\tau,\nu,\bar{u}(\tau,\nu))+\varepsilon B.$$

Ясно, что

$$\overline{co}\bigcup_{k\ge i} a(\tau,\nu,u_k(\tau,\nu))\subset a(\tau,\nu,\bar{u}(\tau,\nu))+\varepsilon B.$$

Поэтому из *(9)* вытекает, что

$$\bar{u}_{ts}(\tau,\nu)\in a(\tau,\nu,\bar{u}(\tau,\nu))+\varepsilon B.$$

Устремляя ε к нулю и учитывая, что $a(\tau,\nu,\bar{u}(\tau,\nu))$ замкнуто, получим

$$\bar{u}_{ts}(\tau,\nu)\in a(\tau,\nu,\bar{u}(\tau,\nu))$$

$$u(0,\nu)=\varphi(\nu), \quad u(\tau,0)=\Psi(\tau), \quad \varphi(0)=\Psi(0).$$

Теорема доказана.

Отметим, что используя общие теоремы существования (см. [5,8-10]) при помощи полученных результатов легко получается существования решения (или обобщенного решения) соответственной задачи оптимального управления.

§3. Об обобщенного решения задачи оптимального управления.

Пусть D некоторая ограниченная область m-мерного пространства $R^m, V\subset R^k, T>0, Q_T=\{(x,t): x\in D, 0<t<T\}, D_0=\{(x,0): x\in D\}, k(\cdot)\in C^1(\overline{D})$, $a(\cdot)\in C(\overline{D}), k(x)\geq k_0>0$ и $f: Q_T\times R\times V\to R$. Через Γ_T обозначим боковую поверхность $\{(x,t): x\in\partial D,\ 0<t<T\}$ цилиндра Q_T.

Предположим, что состояние $u(x,t)$ определяется как решение задачи

$$u_{tt}-div(k(x)\nabla u)+a(x)u=g(x,t) \quad , \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi\,, \quad u_t\big|_{t=0}=\Psi\,, \quad u\big|_{\Gamma_T}=0 \quad , \tag{2}$$

где $g(\cdot)\in L_2(Q_T),\ g(x,t)\in f(x,t,u(x,t),V),\ \Psi\in L_2(D),\ \varphi\in \overset{\circ}{H}{}^1(D)$.

Рассмотрим минимизации среди всех решений задачи *(1)*, *(2)* функционала

$$\int_{Q_T} f_0(x,t,u(x,t),\omega(x,t))dxdt \quad , \tag{3}$$

где $\omega(x,t)\in V$, $\omega(\cdot)\in L_2^k(Q_T)$.

Если удовлетворяется условие теоремы 2.2, функция $z\to f_0(x,t,u,z)$ выпукло и удовлетворяет условию роста и из включения $g(x,t)\in$ $\in f(x,t,u(x,t),V)$, $g(\cdot)\in L_2(Q_T)$, вытекает, что $g(x,t)=f(x,t,u(x,t),\omega(x,t))$, где $\omega(\cdot)\in L_2(Q_T)$, $\omega(x,t)\in V$, то используя теорему 8.2.2 [8] можно показать существование решения задачи *(1)-(3)*. Если функция $z\to f_0(x,t,u,z)$ не выпукло, то в общем случае не существует решения задачи *(1)-(3)*.

Пусть $|f(x,t,u,\omega)|\leq\alpha(x,t)+c_0(|u|+|\omega|)$, $|f_0(x,t,u,\omega)|\leq\alpha_1(x,t)+$ $+c_1(|u|^2+|\omega|^2)$, где $\alpha(\cdot)\in L_2(Q_T),\ \alpha_1(\cdot)\in L_1(Q_T)$. Положив $E=L_2^k(Q_T)$, $\Psi(x,\omega)=\begin{cases}0,\ \omega\in V\\ +\infty,\ \omega\notin V\end{cases}$, $G=Q_T$ рассмотрим пространство $M_2(\Psi,\mathrm{E})$. Ясно, что функции

$$\bar{f}(x,t,u,\omega)=\begin{cases}f(x,t,u,\omega), & \omega\in V,\\ +\infty, & \omega\notin V,\end{cases} \qquad \bar{f}_0(x,t,u,\omega)=\begin{cases}f_0(x,t,u,\omega), & \omega\in V,\\ +\infty, & \omega\notin V.\end{cases}$$

принадлежат пространству $M_2(\Psi,\mathrm{E})$. Положим $B=\overline{co}\{v_u : u\in S(\Psi,\mathrm{E})\}$.

Множество всех $(u,v)\in H^1(Q_T)\times B$, удовлетворяющие условию $u\big|_{t=0}=\varphi$, $u\big|_{\Gamma_T}=0$ и тождеству

$$\int_{Q_T}(k\nabla u\nabla\vartheta+au\vartheta-u_t\vartheta_t)dxdt=\int_{D_0}\Psi\vartheta dx+\nu(\vartheta(x,t)\cdot\bar f(x,t,u(x,t),\cdot))\qquad(4)$$

при всех $\vartheta\in H^1(Q_T)$, $\vartheta|_{D_T}=0$ обозначим через C.

Лемма 1. *Пусть функция* $(x,t)\to f(x,t,u,\omega)$ *измерима, функция* $(u,\omega)\to f(x,t,u,\omega)$ *непрерывна,* $|f(x,t,u,\omega)|\le\alpha(x,t)+\frac{1}{\sqrt{3c}}(|u|+|\omega|)$, *где* c *удовлетворяет неравенству (4),* $\alpha(\cdot)\in L_2(Q_T)$ *и последовательность* $\nu_n\in B$ *сходится к* $\bar\nu$ *в* $M_2^*(\Psi,\mathrm{E})$.

Тогда последовательность обобщенных решений $\{u_n\}$ задачи *(4)*, соответствующих $\bar\nu_n$ сходится к решению *(4)* соответствующих $\bar\nu$.

Рассмотрим задачу

$$\inf\{\nu\bar f_o(x,t,u(x,t),\cdot):(u,\nu)\in C\}\qquad(5)$$

Теорема 1. *Пусть* $(x,t)\to f(x,t,u,\omega)$ *измерима, функция* $(u,\omega)\to f(x,t,u,\omega)$ *непрерывна,* $|f(x,t,u,\omega)|\le\alpha(x,t)+\frac{1}{\sqrt{3c}}(|u|+|\omega|)$, $\alpha(\cdot)\in L_2(Q_T)$, $(x,t)\to f_0(x,t,u,\omega)$ *измерима, функция* $(u,\omega)\to f(x,t,u,\omega)$ *непрерывна,* $|f_0(x,t,u,\omega)|\le\alpha_1(x,t)+c_1(|u|^2+|\omega|^2)$, $c_1\ge0$; $\alpha_1(\cdot)\in L_1(Q_T)$, $k(\cdot)\in C^1(\bar D)$, $a(\cdot)\in C(\bar D)$, $k(x)\ge k_0>0$. *Кроме того пусть существует функция* $\varphi_1:Q_T\times R^k\to R\cup\{+\infty\}$, *где* $\int_{Q_T}\varphi_1(x,t,\omega(x,t))dxdt\to+\infty$ *при* $\|\omega\|_2\to+\infty$ *такая, что* $\varphi_1(x,t,\omega)\le f_0(x,t,u,\omega)$.

Тогда задача *(1)-(3)* и задача *(5)* имеют одинаковые значения. Задача *(5)* имеет решения: эти решения являются предельными точками в $L_2(Q_T)\times M_2^*(\Psi,\mathrm{E})$ последовательностей $\{(u_j,\nu_{\omega_j})\}$, где $\{(u_j,\omega_j)\}$ есть минимизирующие последовательности задачи *(1)-(3)*.

Так как по лемме 1.4 $cl\{\nu_u:u\in S(\Psi,\mathrm{E})\}=\overline{co}\{\nu_u:u\in S(\Psi,\mathrm{E})\}$, то справедливость теоремы 1 вытекает из теоремы 4.4.1. [9].

Аналогичные утверждения верны, когда управление входит и в начальные условия и $k(\cdot)$ и $a(\cdot)$, а также когда состояния задаются параболическими или эллиптическими уравнениями.

Отметим, что если для задачи оптимального управления с частными производными и измеримыми управлениями имеется коэрецитивная оценка, то необходимые условия экстремума в виде принципа максимума получаются из работы [11].

Литература

[1]. Садыгов М.А. *О существование минимизирующих обобщенных и приближенных решений.* –Деп. в ВИНИТИ, 15.07.1986, №5106-В 86, 17с.

[2]. Садыгов М.А. *Об обобщенных решениях задачи оптимизации.* Изв.АН Азерб. ССР, сер. физ.-тех. и матем. наук, 1988, №4, с.28-37.
[3]. Садыгов М.А. *Исследование негладких вариационных задач.* Баку, 1991, Препринт №379, 73с.
[4]. Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* М.: Наука, 1983.
[5]. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* М.: Наука, 1977, 624с.
[6]. Рихтмайер Р. *Принципы современной математической физики.* М.:Мир, 1982.
[7]. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. *Теория экстремальных задач.* М.:Наука, 1974, 479с.
[8]. Экеланд и., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы.* М.: Мир, 1979, 400с.
[9]. Садыгов М.А. *Экстремальные задачи для негладких систем.* Баку, 1996,148с.
[10]. Плотников В.И. *Теоремы существования оптимизирующих функций для оптимальных систем с распределенными параметрами.* Изв.АН СССР, сер. мат., 1970.
[11]. Плотников В.И. *Необходимые и достаточные условия оптимальности и условия единственности оптимизирующих функций для управляемых систем общего вида.* Изв. АН СССР, 1972, №3.

Sadıqov M.A.

OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNİN ÜMUMİLƏŞMİŞ HƏLLİNİN VARLIĞI HAQQINDA

İşdə optimal idarəetmə məsələsinin ümumiləşmiş həllinin varlığı öyrənilir.

Sadigov M.A.

ON THE EXISTENCE OF GENERALIZED SOLUTION FOR OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

In the paper the existence of generalized solution of optimal control problems is studied.