УДК 517.977

АГАЕВ Ф.М., ДЖУМШУДОВ Дж.С.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ И КОРРЕКТНОСТЬ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ.

Введение. Система теории термоупругости встречаются при решении различных практических задач. Вопросы идентификации объемных сил и плотности источников действующих в этих системах связаны с решением соответствующих вариационных задач.

В данной работе доказана теорема существования, найдены необходимое и достаточное условия оптимальности для задачи оптимального управления для линейной системы теории термоупругости. Указан вычислительный алгоритм решения этой задачи.

1. Постановка задачи. Пусть D есть n- мерное эвклидово пространство с достаточно гладкой границей Γ, ϑ- внешняя нормаль границы Γ, $t \in (0,t_1]$, t_1- заданное число,

$$\Omega_t \equiv DX(0,t), \quad \Omega \equiv \Omega_{t_1}, \quad S_t \equiv \Gamma X(0,t), \quad S \equiv S_{t_1}$$

Рассмотрим процесс описываемый следующей системой термоупругости

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[2\mu(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \lambda(x,t)\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial u_l}{\partial x_l} - \beta(x,t)T\right] -$$

$$-\sum_{j=1}^{3}(1-\delta_{ij})\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\mu(x,t)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] = \rho(x)F_i(x,t), \quad i=1,2,3, \qquad (1.1)$$

$$c(x)\frac{\partial T}{\partial t} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[a(x,t)\frac{\partial T}{\partial x_j}\right] + b(x,t)T = Q(x,t)$$

где $u_i = u_i(x,t), i = 1,2,3$- компоненты вектора смещения, $T = T(x,t)$- распределение температуры, δ_{ij}- символ Кронекера, $\rho, \mu, \lambda, \beta, c, a, b, F_2$, $i = 1,2,3$, Q- некоторые функции.

Пусть заданы начальные смещения, скорости и температура:

$$u_i(x,0) = \varphi_{0i}(x), \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}(x,0) = \varphi_{1i}(x), \quad i = 1,2,3$$

$$T(x,0) = \varphi(0), \quad x \in \overline{D}, \qquad (1.2)$$

а также приложенные силы на поверхности тела и поток тепла через границу

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}\mu(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\cos(\vartheta,x_j)\Big|_S = g_i(x,t), \quad i=1,2,3 \\ &\sum_{j=1}^{3}a\frac{\partial T}{\partial x_i}\cos(\vartheta,x_i)\Big|_S = g_0(x,t), \quad (x,t)\in S, \end{aligned} \qquad (1.3)$$

ϑ - внешняя нормаль к границе Γ. Функциональные пространства $V_2^{1,0}(\Omega)$, $W_\rho^k(D)$,

$$W_p^{k,m}(\Omega),\quad W_p^k(\Gamma),\quad W_p^{k,m}(S),\quad L_p(D),\quad L_p(\Omega),\quad p\ge 1,\quad k,\quad m\ge 0,$$

которые ниже используются определены, например, в [5] и др. Через $L_p^{(m)}(D)$ обозначим пространство измеримых m- мерных вектор функций суммируемых со степенью $p\ge 1$ и норму элемента $\vartheta=(\vartheta_1,\vartheta_2,\ldots,\vartheta_m)$ в этом пространстве определим по формуле

$$\|\vartheta\|_{L_p^{(m)}(D)} = \left\{\sum_{i=1}^{m}\int_D |\vartheta_i(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad p\ge 1.$$

Далее, положительные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин обозначим через $C_0, C_1, C_2, \ldots$. Примем также следующие обозначения. Пусть $\vartheta=(\vartheta_0,\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3)$, $\vartheta_0=\vartheta_0(x,t)=Q(x,t)$, $\vartheta_i=\vartheta_i(x,t)=F_i(x,t)$, $i=1,2,3$. Введем в рассмотрение функционал

$$J_0(\vartheta)=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\int_S\left[u_i(x,t)-\bar f_i(x,t)\right]^2dxdt+\alpha_0\int_S\left[T(x,t)-\bar f_0(x,t)\right]^2dxdt, \qquad (1.4)$$

где $u=(u_1,u_2,u_3)$, T - такие, что $u_i\equiv u_i(x,t)\in W_2^{1,1}(\Omega)$, $T\equiv T(x,t)\in W_2^{1,1/2}(\Omega)$, удовлетворяют условию $u_i|_{t=0}=\varphi_{0i}(x)$ и интегральным тождествам

$$\begin{aligned} &\int_\Omega\left\{-\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}\delta_{i,j}\left[2\mu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\lambda\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}-\beta T\right]\frac{\partial\eta_i}{\partial x_i}+\right.\\ &\left.+\sum_{j=1}^{3}(1-\delta_{ij})\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\eta_i}{\partial x_i}-\rho F_i\eta_i\right\}dxdt=\int_D\varphi_{1i}(x)\rho(x)\eta_i(x,0)dx+\\ &\qquad+\int_S g_i(x,t)\eta_i(x,t)dxdt, \quad i=1,2,3, \end{aligned} \qquad (1.5)$$

$$\begin{aligned} &\int_\Omega\left[-cT\frac{\partial\eta_0}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}a\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial\eta_0}{\partial x_i}+bT\eta_0-Q\eta_0\right]dxdt=\\ &=\int_D\varphi(x)c(x)\eta_0(x,0)dx+\int_S g_0(x,t)\eta_0(x,t)dxdt, \end{aligned} \qquad (1.6)$$

для любых $\eta_i=\eta_i(x,t)\in W_2^{1,1}(\Omega)$, $\eta_i(x,t_1)=0$, $\alpha_i\ge 0$, $i=0,1,2,3$.

Пусть $\varphi_{0i}(x)\in W_2^1(D)$, $\varphi_{1i}(x)\in L_2(D)$, $i=1,2,3$, $\varphi(x)\in L_2(D)$,

$$F(x,t)\in L_2^{(3)}(\Omega),\ Q(x,t)\in L_2(\Omega),\ g_i(x,t)\in W_2^{1,1}(S),\ i=0,1,2,3.$$

Опираясь на результаты работ [5]-[6] для случая однородных граничных условий, нетрудно проверить существования и единственность решения прямой задачи *(1.1)-(1.3)* из классов

$$u_j(x,t)\in W_2^{1,1}\left(\Omega 1, \tfrac{1}{2}\to\Omega\right),\ j=1,2,3,(\Omega),\quad T(x,t)\in W_2^{1,\frac{1}{2}}(\Omega).$$

Если $g_i(x,t)\equiv 0, i=\overline{0,3}$, то верны следующие оценки для решения этих задач:

$$\|u_j\|_{W_2^{1,1}(\Omega)}\le C_1\left[\sum_{j=1}^{3}\left(\|F_j\|_{L_2(\Omega)}+\|\varphi_{0j}\|_{W_2^1(D)}+\|\varphi_{1j}\|_{L_2(D)}\right)+\|Q\|_{L_2(\Omega)}+\|\varphi\|_{L_2(\Omega)}\right],$$

$$\|T\|_{W_2^{1,\frac{1}{2}}}\le C_2\left(\|Q\|_{L_2(\Omega)}+\|\varphi\|_{L_2(D)}\right).$$

Действительно, если функций $h(x,t)=(h_1(x,t),h_2(x,t),h_3(x,t))$, предположить достаточно гладкими, тогда неоднородные граничные условия, заменой могут быть сведены к соответствующим однородным граничным условиям.

Пусть $g_i\in W_2^{1/2,1/4}(S), i=\overline{0,3}$. После замены $Y=u-z, W=T-\theta$ - где функции $z=(z_1,z_2,z_3)$ и θ удовлетворяют граничным условиям:

$$\left.\sum_{i=1}^{3}\delta_{ij}(\mu,\lambda,z)n_i\right|_S=g_i(x,t),\ (x,t)\in S,\ j=1,2,3,$$

$$\left.\sum_{i=1}^{3}a\frac{\partial\theta}{\partial x_i}n_i\right|_S=g_0(x,t),\ (x,t)\in S$$

для функции $Y=Y(x,t), W=W(x,t)$- получим уравнения с однородными граничными условиями [6]. Здесь тензор напряжения соответствующий тензору деформации z_{ij} - обозначен через $\delta_{ij}(\mu,\lambda,z)$. Тогда при наложенных выше условиях существует единственное решение задачи *(1.1)-(1.3)* из класса функций $u_i(x,t)\in W_2^{1,1}(\Omega), T(x,t)\in W_2^{1,\frac{1}{2}}(\Omega)$ и верны следующие оценки

$$\|u_j\|_{W_2^{1,1}(\Omega)}\le C_3\left[\sum_{j=1}^{3}\left(\|F_i\|_{L_2(\Omega)}+\|\varphi_{0i}\|_{W_2^1(D)}+\|\varphi_{1i}\|_{L_2(D)}\right)+\|Q\|_{L_2(\Omega)}+\right.$$

$$\left.+\|\varphi\|_{L_2(D)}+\sum_{i=0}^{3}\|g_i\|_{W_2^{1/2,1/4}(S)}\right],\quad j=1,2,3 \qquad (1.7)$$

$$\|T\|_{W_2^{1,\frac{1}{2}}}\le C_4\left(\|Q\|_{L_2(\Omega)}+\|\varphi\|_{L_2(D)}+\|g_0\|_{W_2^{1/2,1/4}(S)}\right) \qquad (1.8)$$

где положительные постоянные C_3, C_4 определяются входными данными в постановке исходной задачи.

2. Редукция задачи к минимизации квадратичного функционала. Пусть

$$V=\left\{\vartheta=(\vartheta_0,\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3),\ \vartheta_i=\vartheta_i(x,t)\in L_2(\Omega), |\vartheta_i(x,t)|\le 1,\ i=1,2,3,\forall(x,t)\in\Omega\right\},$$

$$g=(g_0,g_1,g_2,g_3), U\equiv(T,u)=(T,u_1,u_2,u_3)=(U_0,U_1,U_2,U_3),$$

$$\bar f=(\bar f_0,\bar f_1,\bar f_2,\bar f_3)$$

Пусть $g \in W_2^{1/2,1/2}(S)$, тогда

$$u_i \in W_2^{1,1}(\Omega), \quad T \in W_2^{1,\frac{1}{2}}(\Omega),$$

при заданном $v \in V$.

Очевидно, что U зависит линейно от ϑ: $U = A\vartheta + U_0$, где A - линейный оператор, U_0 - заданная вектор-функция, определяемая лишь вектор функцией g.

Если $g = 0$, тогда $U_0 = 0$. Из оценки $\|U\|_{L_2^{(4)}(\Omega)} \le C\|v\|_{L_2^{(4)}(\Omega)}$ при $g = 0$ следует ограниченность оператора A. Пусть $U = U(x,t) = A\vartheta + U_0$. Подставим это выражение в функционал *(1.4)*, тогда получим

$$J_0(\vartheta) = \|B\vartheta - f_1\|^2, \tag{2.1}$$

где

$$B\vartheta = A\vartheta\Big|_S,\ f_1 = \bar{f} + U_0\Big|_S,\ \|B\vartheta - f_1\|^2 = \sum_{i=0}^{3}\alpha_i\left\|(B\vartheta - f_1)_i\right\|^2_{L_2^{(4)}(S)}$$

Таким образом, задача сводится к задаче минимизации квадратичного функционала *(2.1)* в пространстве $L_2^{(4)}(S)$.

При этом оператор B является линейным ограниченным опреатором. Следуя методике работы [2, 3], задачу оптимального управления *(1.4)-(1.6)* изучим с помощью минимизации функционала *(2.1)*.

Функционал $J_0(\vartheta)$ является выпуклым функционалом. Приращение этого функционала может быть представлено в виде

$$J_0(\vartheta + h) - J_0(v) = \|B(\vartheta + h) - f_1\|^2 - \|B\vartheta - f_1\|^2 =$$
$$= 2(B\vartheta - f_1,\, Bh)_{L_2^{(4)}(s)} + (Bh,\, Bh)_{L_2^{(4)}(s)},\ \vartheta + h, \quad \vartheta \in V.$$

Из этого представления и из *(2.1)* следует, что $J_0(\vartheta)$ - дважды непрерывно-дифферентируемый функционал. Первый дифференциал функсионала $J_0(\vartheta)$ имеет вид

$$(J_0'(\vartheta), h) \equiv 2(B\vartheta - f_1, Bh),\ \vartheta, \quad \vartheta + h \in V \tag{2.2}$$

Если воспользоваться оператором B^*, сопряженным с B, то

$$(J_0'(\vartheta), h) \equiv 2(B^*(B\vartheta - f_1), h).$$

Следовательно, градиент функсионала $J_0(\vartheta)$ выражается формулой

$$J_0'(\vartheta) \equiv 2B^*(B\vartheta - f_1), \quad \vartheta \in V, \tag{2.3}$$

а вторая вариация представима в виде

$$\frac{1}{2}(J_0''(\vartheta)h, h)_{L_2^{(4)}(s)} \equiv (Bh, Bh)_{L_2^{(4)}(s)} \equiv (B^*Bh, h)_{L_2^{(4)}(s)},$$

то есть второе производное от $J_0(\vartheta)$ имеет вид $J_0''(\vartheta) \equiv B^*B$, а также является линейным и ограниченным оператором. Из *(2.3)* следует, что $J_0'(\vartheta)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\left\| J(\overline{\vartheta}) - J(\vartheta) \right\| \le 2\|B\|^2 \left\| \overline{\vartheta} - \vartheta \right\|.$$

Из теоремы доказанной ([2], с.28) следует, что для достижения функционалом *(2.1)* своей нижней грани, на выпуклом множестве V в точке $\vartheta^* \in V$. Необходимо и достаточно, чтобы

$$\left(J'(\vartheta^*), \vartheta - \vartheta^* \right) \ge 0 \text{ при всех } \vartheta \in V. \qquad (2.4)$$

$L_2(D)$- равномерно выпуклое пространство [4]. Если V - выпуклое замкнутое ограниченное множество, то $J_0(\vartheta)$ достигает на V своей нижней грани, хотя бы в одной точке $\vartheta^* \in V$. Этот факт следует из обобщённой теоремы Вейерштрасса доказанной, например, в [2].

Справедлива формула

$$\Psi(\alpha) \equiv J_0(\vartheta + \alpha h) - J_0(\vartheta)$$
$$\Psi(\alpha) \equiv J_0(\vartheta + \alpha h) = J_0(\vartheta) 2\alpha (B\vartheta - f_1, Bh)_{L_2^{(4)}(S)} + \alpha^2 \|Bh\|^2, \qquad (2.5)$$

$\vartheta,\ \vartheta + \alpha h \in V,\ \alpha \in (-\infty, \infty)$ которая получается из *(2.2)* при замене h на αh. Если $\|Bh\| \ne 0$, то $\Psi(\alpha)$ представляет собой квадратный трехчлен переменной α, $-\infty < \alpha < +\infty$, досатигает своего минимума в точке

$$\alpha^* = \alpha^*(\vartheta, h) = -\frac{(J'(\vartheta), h)_{L_2^{(4)}(S)}}{2\|Bh\|^2} \qquad (2.6)$$

Тогда из *(2.2)* имеем

$$\alpha^* = \frac{(B^* B\vartheta - f_1, h)_{L_2^{(4)}(S)}}{\|Bh\|^2}.$$

Это выражение используется в методике наискорейшего спуска.

3. Приближенное решение задачи *(2.1)* методом скорейшего спуска. Допустим, что $V \equiv L_2^{(4)}(S)$ для приближенного решения задачи *(2.1)* может быть использован метод скорейшего спуска. Это приводит к последовательности

$$\vartheta_{n+1} = \vartheta_n - \alpha_n J_0'(\vartheta_n), \quad n = 0,1,\ldots \qquad (3.1)$$

причем параметр $\alpha_n \ge 0$, определяемый из условия

$$\min_{\alpha \ge 0} \Psi_n(\alpha) = \Psi_n(\alpha_n), \quad \Psi_n(\alpha) \equiv J_0({}_n - \alpha J_0'(\vartheta_n)).$$

Здесь выражение для α_n^* может быть выписан в явном виде, а именно

$$\Delta J_0(\vartheta_n - \alpha J_0'(\vartheta_n)) \equiv J_0(\vartheta_n - \alpha J_0'(\vartheta_n)) - J_0(\vartheta_n) \ne 0,$$

Согласно формулам *(2.5)*, *(2.6)* $\Psi_n(\alpha)$ достигает своего минимума при $\alpha =$ $= \alpha_n^* = \alpha(\vartheta_n, J'(\vartheta_n)) = \frac{1}{2}\|J_0'(\vartheta_n)\|^2 \|BJ_0'(\vartheta_n)\|^{-2} \ge 0$. Если $\alpha_n^* = 0$, то $J_0'(\vartheta_n) = 0$ и в силу *(2.4)* $\vartheta_n = \vartheta^*$ есть точка минимума $J_0(\vartheta)$ и процесс (3.1) на этом заканчивается. Если же $\alpha_n^* > 0$, то в *(3.1)* принимает $\alpha_n = \alpha_n^*$ процесс продолжается дальше. Сходимость метода следует из теоремы доказанной в работе [3] (теорема 5.4.1). Если же $V \neq L_2^{(4)}(\Omega)$, тогда принимается метод проекции градиента и каждый шаг итерационного процесса *(3.1)* проектируется на V.

4. Приближенное решение задачи *(2.1)* методом условного градиента. Известно, что метод условного градиента широко применяется для решения задач оптимального управления на условный экстремум.

Остановимся на одном варианте метода условного градиента для задачи *(2.1)*, когда V - выпуклое замкнутое ограниченное множество в $L_2(\Omega)$. В этом случае из теоремы 5.4.1. [3] следует существование хотя бы одного элемента $\vartheta \in V$, для которого $J_0(\vartheta^*) = \inf\limits_V J_0(\vartheta) = J_0^*$. Пусть ϑ_n $n \geq 0$ известно. Тогда $\overline{\vartheta_n} \in V$, $J_n(\vartheta) = \min\limits_{\vartheta \in V} J_{0n}(\vartheta)$, где $J_{0n}(\vartheta) = (J_0'(\vartheta_n), \vartheta - \vartheta_n)$.

С учетом *(2.2)* это соотношение перепишется в виде

$$\min_{\vartheta \in V}\left(J'(\vartheta_n), \overline{\vartheta_n} - \vartheta_n\right) \equiv \min_{\vartheta \in V}\left(2B^*(B\vartheta_n - f_1), \overline{\vartheta_n} - \vartheta_n\right) =$$

$$= \min_{\vartheta \in V}\left(2B^*(B\vartheta_n - f_1), \vartheta - \vartheta_n\right) \qquad (4.1)$$

Существование такого ϑ_n следует из теоремы 5.4.1. [3]. После этого получаем $\vartheta_{n+1} = \vartheta_n + \alpha_n\left(\overline{\vartheta_n} - \vartheta_n\right)$, где α_n, выбирается из условия $\alpha_n \in [0,1]$ и

$$\min \Psi_n(\alpha) = \Psi_n(\alpha_n), \quad \Psi_n(\alpha) \equiv J_0\left(\vartheta_n + \alpha\left(\overline{\vartheta_n} - \vartheta_n\right)\right)$$

Пользуясь формулами *(2.5)*, *(2.6)*, выпишем явное выражение для α_n. Пусть $\Psi_n(\alpha)$ достигает своего минимума при

$$\alpha_n^* = \alpha\left(\vartheta, \overline{\vartheta_n} - \vartheta_n\right) - \frac{\left(J_0'(\vartheta_n), \left(\overline{\vartheta_n} - \vartheta_n\right)\right)}{2\left\|B\left(\overline{\vartheta_n} - \vartheta_n\right)\right\|^2} \geq 0$$

Из теоремы 1.4.6. доказанной в работе [2] следует, что $\lim\limits_{n \to \infty} J_0(\vartheta_n) = J_0^*$. Неравенство $\leq J_0(\vartheta_n) - J_0^* \leq \left|J_{0n}(\vartheta_n)\right| \equiv \left(2B(B\vartheta_n - f_1), \overline{\vartheta_n} - \vartheta_n\right) \to 0 \quad (n \to \infty)$ является удобной апостериорной оценкой при практическом использовании метода условного градиента.

Литеретура

[1]. Тихонов А.М., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* М. 1977.
[2]. Васильев Ф.П. *Методы решения экстремальных задач.* М., 1981, с.400.
[3]. Васильев Ф.П. *Численные методы решения экстремальных задач.* М., 1980.
[4]. Иосида К. *Функциональный анализ.* М.: Мир, 1967, с. 624.
[5]. Ладыженская О.А. *Уравнения математической физики.*
[6]. Ладыженская О.А. и др. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* 1974.

Ağayev F.M., Cümşudov C.S.

XƏTTİ TERMOELASTİK SİSTEMİN OPTİMAL İDARƏ OLUNMASI MƏSƏ-LƏSİNİNKORREKTLİYİ VƏ TƏQRİBİ HƏLLİ

İşdə baxılan optimal idarəetmə məsələsi üçün qradientin proeksiyası üsuluna əsasən hesablama alqoritmi göstərilmişdirzəruri, kefi şərtlər və həllin varlığı haqqında teoremlər isbat olunmuşdur.

Agayev F.M., Jumshudov J.S.

APPROXIMATIVE SOLUTION AND CORRECTNESS OF OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR LINEAR SYSTEM OF HERMOELASTICITY

For considering problem approximative methods of solution and theorems of correctness are given.