1997 ТОМ VII (XV)

УДК 517.9

СУЛЕЙМАНОВ Н.С.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Как известно ([1]- [2]), подробно исследованы граничные задачи для уравнения эллиптического типа с различными локальными граничными условиями. Данная работа посвящена изучению задач типа Стеклова с нелокальными граничными условиями, где параметр входит лишь в граничное условие. Подобно работам [3] в данной работе сперва найдены необходимые условия разрешимости краевых задач. Исходя из заданных граничных условий, устраняются сингулярности в ядрах. Далее, объединяя полученные регулярные соотношения с заданными граничными условиями, доказывается фредгольмовость поставленных задач. На примере одной граничной задачи показывается самосопряженность поставленных задач.

Итак, рассматривается следующая граничная задача

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in D \subset R^2 \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{2}\left\{\sum_{j=1}^{2}\alpha_{ij}^{(k)}\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \left[\alpha_i^{(k)} + \lambda\,\alpha_{i0}^{(k)}\right]u(x)\right\}\Bigg|_{x_2=\gamma_k(x_1)} = 0 \tag{2}$$

где D - ограниченная область с границей Γ, $\overline{D} = D \cup \Gamma$, $\alpha_{ij}^{(k)}(x_1)$, $\alpha_i^{(k)}(x_1)$, $\alpha_{i0}^{(k)}$, $\gamma_k(x_1)$, $i, j, k = 1,2$ - заданные функции, λ-вообще говоря комплексный параметр.

Пусть выполняются следующие условия:

1^0. D- ограниченная область, граница Γ которой есть линия Ляпунова и каждая прямая параллельно к оси x_2 пересекает её границу не более чем в двух точках;

2^0. Коэффициенты в граничном условии *(2)* $\alpha_{ij}^{(k)}(x_1)$, $i, j, k = 1,2$, $x_1 \in (a_1, b_1)$ принадлежат некоторому классу Гельдера, $\alpha_i^{(k)}(x_1)$, $\alpha_{i0}^{(k)}(x_1)$ являются непрерывными функциями.

3^0. Пусть определитель

$$\Delta(x_1) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}^{(1)}(x_1) & \alpha_{11}^{(2)}(x_1) & \alpha_{12}^{(1)}(x_1) & \alpha_{12}^{(2)}(x_1) \\ \alpha_{21}^{(1)}(x_1) & \alpha_{21}^{(2)}(x_1) & \alpha_{22}^{(1)}(x_1) & \alpha_{22}^{(2)}(x_1) \\ -\alpha_{12}^{(1)}(x_1) & \alpha_{12}^{(2)}(x_1) & \alpha_{11}^{(1)}(x_1) & -\alpha_{11}^{(2)}(x_1) \\ -\alpha_{22}^{(1)}(x_1) & \alpha_{22}^{(2)}(x_1) & \alpha_{21}^{(1)}(x_1) & -\alpha_{21}^{(2)}(x_1) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3}$$

С помощью второй формулы Грина получается следующее представление решения

$$\int_\Gamma \left[\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}\cos(\nu,x_1)+\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}\cos(\nu,x_2)\right]u(x)dx-$$

$$-\int_\Gamma \left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\cos(\nu,x_1)+\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\cos(\nu,x_2)\right]U(x-\xi)dx=\begin{cases} u(\xi), & \xi\in D,\\ \dfrac{u(\xi)}{2}, & \xi\in\Gamma,\\ 0, & \xi\notin\overline{D}, \end{cases} \qquad (4)$$

где ν - внешняя нормаль к границе Γ.

Пользуясь формулой Остроградского- Гаусса подобные условия можно получить и для частной производной $\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_2}$.

$$\int_\Gamma \left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\cos(\nu,x_1)+\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\cos(\nu,x_2)\right]\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}dx-$$

$$-\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\cos(\nu,x_1)-\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\cos(\nu,x_2)\right]\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}dx=\begin{cases} \dfrac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}, & \xi\in D,\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}, & \xi\in\Gamma,\\ 0, & \xi\notin\overline{D}, \end{cases} \qquad (5)$$

$$\int_\Gamma \left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\cos(\nu,x_1)+\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\cos(\nu,x_2)\right]\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}dx-$$

$$-\int_\Gamma \left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\cos(\nu,x_2)-\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\cos(\nu,x_1)\right]\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}dx=\begin{cases} \dfrac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}, & \xi\in D,\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}, & \xi\in\Gamma,\\ 0, & \xi\notin\overline{D}, \end{cases} \qquad (6)$$

Теорема 1. *Пусть граница Γ ограниченной плоской области D - линия Ляпунова, тогда для каждой гармонической в области функции справедливо соотношение (4)- (6).*

В отличие от соотношения *(4)* выражения, полученные для прооизводных, т.е. *(5)* и *(6)*, содержит сингулярные интегралы. Выписывая необходимые условия разрешимости задачи *(1)- (2)* и после регуляризаций сингулярностей в возникающих ядрах имеем

$$\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}\right|_{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)}=\frac{(-1)^k}{\pi_1}\int_{a_1}^{b_1}\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=\gamma_k(x_1)}\frac{dx_1}{x_1-\xi_1}+F_{k1} \qquad (7)$$

$$\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}\right|_{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)}=\frac{(-1)^k}{\pi_1}\int_{a_1}^{b_1}\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right|_{x_2=\gamma_k(x_1)}\frac{dx_1}{x_1-\xi_1}+F_{k2} \qquad (8)$$

где F_{k1}, F_{k2} - сумма регулярных интегралов содержащих $\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}$ при $x_2 = \gamma_k(x_1)$, $k = 1,2$.

Как в работе [5], относительно неизвестных функций $\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right|_{\gamma_i}$, $\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right|_{\gamma_i}$, $u(x)|_{\gamma_i}$, $i = 1,2$ получается система интегральных уравнений Фредгольма второго рода, ядро которой содержит лишь слабую особенность. Эта система однородная и зависит от комплексного параметра λ. Тогда те значения λ, которые соответствуют ненулевому решению этой системы, дают нам собственные значения, а собственная функция получается из выражения *(4)* при $\xi \in D$.

Теорема 2. *При выполнении условий* 1^0 - 3^0 *граничная задача (1)- (2) является Фредгольмовой.*

Полученный аналитический вид дает возможность провести численный расчет для решений граничной задачи *(1)- (2)*. Построен эффективный вычислительный алгоритм для численного расчета как для собственных значений, так и собственной функции спектральной задачи *(1)- (2)*.

Схема построения сопряженного оператора и условия его самосопряженности, порожденные граничными задачами, соответствующими обыкновенному линейному дифференциальному уравнению подробно исследована [4]. Что касается многомерного аналога этого вопроса в классических работах ограничились только лишь перечислением некоторых самосопряженных задач, как первая, вторая и третья краевые задачи для уравнения эллиптического типа. Когда рассматривается многомерные граничные задачи с нелокальными граничными условиями, в работе [6] определен и построен сопряженный оператор, порожденный задачей Стеклова в ограниченной области, и условия самосопряженности. Здесь на примере одной граничной задачи показывается самосопряженность поставленных задач.

Пусть область $D \subset R^2$ является эллипс с уравнением

$$\frac{x_1^2}{m^2} + \frac{x_2^2}{n^2} = 1.$$

Тогда граница Γ_1 и Γ_2 области задаются соответственно уравнениями:

$$\Gamma_1 : x_2 = \gamma_1(x_1) = \frac{n}{m}\sqrt{m^2 - x_1^2} ;$$

$$\Gamma_2 : x_2 = \gamma_2(x_1) = -\frac{n}{m}\sqrt{m^2 - x_1^2} .$$

Теперь рассмотрим уравнение *(1)* со следующими нелокальными граничными условиями:

$$-\gamma_1'(x_1)\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\bigg|_{\gamma_1(x_1)}+\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\bigg|_{\gamma_1(x_1)}-c(x_1)\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\bigg|_{\gamma_2(x_1)}-c(x_1)\gamma_2'(x_1)\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\bigg|_{\gamma_2(x_1)}+$$

$$+\left(\alpha_1^{(1)}(x_1)+\lambda\alpha_{10}^{(1)}(x_1)\right)u(x_1,\gamma_1)+\left(\alpha_1^{(2)}(x_1)+\lambda\alpha_{10}^{(2)}(x_1)\right)u(x_1,\gamma_2)=0,$$

$$c(x_1)\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\bigg|_{\gamma_1(x_1)}+c(x_1)\gamma_1'(x_1)\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\bigg|_{\gamma_2(x_1)}+\gamma_2'(x_1)\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\bigg|_{\gamma_2(x_1)}-\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\bigg|_{\gamma_2(x_1)}+$$

$$+\left(\alpha_1^{(2)}(x_1)+c'(x_1)+\lambda\alpha_{10}^{(2)}(x_1)\right)u(x_1,\gamma_1)+\left(\alpha_2^{(2)}(x_1)+\lambda\alpha_{20}^{(2)}(x_1)\right)u(x_1,\gamma_2)=0.$$

После вычислений $R_i, K_i, M_i,\ i=1,4$ как в работе [6] легко видеть, что

$$R_1(x_1)=\frac{\gamma_1'(x_1)}{1+\gamma_1'^2(x_1)},\quad R_3(x_1)=\frac{c(x_1)}{1+\gamma_2'^2(x_1)},$$

$$R_2(x_1)=\frac{c(x_1)}{1+\gamma_1'^2(x_1)},\quad R_4(x_1)=\frac{\gamma_2'(x_1)}{1+\gamma_2'^2(x_1)},$$

$$K_1(x_1)=-\frac{\alpha_1^{(1)}(x_1)}{1+\gamma_1'^2(x_1)},\quad K_3(x_1)=\frac{\alpha_1^{(2)}(x_1)+c'(x_1)}{1+\gamma_2'^2(x_1)},$$

$$K_2(x_1)=-\frac{\alpha_1^{(2)}(x_1)}{1+\gamma_1'^2(x_1)},\quad K_4(x_1)=\frac{\alpha_2^{(2)}(x_1)}{1+\gamma_2'^2(x_1)},$$

$$M_1(x_1)=-\frac{\alpha_{10}^{(1)}(x_1)}{1+\gamma_1'^2(x_1)},\quad M_3(x_1)=\frac{\alpha_{10}^{(2)}(x_1)}{1+\gamma_2'^2(x_1)},$$

$$M_2(x_1)=-\frac{\alpha_{10}^{(2)}(x_1)}{1+\gamma_1'^2(x_1)},\quad M_4(x_1)=\frac{\alpha_{20}^{(2)}(x_1)}{1+\gamma_2'^2(x_1)}.$$

С помощью второй формулы Грина, как это делалось в работе [6], получим

$$(\Delta u,v)=A_1(m)-A_1(-m)+\int_{-m}^{m}\left\{\left[\frac{2\gamma_1'^2(x_1)\gamma_1''(x_1)}{1+\gamma_1'^2(x_1)}-\gamma_1''(x_1)+\left(1+\gamma_1'^2(x_1)\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{-2\gamma_1'^2\gamma_1''+\gamma_1''(1+\gamma_1'^2)}{(1+\gamma_1'^2)^2}+\frac{\alpha_1^{(1)}(x_1)}{1+\gamma_1'^2}+\lambda\frac{\alpha_{10}^{(1)}(x_1)}{1+\gamma_1'^2}\right)\right]v(x_1,\gamma_1)+$$

$$+\left[-2\gamma_2'\gamma_2''\frac{c(x_1)}{1+\gamma_2'^2(x_1)}-(1+\gamma_2'^2)\left(\frac{c'(x_1)(1+\gamma_2'^2)-2c(x_1)\gamma_2'\gamma_2''}{1+\gamma_2'^2(x_1)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\alpha_1^{(2)}(x_1)+c'(x_1)}{1+\gamma_2'^2}-\lambda\frac{\alpha_{10}^{(2)}(x_1)}{1+\gamma_2'^2}\right)\right]v(x_1,\gamma_2)-\gamma_1'(x_1)\frac{\partial v(x)}{\partial x_1}\bigg|_{\gamma_1}+\frac{\partial v(x)}{\partial x_2}\bigg|_{\gamma_1}-$$

$$\left.-c(x_1)\frac{\partial v(x)}{\partial x_1}\bigg|_{\gamma_2}-c(x_1)\gamma_2'\frac{\partial v(x)}{\partial x_2}\bigg|_{\gamma_2(x_1)}\right\}u(x_1,\gamma_1)dx_1+\int_{-m}^{m}\left[\frac{2c(x_1)\gamma_1'\gamma_1''}{1+\gamma_1'^2(x_1)}+(1+\gamma_1'^2)\times\right.$$

$$\times\left(\frac{c'(x_1)(1+\gamma_1'^2)-2c(x_1)\gamma_1'\gamma_1''}{(1+\gamma_1'^2)^2}+\frac{\alpha_1^{(2)}(x_1)}{1+\gamma_1'^2(x_1)}+\lambda\frac{\alpha_{10}^{(2)}(x_1)}{1+\gamma_1'^2(x_1)}\right)\Bigg]v(x_1,\gamma_1)+$$

$$+\Bigg[-2\gamma_2'\gamma_2''\frac{\gamma_2'(x_1)}{1+\gamma_2'^2(x_1)}+\gamma_2''-(1+\gamma_2'^2)\left(\frac{\gamma_2''(1+\gamma_2'^2)-2\gamma_2'^2\gamma_2''}{(1+\gamma_2'^2)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha_2^{(2)}(x_1)}{1+\gamma_2'^2}-\lambda\frac{\alpha_{20}^{(2)}(x_1)}{1+\gamma_2'^2}\right)\Bigg]v(x_1,\gamma_2)+c(x_1)\frac{\partial v(x)}{\partial x_1}\Bigg|_{\gamma_1}+c(x_1)\gamma_1'\frac{\partial v(x)}{\partial x_2}\Bigg|_{\gamma_1}+$$

$$+\gamma_2'(x_1)\frac{\partial v(x)}{\partial x_1}\Bigg|_{\gamma_2(x_1)}-\frac{\partial v(x)}{\partial x_2}\Bigg|_{\gamma_2}\Bigg\}u(x_1,\gamma_2)dx_1+\int_D u(x)\Delta v(x)dx,$$

где $A_1(m)$ и $A_1(-m)$ - внеинтегральные слагаемые.

Учитывая, что $\gamma_1(m)=\gamma_2(m)$ и $\gamma_1(-m)=\gamma_2(-m)$ и вычисляя внеинтегральные слагаемые получим $A_1(m)-A_1(-m)=0$, т.е.

$$(\Delta u,v)=\int_{-m}^{m}\Big[\big(\alpha_1^{(1)}(x_1)+\lambda\alpha_{10}^{(1)}(x_1)\big)v(x_1,\gamma_1)+\big(\alpha_1^{(2)}+\lambda\alpha_{10}^{(2)}\big)v(x_1,\gamma_2)-$$

$$-\gamma_1'\frac{\partial v(x)}{\partial x_1}\Bigg|_{\gamma_1(x_1)}+\frac{\partial v(x)}{\partial x_2}\Bigg|_{\gamma_1(x_1)}-c(x_1)\frac{\partial v(x)}{\partial x_1}\Bigg|_{\gamma_2(x_1)}-c(x_1)\gamma_2'\frac{\partial v(x)}{\partial x_2}\Bigg|_{\gamma_2}\Bigg]u(x_1,\gamma_1)dx_1+$$

$$+\int_{-m}^{m}\Big[\big(\alpha_1^{(2)}(x_1)+c'(x_1)+\lambda\alpha_{10}^{(2)}(x_1)\big)v(x_1,\gamma_1)+\big(\alpha_2^{(2)}(x_1)+\lambda\alpha_{20}^{(2)}(x_1)\big)v(x_1,\gamma_2)+$$

$$c(x_1)\frac{\partial v(x)}{\partial x_1}\Bigg|_{\gamma_1(x_1)}+c(x_1)\gamma_1'\frac{\partial v(x)}{\partial x_2}\Bigg|_{\gamma_1(x_1)}+\gamma_2'(x_1)\frac{\partial v(x)}{\partial x_1}\Bigg|_{\gamma_2(x_1)}-$$

$$-\frac{\partial v(x)}{\partial x_2}\Bigg|_{\gamma_2(x_1)}\Bigg]u(x_1,\gamma_2)dx+(u,\Delta v).$$

Отсюда следует, что для функций $u(x)$ и $v(x)$ имеет место

$$(\Delta u,v)=(u,\Delta v).$$

Заметим, что при доказательстве самосопряженности поставленных задач определители систем имеют вид:

$$\begin{vmatrix}\Delta(x_1)-H_{21}(x_1) & H_{11}(x_1) & 0 & 0\\ 0 & \Delta(x_1) & -H_{21}(x_1) & H_{11}(x_1)\\ -H_{22}(x_1) & H_{12}(x_1) & \Delta(x_1) & 0\\ 0 & 0 & -H_2(x_1) & \Delta(x_1)+H_{21}(x_1)\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix}H_{21}(x_1)-\Delta(x_1) & -H_{11}(x_1) & 0 & 0\\ H_{22}(x_1) & -H_{12}(x_1) & -\Delta(x_1) & 0\\ 0 & -\Delta(x_1) & H_{21}(x_1) & -H_{11}(x_1)\\ 0 & 0 & H_{22}(x_1) & -\Delta(x_1)-H_{12}(x_1)\end{vmatrix}=0,$$

где $H_{i1} = \left(1+\gamma_1'^2(x_1)\right)\left(\alpha_{i2}^{(2)}(x_1)-\alpha_{i1}^{(2)}\gamma_2'(x_1)\right),$

$$H_{i2} = \left(1+\gamma_2'^2(x_1)\right)\left(\alpha_{i2}^{(1)}(x_1)-\alpha_{i1}^{(1)}\gamma_1'(x_1)\right), \quad i=1,2.$$

Из-за громоздкости при больших индексах при вычислении интегралов и определителей создан пакет прикладных программ.

Литература

[1]. Бицадзе А.В. *Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка.* М., "Наука", 1966, с. 203.

[2]. Владимиров В.С. *Уравнение математической физики.* М., "Наука", 1981, с. 512.

[3]. АлиевН.А. *Об одной плоской задаче с перепутанными граничными условиями.* Диф. Уравнения с частными производными и их приложения. Баку, АГУ им. С.М. Кирова, 1983, с. 15-21.

[4]. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.*М, ГИТТЛ, 1954, с. 351.

[5]. Алиев Н.А., Сулейманов Н.С. *Исследованиерешения задачи типа Стеклова на ограниченной плоской области с общими линейными нелокальными граничными условиями.* Деп. В АзНИИНТИ от 3.03.89, №1223- 89, с. 30.

[6]. Сулейманов Н.С. *Об одной нелокальной задаче, содержащий параметр лишь в граничном условии.* Приближенные методы решения задач математической физики. Баку, БГУ им. М.А. Расулзаде, 1991, с. 72- 80.

Suleymanov N.S.

LAPLAS TƏNLİYİ ÜÇÜN BİR QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

Sərxəd şərtinə parametr daxil olan bir qeyri- lokal məsələyə baxılmışdır. Bu məsələ üçün zəruri şərtlərin alınması və fredholmluğu göstərilmişdir. Qoşmalıq və öz-özünə qoşmalıq şərti alınmışdır, müxtəlif oblastlarda inteqralların təqribi hesablanması üçün tətbiqi proqramlar paketi hazırlanmışdır.

Suleiymanov N.S.

ON A NON-LOCAL BOUNDARY-VALNE PROBLEM FOR THE LAPLACE OPERATOR

This work is devoted to the study of Steklov problem with common non- local boundary data in a bounded domain- ajoint boundary data and operator have been constructed, and a theorem proved on sufficient conditions for adjoint problem identification in a bounded domain.