УДК 517.948

ХАНМАМЕДОВ Аг.Х.

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ БЕСКОНЕЧНОГО ИНТЕРВАЛА

Обозначим через $l^2(-\infty,\infty)$ гильбертово пространство последовательностей $y=\{y_n\}_{-\infty}^{\infty}$ таких, что $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|y_n|^2<\infty$, со скалярным произведением

$$(x,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n\bar{y}_n \ .$$

На таких последовательностях определим оператор L, полагая

$$(Ly)_n=a_{n-1}y_{n-1}+b_ny_n+a_ny_{n+1}\ ,\quad n=0,\pm1,\pm2,\dots \qquad (1)$$

На коэффициенты a_n, b_n налагаются следующие условия

$$a_n>0;\ \operatorname{Im}b_n=0,\ n=0,\pm1,\dots\ ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(|a_n-c_1|+|b_n-m_1|\right)+\sum_{n=-\infty}^{-1}|n|\left(|a_n-c_2|+|b_n-m_2|\right)<\infty, \qquad (2)$$

где $c_1>0,\ c_2>0$.

Рассмотрим разностное уравнение

$$a_{n-1}y_{n-1}+b_ny_n+a_ny_{n+1}=\lambda y_n\ ,\ n=0,\pm1,\pm2,\dots\ , \qquad (3)$$

где λ комплексный параметр.

Пусть Γ_j - плоскость с разрезом по отрезку $[m_j-2c_j, m_j+2c_j]$, а $\partial\Gamma_j$ - её граница. Положим $z_j=\dfrac{\lambda-m_j}{2c_j}+\sqrt{\left(\dfrac{\lambda-m_j}{2c_j}\right)^2-1}$, выбирая ветвь корня в плоскости Γ_j такую, что $|z_j|\le1$ при $\lambda\in\Gamma_j$ $(j=1,2)$. Обозначим через $f_n(\lambda)$ и $g_n(\lambda)$ решения уравнения *(3)* с асимптотикой

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(\lambda)z_1^{-n}=1\ ,\quad \lim_{n\to-\infty}g_n(\lambda)z_2^{n}=1\ .$$

При условии *(2)* решения $f_n(\lambda)$ и $g_n(\lambda)$ существуют и оказываются регулярными функциями λ при $\lambda\in\Gamma_1$ и $\lambda\in\Gamma_2$ соответственно. Справедливы представления с помощью операторов преобразования (см. настоящий сборник)

$$f_n(\lambda)=\alpha_nz_1^n\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}z_1^m\right);\quad g_n(\lambda)=\beta_nz_2^{-n}\left(1+\sum_{m=-\infty}^{-1}B_{nm}z_2^{-m}\right),$$

причём величины $\alpha_n, A_{nm}, \beta_n, B_{nm}$ коэффициенты a_n, b_n уравнения *(3)* связаны равенствами

$$\left(\frac{a_n}{c_1}\right)^2=\frac{\alpha_{n+1}^2}{\alpha_n^2}=1+A_{n1}-A_{n-1,2}+\left(A_{n1}-A_{n-1,1}\right)A_{n1}=$$

$$=\frac{\beta_n^2}{\beta_{n+1}^2}=1+B_{n+1,-2}-B_{n+2,\,2}-\left(B_{n+1,-1}-B_{n+2,-1}\right)B_{n+1,-1}$$

$$b_n=m_1+c_1\left(A_{n1}-A_{n-1,1}\right)=m_2+c_2\left(B_{n,-1}-B_{n+1,-1}\right).$$

Легко доказывается, что функции $\overline{f_n(\lambda)}$ и $\overline{g_n(\lambda)}$ также являются решениями уравнения *(3)* при $\lambda\in\Gamma_1$ и $\lambda\in\Gamma_2$ соответственно, причём справедливы разложения

$$g_n(\lambda)=a_1(\lambda)\overline{f_n(\lambda)}+b_1(\lambda)f_n(\lambda),\quad \lambda\in\partial\Gamma_1\setminus\{m_1\pm2c_1\}\ ,$$

$$f_n(\lambda)=a_2(\lambda)\overline{g_n(\lambda)}+b_2(\lambda)g_n(\lambda),\quad \lambda\in\partial\Gamma_2\setminus\{m_2\pm2c_2\}\ .$$

Коэффициенты $a_1(\lambda)$ и $a_2(\lambda)$ являются предельными значениями функций, регулярных в плоскости с разрезами по отрезкам $[m_1-2c_1,\,m_1+2c_1]$ и $[m_2-2c_2,\,m_2+2c_2]$, и там могут иметь конечное число совпадающих простых вещественных нулей λ_k, $k=1,\dots,N(\lambda_k\notin[m_1-2c_1,$ $m_1+2c_1]\cup[m_2-2c_2,m_2+2c_2])$.

Введём обозначения

$$m_k^{(1)}=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n^2(\lambda_k)\right)^{-1};\quad m_k^{(2)}=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}g_n^2(\lambda_k)\right)^{-1},\quad k=1,\dots,N\,,$$

$$W[f_n,g_n]=a_n[f_ng_{n+1}-f_{n+1}g_n]\ .$$

Теорема 1. *При* $\lambda_k\notin[m_j-2c_j,m_j+2c_j]\,(j=1,2)$ *и* $\lambda\neq\lambda_k$ $k=1,\dots,N$ *функции*

$$R_{nm}(\lambda)=\begin{cases}-\dfrac{f_m(\lambda)g_n(\lambda)}{W[f_n(\lambda),g_n(\lambda)]} & \text{при } n\le m\\ -\dfrac{f_n(\lambda)g_m(\lambda)}{W[f_n(\lambda),g_n(\lambda)]} & \text{при } n>m\end{cases};\qquad n,m=0,\pm2,\dots\ .$$

являются элементами матрицы резольвенты оператора L *и удовлетворяют уравнениям*

$$a_{n-1}R_{n-1,m}+b_nR_{nm}+a_nR_{n+1,m}-\lambda R_{nm}=\delta_{nm}\ ,$$

где δ_{nm} *- символ Кронекера.*

Лемма. *Пусть* $h=\{h_n\}_{-\infty}^{\infty}$ *произвольная финитная последовательность. Тогда при* $\lambda\to\infty$ *имеет место формула*

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_{nm}(\lambda)h_m=-\frac{h_n}{\lambda}+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),\quad n=0,\pm1,\dots\ .$$

Нетрудно видеть, что $\left\{\frac{f_n(\lambda)}{a_2(\lambda)}\right\}_{-\infty}^{\infty}$, $\left\{\frac{g_n(\lambda)}{a_1(\lambda)}\right\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{f_n(\lambda_j)\}_{-\infty}^{\infty}$ и $\{g_n(\lambda_j)\}_{-\infty}^{\infty}$, $j=1,\ldots,N$ являются ограниченными решениями уравнения *(3)*. Используя леммы, методом контурного интегрирования доказывается, что они образуют полный набор нормированных собственных векторов этого уравнения.

Теорема 2. *Имеют место формулы разложения*

$$\frac{i}{2\pi c_1}\int_{\partial\Gamma_1}\frac{f_n(\lambda)}{z_1-z_1^{-1}}\left[\overline{f_m(\lambda)}+\frac{b_1(\lambda)}{a_1(\lambda)}f_m(\lambda)\right]d\lambda+\sum_{j=1}^{N}m_j^{(1)}f_n(\lambda_j)f_m(\lambda_j)+$$

$$+\frac{i}{2\pi c_2}\int_{\partial\Gamma\setminus\partial\Gamma_1}\frac{g_m(\lambda)}{z_2-z_2^{-1}}\left[\overline{g_n(\lambda)}+\frac{b_2(\lambda)}{a_2(\lambda)}g_n(\lambda)\right]d\lambda=\delta_{nm},$$

$$\frac{i}{2\pi c_2}\int_{\partial\Gamma_2}\frac{f_n(\lambda)}{z_2-z_2^{-1}}\left[\overline{g_n(\lambda)}+\frac{b_2(\lambda)}{a_2(\lambda)}g_n(\lambda)\right]d\lambda+\sum_{j=1}^{N}m_j^{(2)}g_n(\lambda_j)g_m(\lambda_j)+$$

$$+\frac{i}{2\pi c_1}\int_{\partial\Gamma\setminus\partial\Gamma_2}\frac{f_n(\lambda)}{z_1-z_1^{-1}}\left[\overline{f_m(\lambda)}+\frac{b_1(\lambda)}{a_1(\lambda)}f_m(\lambda)\right]d\lambda=\delta_{nm},$$

где $\partial\Gamma=\partial\Gamma_1\bigcup\partial\Gamma_2$.

Из теоремы 1,2 вытекает следующая

Теорема 3. *При условии (2) оператор* L *имеет непрерывный спектр, заполняющий сегменты* $[m_1-2c_1, m_1+2c_1]$ *и* $[m_2-2c_2, m_2+2c_2]$. *Кроме того, оператор* L *может иметь конечное число простых собственных значений, лежащих вне непрерывного спектра.*

Литература

[1]. Гусейнов Г.Ш. *Обратная задача теории рассеяния для разностного уравнения второго порядка на всей оси.* ДАН СССР, 1976, т.231, №5, с.1045-1048.

Xanməmmədov Aq.X. **SONSUZ İNTERVAL HALINDA İKİNCİ TƏRTİB FƏRQ OPERATORUNUN MƏXSUSİ FUNKSİYALAR ÜZRƏ AYRILIŞI**

Məqalədə ikinci tərtib fərq operatorunun məxsusi funksiyaları üçün ayrılış düsturları alınmışdır.

Khanmamedov Ag.Kh. **EXPANSION FOR EIQENFUNETIONS OF SECOND ORDER DIFFERENCO OPERATOR IN CASE OF AN INFINITE INTERVAL**

In this paper we have proved an expansion formula for eigenfunctions of a second-order difference operator defined on an infinite interval.