УДК 517.977

ЮСУБОВ Ш.Ш.

РАЗРЕШИМОСТЬ И СТРУКТУРА РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В работе приводятся необходимые и достаточные условия разрешимости, а также исследуется структура решения некоторой краевой задачи для линейного гиперболического уравнения.

Рассмотрим краевую задачу

$$z_{tx} = a(t,x)z_t + b(t,x)z_x + c(t,x)z + \varphi^0(t,x),\ (t,x)\in D = [0,T]\times[0,X]\ ,$$
$$z_t(t,0) = a_1(t)z(t,0) + \varphi_1(t),\ t\in[0,T] = D_T\ ,$$
$$z_x(0,x) = a_2(x)z(0,x) + \varphi_2(x),\ x\in[0,X] = D_X\ , \tag{1}$$
$$lz = \varphi_0\ , \tag{2}$$

где $a(t,x), b(t,x), c(t,x), a_1(t), a_2(x)$- $n\times n$ мерные вещественные матриц-функции, $a, b, c\in C(D), a_1\in C(D_T), a_2\in C(D_X)$; $\varphi^0(t,x), \varphi_1(t), \varphi_2(x)$- n-мерные вектор столбцы из класса $C(D), C(D_T), C(D_X)$- соответственно; $z =$ $= z(t,x) = (z_1(t,x),\dots,z_n(t,x))'$; φ_0- m- мерный постоянный вектор-столбец; l- линейный векторный функционал, определённый на пространстве n-мерных вектор-функций $z(t,x)\in C^{(1,1)}(D), l = (l_1,\dots,l_m)'$; $l: C^{(1,1)}(D)\to R_m$; $C^{(1,1)}(D)$- пространство n-мерных вектор-функций, имеющих непрерывные производные: z_t, z_x и z_{tx}; $(')$- означает транспонирование.

Наряду с неоднородной краевой задачей *(1)*, *(2)* рассмотрим однородную краевую задачу

$$z_{tx} = a(t,x)z_t + b(t,x)z_x + c(t,x)z\ ,$$
$$z_t(t,0) = a_1(t)z(t,0)\ , \tag{3}$$
$$z_x(0,x) = a_2(x)z(0,x)\ ,$$
$$l\,z = 0\ . \tag{4}$$

Введём обозначение

$$\left({}^{(i)}z_1,\dots,{}^{(i)}z_n\right)',\quad i = 1,2,\dots,n$$

и при помощи этих столбцов составим матрицу

$$\lambda_0(t,x) = \begin{pmatrix} {}^{(1)}z_1(t,x) & \dots & {}^{(n)}z_1(t,x) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}^{(1)}z_n(t,x) & \dots & {}^{(n)}z_n(t,x) \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Векторной системе *(3)* сопоставим матричную систему

$$\begin{aligned} &\lambda_{0_{tx}} = a(t,x)\lambda_{0_t} + b(t,x)\lambda_{0_x} + c(t,x)\lambda_0 , \\ &\lambda_{0_t}(t,0) = a_1(t)\lambda_0(t,0), \\ &\lambda_{0_x}(0,x) = a_2(x)\lambda_0(0,x). \end{aligned} \qquad (6)$$

Ясно, что если ${}^{(1)}z, \dots, {}^{(n)}z$ решения векторной системы *(3)*, то матрица *(5)*, составленная из этих решений, является решением системы *(6)*; если $\lambda_0(t,x)$ является решением системы *(6)*, то столбцы матрицы $\lambda_0(t,x)$ являются решениями задачи *(3)*.

Определение 1. $\Delta(t,x) = \det \lambda_0(t,x)$ *назовём определителем Вронского, составленной из* ${}^{(1)}z, \dots, {}^{(n)}z$.

Лемма 1. *Определитель Вронского либо тождественно равен нулю, либо не обращается в нуль ни в одной точке* D.

Определение 2. *Фундаментальной системой решений (ф.с.р.) системы (3) будем называть* n *линейно независимых решений* ${}^{(1)}z, \dots, {}^{(n)}z$ *системы (3), а матрицу* $\lambda_0(t,x)$ *составленную из этих решений назовём фундаментальной матрицей (ф.м) этой системы.*

Лемма 2. *Фундаментальная матрица существует.*

Теорема 1. *Если* $\lambda_0(t,x)$ *-ф.м., то любое решение* $z(t,x)$ *системы (3) представимо в виде*

$$z(t,x) = \lambda_0(t,x)c \quad ,$$

где c *- некоторый постоянный вектор столбец.*

Рассмотрим теперь неоднородную систему *(1)*.

Теорема 2. *Если* $\lambda_0(t,x)$*-ф.м., а* $\bar{z}(t,x)$*-частное решение неоднородной системой (1), то любое решение* $z(t,x)$ *системы (1) представимо в виде*

$$z(t,x) = \lambda_0(t,x)c + \bar{z}(t,x) \quad , \qquad (7)$$

где c *- некоторый постоянный вектор столбец.*

Теорема 3. *Решение системы (1), удовлетворяющее условию* $\bar{z}(0,0) = 0$, *имеет вид*

$$\bar{z}(t,x) = \int_0^t \lambda_1(t,x,\tau)\varphi_1(\tau)d\tau + \int_0^x \lambda_2(t,x,s)\varphi_2(s)ds +$$

$$+ \int_0^t\int_0^x \lambda^0(t,x,\tau,s)\varphi^0(t,s)dsd\tau, \qquad (8)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda^0$ *определяются как* [1].

Для построения решения краевой задачи *(1)*, *(2)* при помощи решения $z(t,x)$ системы *(1)*, нужно выбрать вектор c в представлении *(7)*, из условия

$$Ac = \varphi_0 - l\,\bar z \quad , \tag{9}$$

где

$$l\,\bar z = l\left(\int_0^T \theta(t-\tau)\lambda_1(t,x,\tau)\varphi_1(\tau)d\tau + \int_0^X \theta(x-s)\lambda_2(t,x,s)\varphi_2(s)ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^T\int_0^X \theta(t-\tau)\theta(x-s)\lambda^0(t,x,\tau,s)\varphi^0(\tau,s)dsd\tau \right) \; ,$$

$A = l\,\lambda_0$ - $m \times n$-мерная матрица, $\theta(u-\vartheta) = \begin{cases} 1, u \geq \vartheta \\ 0, u < \vartheta \end{cases}$, $\lambda_0(0,0) = \mathrm{I}$, I - единичная $n \times n$ - матрица.

Пусть P_A - $n \times n$ - матрица (ортопроектор $P_A^2 = P_A = P_A^*$) проектирующая R_n на нуль пространство $N(A)$ матрицы A, $P_A : R_n \to N(A)$; P_{A^*} - $m \times m$ - матрица (ортопроектор $P_{A^*}^2 = P_{A^*} = P_{A^*}^*$), проектирующая R_m на $N(A^*)$, $P_{A^*} : R_m \to N(A^*)$; A^+ -единственная псевдообратная по Муру-Пенроузу [2, 3] к A $n \times m$ - мерная матрица. Для вычисления матриц P_A, P_{A^*} и A^+ существуют хорошо разработанные алгоритмы и формулы [4].

Возвращаясь теперь к системе *(9)*, находим, что необходимым и достаточным условиям её разрешимости относительно $c \in R_n$, состоит в требовании принадлежности правой части *(9)* ортогональному дополнению к ядру сопряжённой к A матрицы $A^* = A'$, т.е.

$$P_{A^*}\{\varphi_0 - l\bar z\} = 0 \tag{10}$$

При этом и только при этом условии уравнение *(9)* имеет решение в виде

$$c = A^+\{\varphi_0 - l\,\bar z\} + P_A \cdot c \tag{11}$$

Так как $rankP_{A^*} = m - rankA^* = m - n_1 = d$ $\left(rankA^* = rankA = n_1 \leq \right.$ $\left.\leq \min(m,n)\right)$, то условие *(10)* состоит из d линейно независимых условий. Поэтому $m \times m$ - мерную матрицу P_{A^*} можно заменить $d \times m$ - мерной матрицей P_{A^*d}, строки которой- d линейно-независимые строки P_{A^*}. Тогда условие *(10)* можно записать в виде

$$P_{A_d^*}\{\varphi_0 - l\bar z\} = 0\,, \quad d = m - n_1 \quad . \tag{12}$$

Далее, ясно, что $rankP_A = n - rankA = n - n_1 = r$. Обозначая через $\{e_i\}$, $i = 1,\ldots,r$ базис нуль- пространства $N(A)$, составляем фундаментальную $n \times r$ - мерную матрицу F решений однородной системы *(9)*, столбцы которой- r линейно независимые векторы, составляющие базис $N(A)$. Ясно, что произвольный вектор-столбец $P_A \cdot c$ из нуль пространства $N(A)$ можно записать в виде $P_A \cdot c = F \cdot c_r$, где c_r - произвольный r-мерный вектор-столбец из R_r. Тогда уравнение *(9)* имеет решение в виде

$$c = A^+\{\varphi_0 - l\bar{z}\} + Fc_r \quad .$$

Подставляя найденную таким образом c в *(7)*, приходим к следующему выражению для общего решения краевой задачи *(1)*, *(2)*:

$$z(t,x,c_r) = \lambda_{0r}(t,x)c_r + \bar{z}(t,x) - \lambda_0(t,x)A^+l\bar{z} + \lambda_0(t,x)A^+\varphi_0 \quad , \qquad (13)$$

где $\lambda_{0r}(t,x)$ - $n \times r$ - мерная матрица, столбцы которой- полная система r линейно независимых решений однородной краевой задачи *(3)*, *(4)*, $\lambda_{0r}(t,x) = \lambda_0(t,x)F$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Если* $rankA = n_1$, *то однородная краевая задача (3), (4) имеет* $r = n - n_1$ *и только* r *линейно независимых решений. Неоднородная краевая задача (1), (2) разрешима тогда и только тогда, когда* $\varphi^0 \in C(D)$, $\varphi_1 \in C(D_T)$, $\varphi_2 \in C(D_X)$ *и* $\varphi_0 \in R_m$ *удовлетворяют условию*

$$P_{A_d^*}\{\varphi_0 - l\bar{z}\} = 0 \,, \quad d = m - n_1$$

и при этом имеет r *параметрическое семейство решений*

$$z(t,x,c_r) = \lambda_{0r}(t,x)c_r + \bar{z}(t,x) - \lambda_0(t,x)A^+l\bar{z} + \lambda_0(t,x)A^+\varphi_0 \quad .$$

Из теоремы 4, сформулированной в общем виде, получим следующее утверждение:

Теорема 5. *Если* $rankA = n_1 = n$, *то однородная краевая задача (3), (4) имеет только тривиальное решение. Неоднородная краевая задача (1), (2) разрешима тогда и только тогда, когда* $\varphi^0 \in C(D)$, $\varphi_1 \in C(D_T)$, $\varphi_2 \in C(D_X)$ *и* $\varphi_0 \in R_m$ *удовлетворяют условию*

$$P_{A_d^*}\{\varphi_0 - l\bar{z}\} = 0 \,, \quad d = m - n \quad ,$$

и при этом имеет единственное решение

$$z(t,x) = \lambda_0(t,x)A^+\varphi_0 + \bar{z}(t,x) - \lambda_0(t,x)A^+l\bar{z} \quad .$$

Литература

[1]. Юсубов Ш.Ш. *О некоторых вопросах теории оптимального управления для систем, описываемых гиперболическими уравнениями.* –Баку, 1992, -131с.

[2]. Moore E.H. Bull. Amer.Math.Soc. -1920. –26. –P.394-395.

[3]. Penrose R. *A generalized inverse for matrices* // Proc.Cambridge Phil.Soc. –1955. -51, №3. –P. 406-413.

[4]. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.*-М.: Наука, 1976. –с.575.

Yusubov Ş.Ş.

İKİNCİ TƏRTİB HİPERBOLİK TƏNLİK ÜÇÜN BƏZİ SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİNİN HƏLL OLUNMASI VƏ HƏLLİNİN STRUKTURU

İşdə xətti hiperbolik tənlik üçün bəzi sərhəd məsələlərinin həll olunması üçün zəruri və kafi şərt alınıb, həmçinin həllin quruluşu araşdırılıb.

Jusubov Sh.Sh.

ON THE SOLVABILITY AND STRUCTURE OF SOLUTION OF SEVERAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS TO HYPERBOLIC EQUATION OF THE SECOND ORDER

This paper deals with necessary and sufficient conditions for the solvability. The structure of some boundary value problems for the linear hyperbolic equation is also investigated in this paper.