

УДК 539.374

АЛИЕВА А.Д.

**ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О
РАСПРОСТРАНЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН
В НЕЛИНЕЙНОМ ВЯЗКОУПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ СО
СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ**

Рассмотрим бесконечную однородную изотропную вязкоупругую среду со сферической полостью радиуса r_0 , к которой приложено давление $P(t)$, переменное во времени и равномерно распределенное по поверхности полости. При этом все параметры, определяющие состояние исследуемой среды, являются функциями только одной пространственной переменной и времени. В системе координат (r, φ, θ) , начало которой совпадает с началом сферической полости, поле перемещений определяется следующим образом:

$$U_r = U(r, t), \quad U_\varphi = U_\theta = 0 \quad (1)$$

где U_r, U_φ, U_θ - сферические составляющие вектора перемещения.

При сферической симметрии отличными от нуля будут составляющие тензора деформации (всюду мы будем рассматривать малую деформацию).

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{U}{r} \quad (2)$$

и составляющие тензора напряжений

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r, t), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi}(r, t), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(r, t) \quad (3)$$

Уравнение движения в сферических координатах при отсутствии массовых сил имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (4)$$

где ρ - плотность материала среды.

Предположим, что до начала процесса нагружения среды давлением $P(t)$, она находилась в естественном напряженном и невозмущенном состоянии. Тогда начальные условия будут нулевыми

$$U(r, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial U(r, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (5)$$

Граничные условия состоят в задании нормального напряжения

σ_{rr} при $r = r_0$ и условия затухания решения при $r \rightarrow \infty$, т.е.

$$\sigma_{rr}(r_0, t) = -P(t) \quad (6)$$

$$U(r, t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty \quad (7)$$

Уравнения состояния между компонентами тензоров напряжений и деформаций примем в соответствии с главной квазилинейной теорией вязкоупругости Ильюшина-Огибалова

$$S_{ij} = \int_0^t \Gamma(t-\tau) e_{ij}(\tau) d\tau - \int_0^t \Gamma_\varphi(t-\tau) \varphi(e, \theta) e_{ij}(\tau) d\tau, \quad (8)$$

$$\sigma = \int_0^t \Gamma_1(t-\tau) \theta(\tau) d\tau - \int_0^t \Gamma_\psi(t-\tau) \psi(e, \theta) \theta(\tau) d\tau, \quad (9)$$

здесь S_{ij} и e_{ij} - девиаторы тензоров напряжений и деформаций

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \theta \delta_{ij}, \quad (10)$$

σ и θ - шаровой тензор и объемная деформация

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}, \quad \theta = \varepsilon_{ij} \delta_{ij}, \quad (11)$$

$e = e_{ij}(\tau) e_{ij}(\tau)$, $\Gamma(t)$ и $\Gamma_1(t)$ - линейные, а $\Gamma_\varphi(t)$ и $\Gamma_\psi(t)$ - нелинейные ядра сдвиговой и объемной релаксации соответственно, ($i, j = r, \varphi, \theta$), по повторяющимся индексам производится суммирование, δ_{ij} - символ Кронекера.

Линейные и нелинейные ядра релаксации в формулах (8) разбиваются на сингулярную и регулярную составляющие

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= 2G\delta(t) - \tilde{\Gamma}(t), & \Gamma_1(t) &= K\delta(t) - \tilde{\Gamma}_1(t) \\ \Gamma_\varphi(t) &= \dot{\Gamma}_\varphi(t) - \tilde{\Gamma}_\varphi(t), & \Gamma_\psi(t) &= \dot{\Gamma}_\psi(t) - \tilde{\Gamma}_\psi(t) \end{aligned} \quad (12)$$

где G - модуль сдвига, K - объемный модуль упругости, $\delta(t)$ - дельта-функция Дирака, $\tilde{\Gamma}(t)$, $\tilde{\Gamma}_1(t)$, $\tilde{\Gamma}_\varphi(t)$, $\tilde{\Gamma}_\psi(t)$ - регулярные функции, $\dot{\Gamma}_\varphi$ и $\dot{\Gamma}_\psi$ - постоянные.

С помощью формул (1)-(2) уравнение (4) можем записать в сравнительно краткой форме

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left[R_1(t-\tau) + \frac{2}{3} R(t-\tau) \right] d \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2U}{r^2} \right) - \frac{2}{3} \int_0^t \Gamma_\varphi(t-\tau) \left[\frac{\partial \varphi(e, \theta)}{\partial r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r} \right) + \right. \\ & \left. \varphi(e, \theta) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2U}{r^2} \right) \right] d\tau - \int_0^t \Gamma_\psi(t-\tau) \left[\frac{\partial \psi(e, \theta)}{\partial r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2U}{r} \right) + \psi(e, \theta) \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2U}{r^2} \right) \right] d\tau = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (13)$$

здесь

$$R_1'(t) = -\tilde{\Gamma}_1(t), \quad R'(t) = -\tilde{\Gamma}(t), \quad R_1(0) = K, \quad R(0) = 2G, \quad \theta = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2U}{r},$$

$$e = \frac{2}{3} \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r} \right)^2, \quad (14)$$

$\varphi(e, \theta)$ и $\psi(e, \theta)$ - заданные функции своих аргументов, определяющие физически нелинейные свойства материала среды:

$$\begin{aligned} \varphi(e, \theta) &= a_1 \theta + a_2 e + a_3 \theta^2 + a_4 e \theta + a_5 \theta^3 + a_6 \theta^2 e + a_7 e^2, \\ \psi(e, \theta) &= b_1 \theta + b_2 e + b_3 \theta^2 + b_4 e \theta + b_5 \theta^3 + b_6 \theta^2 e + b_7 e^2, \end{aligned} \quad (15)$$

a_i и b_i - постоянные.

Подставляя (14) и (15) в (13), получаем нелинейное интегро-дифференциальное уравнение в частных производных для $U(r, t)$.

Задача состоит в определении функции $U(r, t)$ из уравнения (13) с учетом начальных и граничных условий (5), (6) и (7).

Напряжения (3) будут выражаться формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{2}{3} \int_0^t \Gamma(t-\tau) \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r} \right) d\tau + \int_0^t \Gamma_1(t-\tau) \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2U}{r} \right) d\tau - \frac{2}{3} \int_0^t \Gamma_\varphi(t-\tau) \varphi(e, \theta) \times \\ &\times \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r} \right) d\tau - \int_0^t \Gamma_\psi(t-\tau) \psi(e, \theta) \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2U}{r} \right) d\tau \end{aligned} \quad (16)$$

Решение исследуемой задачи разыскиваем в виде:

$$U(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n U_n(r, t), \quad \sigma_{rr}(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sigma_{rrn}(r, t) \quad (17)$$

здесь λ - малый параметр, который в конечном итоге можно считать равным единице.

Учитывая (17) в пробелках (13)-(16), (5)-(7), получаем линейные задачи для функции $U_n(r, t)$ ($n=1, 2, 3, \dots$). Для $U_1(r, t)$ поставленная задача представляет собой соответствующую задачу для линейного вязкоупругого пространства со сферической полостью. Решение для $U_1(r, t)$ построено с использованием интегрального преобразования Лапласа. Обратное преобразование построено с помощью обобщенной теоремы умножения Эфроса и специальных функций построенных М.Х. Ильясовым для произвольных разностных ядер линейной ползучести. Проведено исследование полученных формул при больших и малых значениях времени. Например, при постоянном коэффициенте Пуассона при значениях $r-r_0/c_1 < t < \bar{t} < 1$

$$\sigma_{rr}(r, t) \approx \sigma_{ry}(r, \bar{t}) W_1(t, \eta), \quad \sigma_{\theta\theta}(r, t) \approx \sigma_{\theta\theta y}(r, \bar{t}) W_1(t, \eta) \quad (18)$$

здесь с индексом "y" обозначено решение упругой задачи, $\eta = \frac{r-r_0}{c_1}$ и

$W_1(t, \eta)$ - функция построенная М.Х. Ильясовым [4].

Для регулярных ядер ползучести $K(t)$, $K_0 \neq \infty$, $K_0 = 0,5 \text{ сек}^{-1}$ графики зависимости $(-\sigma_{rr}/P_0)$ от разности $\beta[t - (r-r_0)/c_1]$ для материала легированной стали, при значениях

$c_1 = 6100$ м/сек, $c_2 = 3300$ м/сек, $\nu = 0,25$, $\rho = 7,8$ г/см³
и $r_0 = 1$ м, $K_0 = 0,5$ сек⁻¹ приведены на рис. 1.

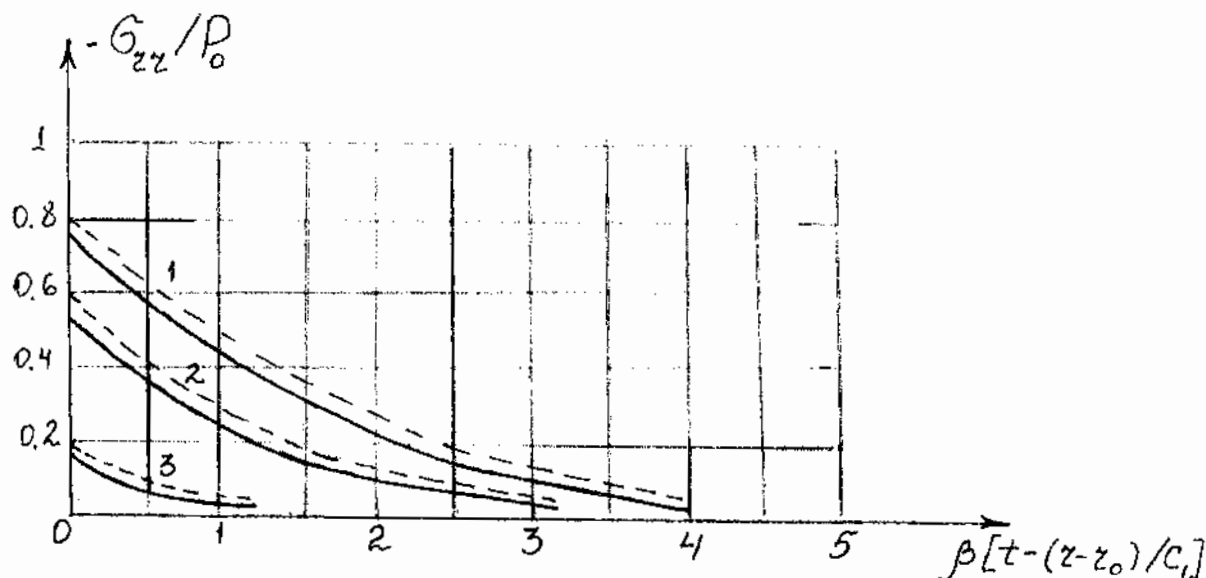


Рис.1. Зависимость напряжения $(-\sigma_r/P_0)$ от разности $\beta[t - (r - r_0)/c_1]$ для регулярного ядра при $r_0 = 1$ м, $K_0 = 0,5$ сек⁻¹. Пунктирные линии изображают решения упругой задачи.

Кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям $r = \frac{4}{3}$ м, $r = 2$ м и $r = 5$ м. Там же пунктирными линиями показаны графики упругого решения. Из этих графиков видно, что за счет вязкости свойства материала пространства напряжения у фронта волны затухают быстрее, чем в случае упругого пространства.

Соответствующие графики для слабосингулярного ядра Абеля $K(t) = At^{-\alpha}$ при вышеуказанных значениях параметров и $r_0 = 1$ м, $\alpha = 0,5$ сек⁻¹, $A = 1500$ сек⁻², в расстояниях $r = 1,25$ м и $r = 2$ м показаны на рис. 2.

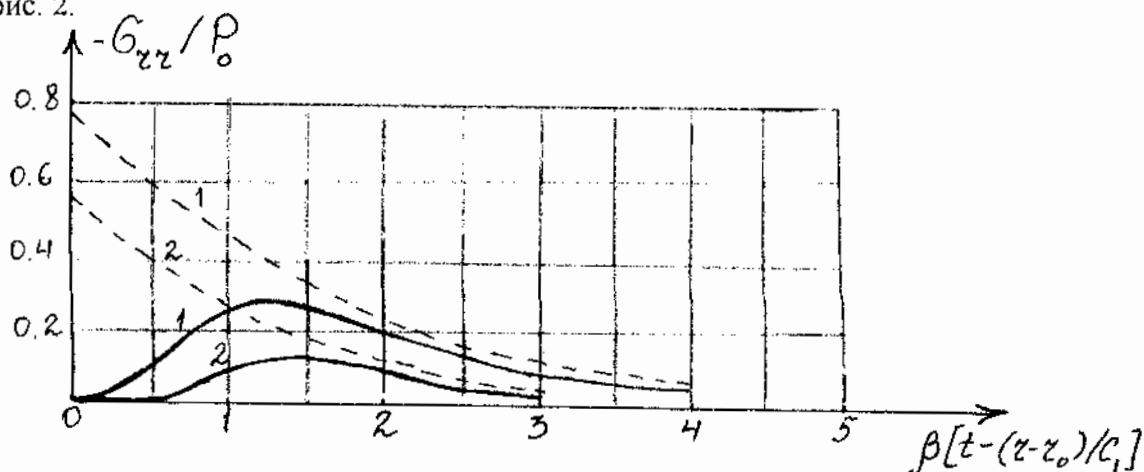


Рис. 2. Зависимость напряжения $(-\sigma_r/P_0)$ от разности $\beta[t - (r - r_0)/c_1]$ для слабосингулярного ядра Абеля при $r_0 = 1$ м,

$\alpha = 0,5 \text{ сек}^{-1}$, $A = 1500 \text{ сек}^{-\frac{1}{2}}$. Кривые 1 и 2 соответствуют значениям $r = 1,25$ м (1) и $r = 2$ м (2).

Пунктирные линии изображают решения упругой задачи. С увеличением координаты r длина участка, на котором функция диссипации есть бесконечность (или напряжения незаметно), увеличивается и величина напряжения становится все меньше и меньше.

Исследован случай, когда линейные функции релаксации непропорциональны, т.е. коэффициент Пуассона не постоянен.

Нам известно, что при помощи интегрального преобразования Лапласа изображения полученных решений зависят от двух аналитических функций. Если выражения этих аналитических функций не известны, тогда мы не можем найти изображение этих функций. В этом случае мы не можем использовать теорему Эфроса. Поэтому мы обращались к методу малого параметра.

Предварительно разложили $R(t)$ и $R_1(t)$ в ряд Маклорена при $t \ll 1$:

$$R(t) = R(0) + tR'(0) + \frac{t^2}{2}R''(0) + \dots \quad (19)$$

$$R_1(t) = R_1(0) + tR_1'(0) + \frac{t^2}{2}R_1''(0) + \dots$$

где $R'(0) = [dR(t)/dt]_{t=0}$, $R''(0) = [d^2R(t)/dt^2]_{t=0}$ и изображение найденного решения имеет вид:

$$\bar{X}(p) = \frac{p\bar{R}R_{10} - p\bar{R}_1R_{10}}{R_0\left(p\bar{R}_1 + \frac{2}{3}p\bar{R}\right)} \quad (20)$$

$\bar{X}(p)$ по модулю меньше единицы для всех значений p , а при $p \rightarrow \infty$ оно обращается в нуль. Как видно, $\bar{X}(p)$ рационально зависит от изображения функций релаксации, поэтому восстановление ее оригинала не представляет принципиальной трудности.

Для коэффициента затухания получено выражение:

$$T = \frac{R_1'(0) + \frac{2}{3}R'(0)}{2\left[R_1(0) + \frac{2}{3}R(0)\right]} \quad (21)$$

Например, если

$$R(t)R_0e^{-\alpha t}, \quad R_1(t) = R_{10}e^{-\beta t} \quad (22)$$

тогда

$$T = -\frac{\alpha}{2} - \frac{K(\beta - \alpha)}{2(\lambda + 2\mu)} \quad (23)$$

Если, функции релаксации пропорциональны, т.е. $\alpha = \beta$, тогда

$$T = -\frac{\alpha}{2} \quad (24)$$

В этом случае для оригинала

$$X(t) = \frac{R_{10}(\beta - \alpha)}{R_{10} + \frac{2}{3}R_0} e^{-\frac{R_{10}\alpha + \frac{2}{3}R_0\beta}{R_{10} + \frac{2}{3}R_0}t} H(t) \quad (25)$$

здесь $H(t)$ - единичная функция Хевисайда.

Если

$$R_1(t) = K = const, \quad R(t) = 3K\omega(t), \quad (26)$$

тогда

$$X(t) = \frac{3K}{2G_0} \int_0^t g_2(t-\tau) d\omega(\tau) - g_2(t) \quad (27)$$

здесь, $\omega(t)$ - функция Ильюшина, $g_2(t)$ - функция связной ползучести Ильюшина.

На рис. 8 приведены кривые зависимости перемещения от разности $t - \eta$ при $\eta = 1$ сек. для указанных функций.

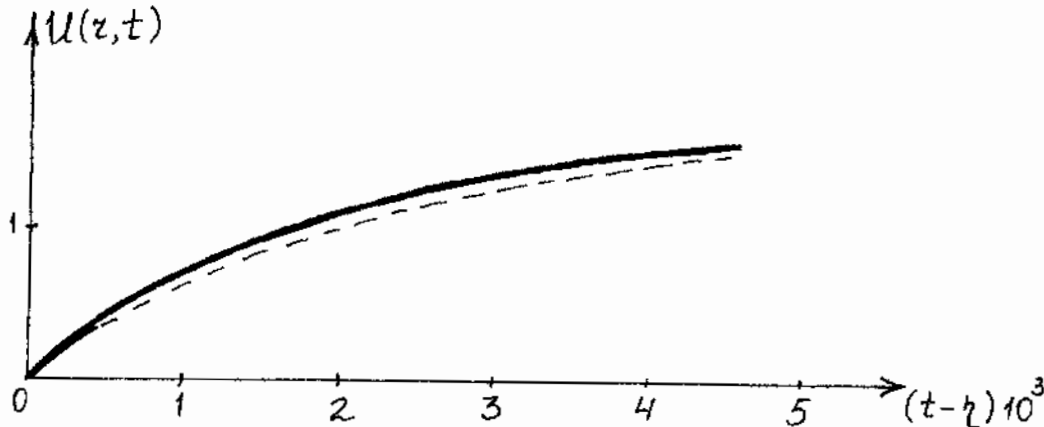


Рис. 3. Зависимость перемещения от разности $(t - \eta)$ при $\eta = 1$ сек. для регулярных пропорциональных функций релаксации (пунктирная линия), и когда объем деформируется по упругому закону (сплошная линия).

Пунктирная линия соответствует $\alpha = \beta = 0,5 \text{ сек}^{-1}$, а сплошная $\alpha = 0,5 \text{ сек}^{-1}$, $\beta = 0$. Нагружение имеет вид $P(t) = P_0 H(t)$. При достаточно малых $t - \eta$ перемещения по обоим расчетам совпадают, а с увеличением $t - \eta$ они существенно отличаются.

Кривые зависимости напряжения $-\sigma_{xx} / P_0$ от $t - \eta$ приведены на рис.4.

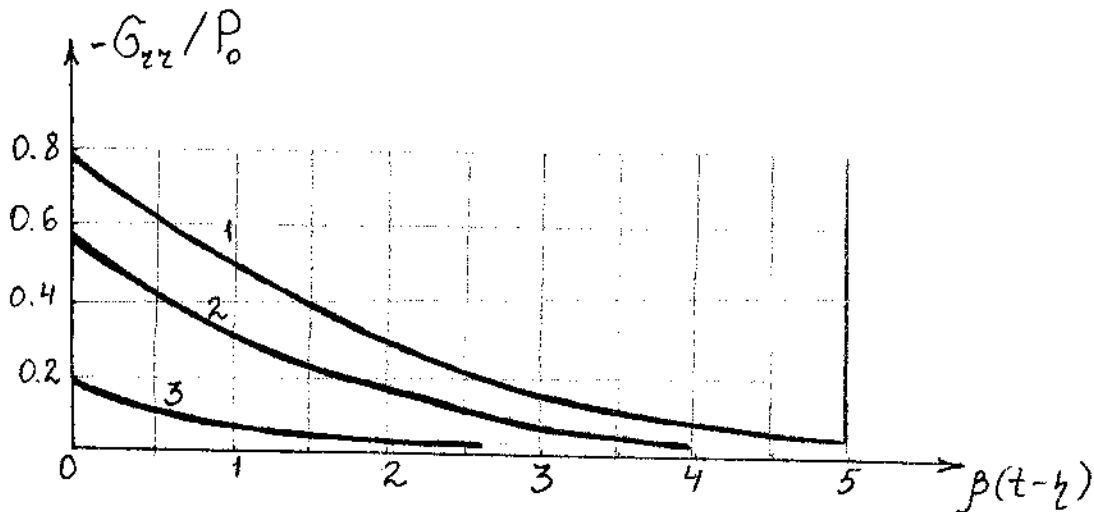


Рис.4. Зависимость напряжения от разности $t-\eta$ для регулярного ядра сдвиговой ползучести, и упругого деформирования объема.

Считается, что объем деформируется по упругому закону, а сдвиговая деформация соответствует регулярному ядру ползучести, причем $K_0 = 0,5 \text{ сек}^{-1}$. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям $r = \frac{4}{3} \text{ м}$, 2 м и 5 м , радиус полости $r_0 = 1 \text{ м}$.

Соответствующие графики для слабосингулярного ядра ползучести Абеля показаны на рис.5, а для слабосингулярного ядра ползучести Ржаницына показаны на рис.6.

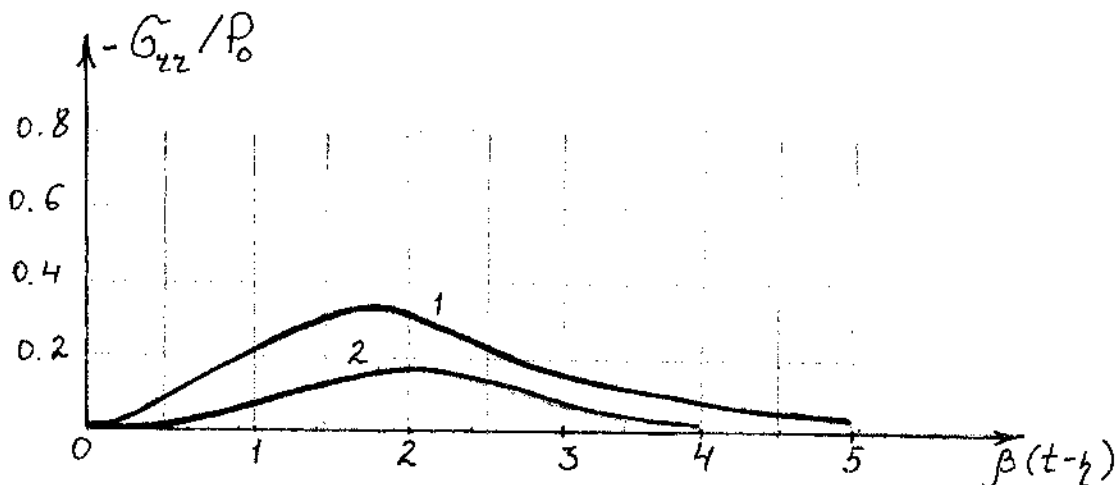


Рис.5. Зависимость напряжения от разности $t-\eta$ для слабосингулярного ядра сдвиговой ползучести Абеля и упругого деформирования объема при $r = 1,25 \text{ м}$ (1) и $r = 2 \text{ м}$ (2).

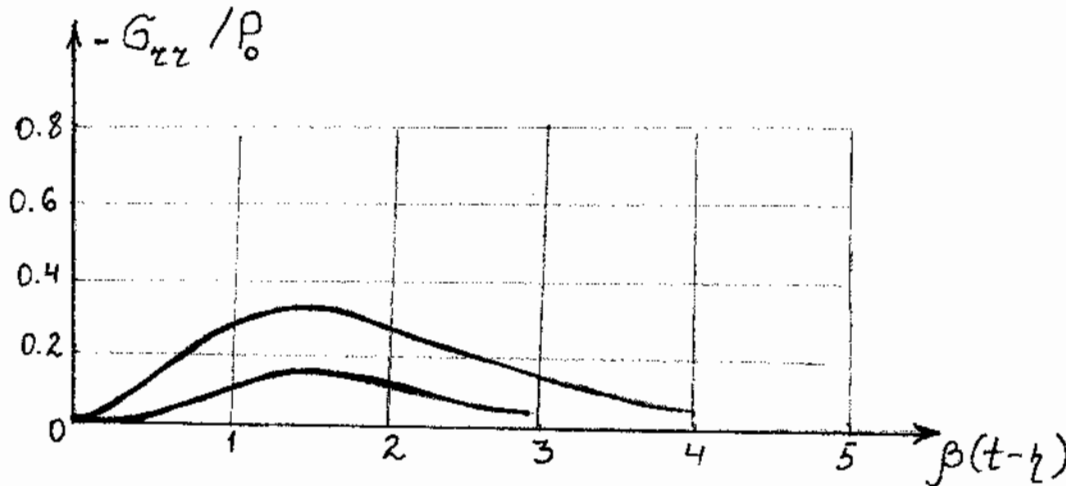


Рис.6. Зависимость напряжения от разности $t - \eta$ для слабосингулярного ядра сдвиговой ползучести Ржаницына и упругого деформирования объема. Кривая 1 соответствует $r = 1,25$ м, а 2- $r = 2$ м.

И в этих графиках наблюдается, что увеличение координаты r приводит к бесконечному росту диссипации.

Построены точные аналитические выражения решений второго, третьего и четвертого приближений.

Определение второго приближения состоит из решения следующей задачи:

$$LU_2 = \frac{2a_1}{3} \int_0^t \Gamma_\varphi(t-\tau)(A_1 U_1 A_3 U_1 + A_2 U_1 A_1 U_1) d\tau + \\ + b_1 \int_0^t \Gamma_\psi(t-\tau)(A_1 U_1 A_3 U_1 + A_2 U_1 A_1 U_1) d\tau \quad (28)$$

$$U_2(r,0) = 0, \quad \left. \frac{\partial U_2(r,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (29)$$

$$\sigma_{r_2}(r_0, t) = 0 \quad (30)$$

$$U_2(r,t) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty \quad (31)$$

Здесь A_i - дифференциальные операторы, L - тот же оператор, который был в линейной задаче. Через $U_1(r,t)$ обозначено решение линейной задачи.

Левая часть уравнения (29) совпадает с уравнением линейной задачи, а правая часть зависит от решений первого приближения. Значит правая часть (29) нам известна.

Построено точное аналитическое решение задачи (28)-(31) при пропорциональных функциях релаксации.

В окрестности $t - \eta \ll 1$ для $U(r,t)$ ($P(t) = P_0 H(t)$) найдено:

$$\begin{aligned}
 U(r,t) = U_1(r,t) + \lambda U_2(r,t) \approx & \frac{c_2^2 P_0 r_0}{\mu c_1 r} (t - \eta) e^{-\frac{K_0 \eta}{2}} + \frac{c_2^2 P_0^2 r_0^2}{2 \mu^3 c_1^3 r^2} \left(\frac{2a_1}{3} \Gamma_\varphi + b_1 \Gamma_\psi \right) \times \\
 & \times e^{-\frac{K_0 \eta}{2}} \left[e^{-\frac{K_0 \eta}{2}} + \frac{2(r - r_0)}{r} - 2 \ln \frac{r}{r_0} + \frac{r}{r_0} + \frac{4\gamma}{r^2 (\gamma^2 + \beta^2)} (1 + 2\gamma r_0 - c_1 r - c_1 r_0) \right] (t - \eta), \\
 & \eta = \frac{r - r_0}{c_1} \quad (32)
 \end{aligned}$$

Здесь $\lambda = 1$, α и β - постоянные

$$\gamma = \frac{2c_2^2}{c_1 r_0}, \quad \beta = \frac{2c_2}{c_1 r_0} \sqrt{c_1 - c_2^2}$$

Из (32) видно, что коэффициент затухания некоторых членов $\frac{K_0}{2}$, а для некоторых членов K_0 . Это и есть характерная сторона решения нелинейной задачи.

Численные результаты первых двух приближений показаны на рис. 7 и 8. Из этих графиков видно, что второе приближение уменьшает численное значение выражения решения.

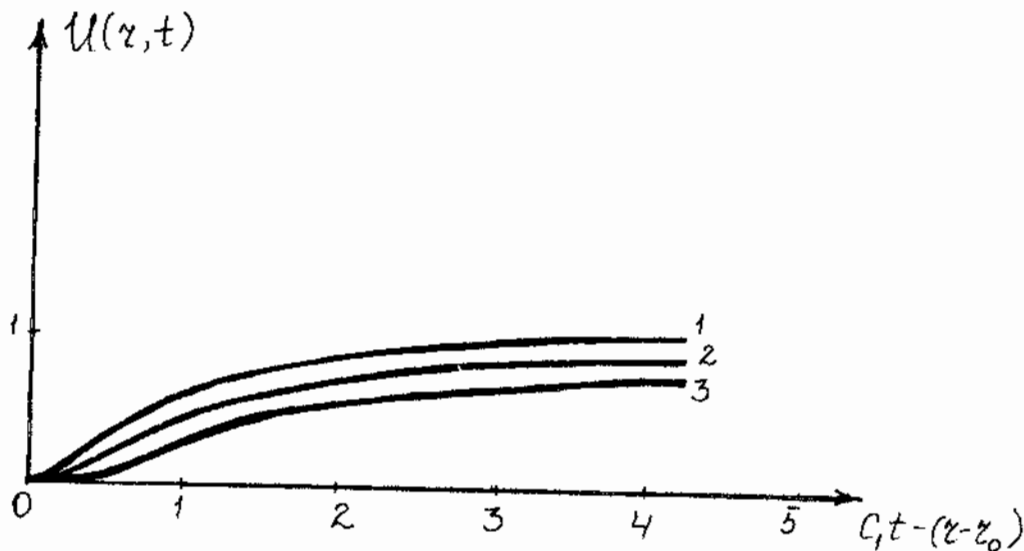


Рис. 7. Зависимость перемещения от разности $c_1 t - (r - r_0)$ при $r_0 = 1$ м, $r = 2$ м (1), $r = 3$ м (2) и $r = 5$ м (3) для слабосингулярного ядра ползучести Абеля.

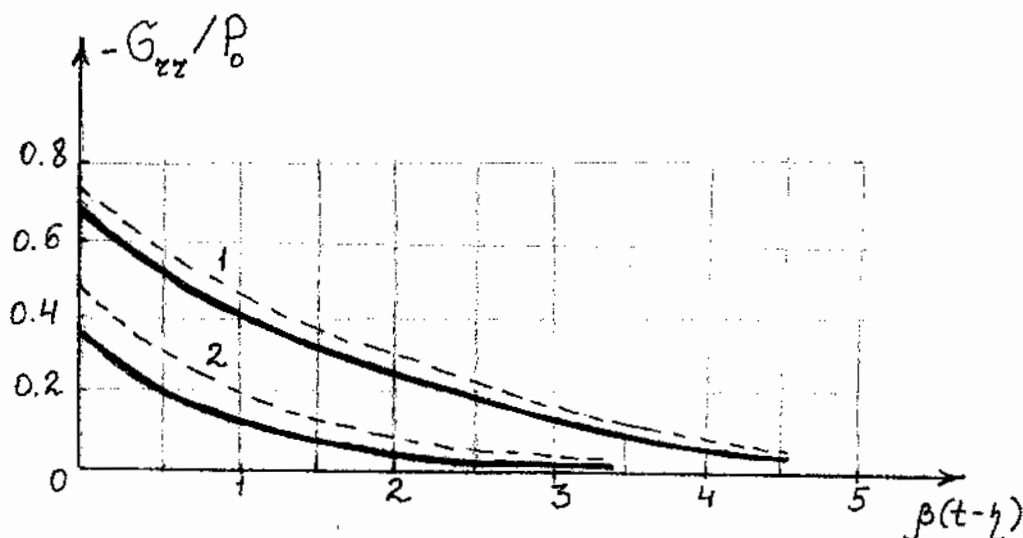


Рис. 8. Зависимость напряжения от разности $t - \eta$ для регулярного ядра ползучести при $r_0 = 1$ м, $K_0 = 0,5 \text{ сек}^{-1}$, $r = \frac{4}{3}$ м (1) и $r = 2$ м (2). Пунктирные линии соответствуют решению линейной задачи.

Некоторые результаты аналитических исследований поставленной задачи в данной статье опубликованы в статьях [5, 6].

Литература

- [1]. Сабодаш П.Ф. *Распространение продольных вязкоупругих волн в трехслойной среде*. МП, 1971, №1, с. 151-156.
- [2]. Филиппов И.Г. *Нестационарные колебания и дифракция волн в акустических и упругих средах*. М., Машиностроение, 1977.
- [3]. Филиппов И.Г., Егорычев О.А. *Волновые процессы в линейных вязкоупругих средах*. М., Машиностроение, 1983.
- [4]. Ильясов М.Х. *Динамические задачи линейной вязкоупругости*. Доктор. диссертация, МГУ, 1983.
- [5]. Ильясов М.Х., Алиева А.Д. *Распространение нестационарных сферических волн в линейном вязкоупругом пространстве*. Деп. ВИНТИ 20.03.92, №974- В92.
- [6]. Алиева А.Д. *Нестационарные сферические волны в вязкоупругом пространстве с непропорциональными функциями релаксации*. Деп. ВИНТИ 25.05.92 №1728- В92.

**Aliyeva A.C. SFERİK BOŞLUQLU QEYRİ XƏTTİ ÖZLÜ-ELASTİK
FƏZADA QƏRARLAŞMAYAN DALĞALARIN YAYILMASI
MƏSƏLƏSİ HƏLLİNİN ƏDƏDİ NƏTİCƏLƏRİ**

Kiçik parametrlə üsulun və Laplas integral çevirməsinin köməyi ilə sferik boşluqlu qeyri- xətti özlü-elastik mühitdə qərarlaşmayan dalğaların yayılması məsələsinin analitik həlli tapılmışdır. Mühitin mexaniki xassəsi İlyuşin-Oqibalovun kvazixətti özlü-elastiklik nəzəriyyəsi əsasında yazılmış, relaksasiya funksiyaları üzərinə əlavə şərtlər qoyulmamışdır. Həllin ilk dörd yaxınlaşması qurulmuş, ədədi tədqiqatlar aparılmışdır.

**Aliyeva A.J. NONSTATIONARY SPHERIC WAVES IN A NONLINEAR
VISCOELASTIC MEDIUM**

Analytic solution of a problem on propagation of nonstationary waves in a nonlinear viscoelastic space with spherical cavity is constructed by a small parameter method and Laplace's integral transformation. Mechanical peculiarities of the material is described according to Ilyushin-Ogibalov's principal quasilinear viscoelasticity theory with any difference relaxation functions. The first approximation solutions are constructed and numerical analysis is carried out.