

УДК 539.375

АХУНДОВ М.Б., АЛИМАМЕДОВ Р.К., РЗАЕВА И.В.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ ПОВРЕЖДАЮЩИХСЯ НАСЛЕДСТВЕННЫХ СРЕД

Задачи механики разрушения вязкоупругих сред, в том числе и при наличии явления накопления повреждений приводятся к одному или системе нелинейных интегральных уравнений Вольтерра [1-4], аналитическое замкнутое решение которых является большой математической проблемой и представляется возможным лишь для частных видов ядер интегральных операторов и нелинейных функций системы уравнений [1-2], при некоторых упрощающих допущениях. В связи с этим является необходимым развитие приближенных методов исследования, среди которых наиболее перспективными представляются численные.

В данной работе предложены дискретные аналоги одного или системы нелинейных интегральных уравнений, представляющих общий тип уравнений задач механики разрушения наследственных повреждающих сред [1-2]; получены оценки погрешностей их решения. Рассмотрены приложения предложенных численных схем для решения задач о разрушении толстой трубы под действием внутреннего давления и распространения трещины в повреждающей среде.

1. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение Вольтерра:

$$f(x(t)) + \int_0^t R(t, \tau) p(x(t), x(\tau)) = g(t) \quad (1.1)$$

где $g(t)$ – заданная функция времени, $x(t)$ – искомая функция, t – время, которое как и ядро $R(t, \tau)$ будем считать безразмерным. Функция $x(t)$ непрерывна, вместе со своей производной.

Пусть $t_i = ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$) узловые точки на временной оси, h шаг по этой оси, $T_n = nh$ – интервал времени, на котором ищется решение.

В качестве дискретного аналога (1.1) примем следующее:

$$f(x_n) + h \sum_{i=0}^{n-1} R(t_n, t_i) p(x_n, x_i) = g(t_n) \quad (1.2)$$

Оценим погрешность решения численной схемы (1.2). Введем разность $z_n = x_n - x(t_n)$. Вычитая из (1.2) уравнение (1.1), выписанное для $t = t_n$, получим:

$$f'_{x(t)} \cdot z_n + h \sum_{i=0}^{n-1} R(t_n, t_i) (z_n \cdot \varphi'_{x(t)} + z_i \cdot \varphi'_{x(t_i)}) = r_n, \quad (1.3)$$

где штрих означает производную по аргументу, выписанному нижним индексом. Кроме того:

$$r_n = \int_0^{t_n} R(t_n, \tau) \varphi(x(t_n), x(\tau)) d\tau - h \sum_{i=0}^{n-1} R(t_n, t_i) \varphi(x(t_n), x(t_i)). \quad (1.4)$$

Введем обозначения: $\varepsilon_n = |z_n|$, $F = \min |f'_{x(t)}|$, $B = \max |\varphi'_{x(t)}|$, $C = \max |\varphi'_{x(\tau)}|$. Тогда из (1.3) получим:

$$\left(F - Bh \sum_{i=0}^{n-1} |R(t_n, t_i)| \right) \varepsilon_n \leq |r_n| + Ch \sum_{i=0}^{n-1} |R(t_n, t_i)| \varepsilon_i. \quad (1.5)$$

Рассмотрим случай, когда ядро $R(t, \tau)$ и его производная непрерывные и ограниченные функции- случай регулярного ядра. Тогда при обозначении $D_n = \max_{t_i} |R(t_n, t_i)|$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ из (1.3), когда $F - D_n B T_n > 0$ после некоторых выкладок найдем:

$$\varepsilon_n \leq \frac{|r_n|}{F - D_n B T_n} \left[1 + \frac{D_n C T_n}{F - D_n B T_n} \exp\left(\frac{D_n C T_n}{F - D_n B T_n} \right) \right]. \quad (1.4)$$

Для $|r_n|$ на основании представления (1.4) получим:

$$|r_n| \leq \frac{h}{2} (T_n R_n^{1,2} \Phi_n + T_n D_n X^1 C), \quad (1.5)$$

где $R_n^{1,2} = \max_{0 < \tau < t_n} |R'_\tau(t, \tau)|$, $X^1 = \max_{0 < \tau < t_n} |x'(\tau)|$, $\Phi_n = \max_{0 < \tau < t_n} |\varphi(x(t_n), x(\tau))|$. Из неравенства (1.4) и (1.5) следует, что для регулярного ядра $R(t, \tau)$ погрешность решения (1.2) имеет порядок шага h деления временного интервала: $\varepsilon_n = O(h)$

Рассмотрим далее случай, слабосингулярного интегрируемого ядра: $R(t, \tau) = (t - \tau)^\alpha$; $0 \leq \alpha < 1$. Из (1.5) найдем:

$$\varepsilon_n \leq \frac{|r_n|}{F - B \chi_\alpha(n)} + \frac{C \chi_\alpha(n)}{F - B \chi_\alpha(n)} \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i, \quad (1.6)$$

где $\chi_\alpha(n) = h^{1-\alpha} \sum_{k=1}^n k^{-\alpha}$. Так как $\sum_{k=1}^n k^{-\alpha} = O(n^{1-\alpha})$, а $n = T_n / h$, то $\chi_\alpha(n) = O(1)$.

Далее из (1.4) получим:

$$|r_n| \leq h^{1-\alpha} \{ \alpha \Phi_n [A(\alpha) + \xi(1+\alpha)] + X^1 C T_n \} \quad (1.7)$$

здесь $\xi(1+\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(1+\alpha)}$, $A(\alpha) = [(1-\gamma\alpha)(1-\gamma)^{-\alpha} - 1] / \gamma^2 \alpha (1-\alpha)$, $0 < \gamma < 1$.

Неравенство (1.6), совместно с (1.7) представляет собой рекуррентное соотношение для погрешностей ε_n . Очевидно, что ε_0 - погрешность

начальных условий, равна нулю. Тогда из (1.6) и (1.7) следует, что $\varepsilon_n = O(h^{1-\alpha})$

Дискретная схема (1.2) представляет на каждом шаге нелинейное алгебраическое уравнение относительно x_n . Для его решения может быть использован итерационный процесс [5] $x_n^{(k)} = \psi(x_n^{(k-1)})$, где

$$\psi(x_n) = x_n + \omega \left\{ f(x_n) - h \sum_{i=0}^{n-1} R(t_n, t_i) \varphi(x_n, x_i) - g(t_n) \right\}. \quad (1.8)$$

Здесь ω - числовой параметр, определяемый из условия $|\psi'_{x_n}| < 1$. В качестве окончания численного счета принимается условие $|x_n^{(k)} - x_n^{(k-1)}| < \delta$.

Рассмотрим приложение численной схемы (1.2) к задаче о разрушении толстой трубы под действием внутреннего давления [2]. Тогда в (1.1)

$$\begin{aligned} \varphi(x(t), x(\tau)) &= x^2(\tau) x^{-2}(t) (1 - x^2(\tau))^{-1}, \\ f(x(t)) &= (1 - x^2(t))^{-1}; g(t) = \sigma_0 / \sqrt{2} p. \end{aligned} \quad (1.9)$$

здесь σ_0 - прочность бездефектного материала, p - внутреннее давление, $x(t) = r/b$, где r - радиус поврежденной зоны трубы, b - его внешний радиус. В качестве ядра $R(t, \tau)$ принято слабосингулярное ядро Абеля. Расчеты производились для следующих значений параметров: $\sigma_0/p = 4; x_0 = a/b = 0,3$, где внутренний радиус трубы, $\alpha = 0,0,5,0,9$. Параметр ω в (1.8) выбирался в процессе численного эксперимента: его значение и величина шага h подбирались таким образом, чтобы решение для $\alpha = 0$ совпало с известным аналитическим решением [2]. Оказалось достаточным принятие $\omega = 0,05; \delta = 0,001; h = t_0/40$, где $t_0 = \{(1-\alpha) \times [\sigma_0(1-x_0^2)/\sqrt{2}p - 1]\}^{1/(1-\alpha)}$ - продолжительность инкубационного периода [2].

На рис. 1 приведены кривые распространения зоны разрушения в зависимости от параметра сингулярности ядра.

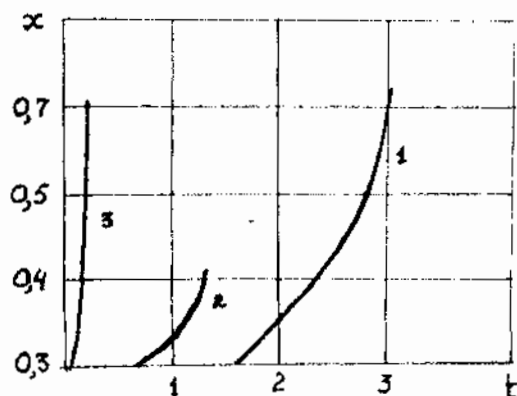


Рис. 1

Кривая 1 соответствует значению параметра сингулярности $\alpha = 0,01$; кривая 2 значению $\alpha = 0,5$; кривая 3 значению $\alpha = 0,9$. Они свидетельствуют о существенном влиянии этого параметра на развитие процесса разрушения. Для правильности и корректности анализа кривых следует заметить, что безразмерное время t на рис.1 выражается через размерное время \tilde{t} следующим образом: $t = \tilde{t} \lambda^{1/(1-\alpha)}$, где λ - линейный размерный коэффициент ядра $R(t, \tau)$.

2. Рассмотрим систему нелинейных интегральных уравнений, представляющую задачу о развитии трещины в повреждающейся среде [1].

/А/ **Инкубационный период**. Разрешающая система уравнений в безразмерных величинах имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) + \frac{2}{\pi} \int_0^t \Omega(t-s)x(s)\Phi(y(s), y(t))ds = 1 \\ y(t) \cos \frac{\alpha}{x(t)} = 1 \\ \left[x(t_0) + \int_0^{t_0} \Lambda(t_0-s)x(s)ds \right] \ln y(t_0) = a. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь приняты обозначения:

$$\begin{cases} x(t) = \sigma(t) = \frac{\sigma_r(t)}{\sigma_s}; y(t) = \frac{c(t)}{l_0}; a = \frac{1}{2} l_0 \alpha^2 = \frac{2\pi\mu_0 \delta_{cr}}{(1+\chi_0)l_0} \\ \Phi(y(t), y(s)) = \arctg \left(y(t) \sqrt{\frac{y^2(s)-1}{y^2(t)-y^2(s)}} \right) \end{cases} \quad (2.2)$$

где $2l_0$ - начальная длина трещины, $c(t) - l_0$ - область предразрушения возле вершины трещины, l_0 - начальная критическая длина трещины, μ_0, χ_0 - механические постоянные материала среды, δ_{cr} - критическое раскрытие берегов трещины.

Дискретный аналог (2.1) определим следующим образом:

$$\begin{cases} x_i + \frac{2}{\pi} h \sum_{k=0}^{i-1} \Omega(t_i - t_k) x_k \Phi(y_k, y_i) = 1 \\ y_i \cos \frac{\alpha}{x_i} = 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\left| \left(x_n + h \sum_{k=0}^{n-1} \Lambda(t_n - t_k) x_k \right) \ln y_n - a \right| < \varepsilon, 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.3) служат для определения x_i, y_i , а неравенство (2.4) служит условием определения продолжительности инкубационного периода $t_0 = nh$. Оценим порядок погрешности (2.3). Введем обозначения: $\varepsilon_i = x_i - x(t_i)$, $\eta_i = y_i - y(t_i)$. Так как $|x(t)| \leq X$, $|y(t)| < Y$,

$|\Phi(a, b)| < C; |\Phi(a_1, b_1) - \Phi(a_2, b_2)| \leq L_1|a_1 - a_2| + L_2|b_1 - b_2|$; X, Y, C, L_1, L_2 - некоторые положительные числа, то из первого уравнения (2.3) получим:

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{2}{\pi} Ch \sum_{k=0}^{i-1} |\Omega(t_i - t_k)| |\varepsilon_k| + \frac{2}{\pi} |r_i|, \quad (2.5)$$

где

$$r_i = \int_0^{t_i} \Omega(t_i - s) x(s) \Phi(y(s), y(t)) ds - \\ - h \sum_{k=0}^{i-1} \Omega(t_i - t_k) x(t_k) \Phi(\eta_k + y(t_k), \eta_i + y(t_i)) \quad (2.6)$$

Из второго уравнения (2.3) при условии $\alpha_0 \leq \cos\left(\frac{\alpha}{x(t_i)}\right) \leq \alpha_1$ получим:

$$|\eta_i| \leq \frac{YC_1}{\alpha_0} |\varepsilon_i|. \quad (2.7)$$

Для оценки $|r_i|$ следует уточнить свойства ядра $\Omega(t - \tau)$. Примем для начала, что ядро $\Omega(t - \tau)$ регулярно. Тогда при обозначениях:

$$\max |y'(t)| \leq Y^1, \max |x'(t)| \leq X^1, \max_{0 < k < i-1} |\Omega'(t - t_k)| \leq R^1, \max_{0 < k < i-1} |\Omega(t_i - t_k)| \leq R_i, \text{ для } |r_i|$$

на основании представления (2.6) получим:

$$|r_i| \leq R_i XL_2 T_i |\eta_i| + R_i XL_1 h \sum_{k=0}^{i-1} |\eta_k| + \frac{1}{2} T_i (CRX^1 + XCR^1 + R_i XL_1 Y^1) h. \quad (2.8)$$

Из представлений (2.5), (2.7) и (2.8) окончательно найдем:

$$|\varepsilon_i| \leq h \delta e^{T_i \gamma}; \quad |\eta_i| \leq \beta |\varepsilon_i| = h \beta e^{T_i \gamma}, \quad (2.9)$$

где

$$1 - \frac{2}{\pi} R_i XL_2 T_i \beta = \frac{1}{q} > 0; \delta = \frac{T_i q}{\pi} (CRX^1 + CR^1 X + R_i XY^1 L_1), \quad \beta = \frac{YC_1}{\alpha_0}.$$

Таким образом погрешность, вносимая заменой системы (2.1) дискретной системой (2.2), порядка шага h деления временного интервала T_i .

Для случая слабосингулярного ядра $\Omega(t - \tau) = \chi(t - \tau)^{-\beta}$, соответственно получим:

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{2C\chi}{\pi} \omega_\beta(i) \sum_{k=0}^{i-1} |\varepsilon_k| + \frac{2}{\pi} |r_i|, \quad (2.10)$$

где $\omega_\beta(i) = h^{1-\beta} \sum_{k=1}^{i-1} k^{-\beta} = O(1)$. Для $|r_i|$ из (2.6) найдем:

$$|r_i| \leq CX^1 \chi h \left(\frac{1}{2} \omega_\beta(i) - h T_i^{-\beta} + h^{1-\beta} \cdot \frac{3-2\beta}{(1-\beta)(2-\beta)} \right) + \\ + XC\chi \beta h^{1-\beta} (\xi(1+\beta) + A(\beta)) + XL_1 \chi \omega_\beta(i) \left(Y^1 \frac{h}{2} + \sum_{k=0}^{i-1} |\eta_k| \right). \quad (2.11)$$

Неравенства (2.10) и (2.11) представляют собой рекуррентную систему уравнений для оценки погрешностей $|\varepsilon_i|$ и $|\eta_i|$. Из них, с учетом того, что $\varepsilon_0 = \eta_0 = 0$ следует: $|\varepsilon_i| = O(h^{1-\beta})$, $|\eta_i| = O(h^{1-\beta})$

3 /В/ Начальный период. В обозначениях

$$z(t) = \frac{l(t)}{l_0}; \Phi(y(t), y(s), z(s)) = \arctg \frac{y(t)}{z(s)} \sqrt{\frac{y^2(s) - z^2(s)}{y^2(t) - y^2(s)}}$$

$$\psi(z(t), z(s), y(s)) = z(t) \ln \frac{z(t) \sqrt{y^2(s) - z^2(s)} - z(s) \sqrt{y^2(s) - z^2(t)}}{z(t) \sqrt{y^2(s) - z^2(s)} + z(s) \sqrt{y^2(s) - z^2(t)}} - z(s) \ln \frac{\sqrt{y^2(s) - z^2(t)} - \sqrt{y^2(s) - z^2(s)}}{\sqrt{y^2(s) - z^2(t)} + \sqrt{y^2(s) - z^2(s)}}$$

система уравнений, описывающих этот период, будет:

$$\begin{cases} x(t) + \frac{2}{\pi} \int_0^t \Omega(t-s)x(s)\Phi(y(t), y(s), z(s))ds = 1; \\ 2x(t)z(t) \ln \frac{y(t)}{z(t)} + \int_0^t \Lambda(t-s)x(s)\psi(z(t), z(s), y(s)) = \alpha; \\ y(t) \cos \frac{\alpha}{x(t)} = z(t). \end{cases} \quad (2.12)$$

Условие, определяющее продолжительность начального периода, будет:

$$z(t_1) = \frac{z_0}{\cos \alpha}. \quad (2.13)$$

В качестве дискретного аналога системы (2.12) примем:

$$\begin{cases} x_i + \frac{2}{\pi} h \sum_{k=0}^n \Omega(t_i - t_k) x_k \Phi(y_i, y_k, z_0) + \frac{2}{\pi} h \sum_{k=n+1}^{i-1} \Omega(t_i - t_k) x_k \Phi(y_i, y_k, z_k) = 1; \\ 2x_i z_i \ln \frac{y_i}{z_i} + h \sum_{k=0}^n \Lambda(t_i - t_k) x_k \psi(z_i, z_0, y_k) + h \sum_{k=n+1}^{i-1} \Lambda(t_i - t_k) x_k \psi(z_i, z_k, y_k) = \alpha; \\ y_i \cos \left(\frac{\alpha}{x_i} \right) = z_i, \quad i = n+1, \dots, m. \end{cases} \quad (2.14)$$

Здесь учтено, что в течение инкубационного периода $1 \leq k \leq n$ будет выполняться $z_k = z_0$. Дискретный аналог (2.13) будет:

$$\left| z_m - \frac{z_0}{\cos \alpha} \right| < \varepsilon; 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (2.15)$$

в рамках принятых ранее обозначений погрешностей ε_i, η_i , а также $\gamma_i = z_i - z(t_i)$ из первых уравнений (2.12) и (2.14) для случая регулярных ядер получим:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} |\varepsilon_i| \leq & \Phi R_i h \sum_{k=0}^{i-1} |\varepsilon_k| + R_i X L_1 T_i |\eta_i| + R_i X L_2 \sum_{k=0}^{i-1} h |\eta_k| + R_i X L_3 \sum_{k=n+1}^{i-1} h |\gamma_k| + \\ & + \frac{1}{2} T_i h (\Phi R X^1 + \Phi X R^1 + R_i X L_2 Y^1 + R_i X L_3 z^1) + \frac{1}{2} z^1 R_i X L_3 h^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Здесь: $\max |\Phi(y(t_i), y(s), z(s))| \leq \Phi; \max |z'(t)| \leq z^1;$
 $|\Phi(a_1, b_1, c_1) - \Phi(a_2, b_2, c_2)| \leq L_1 |a_1 - a_2| + L_2 |b_1 - b_2| + L_3 |c_1 - c_2|.$

Из вторых уравнений (2.12) и (2.14) имеем:

$$\begin{aligned} |\gamma_i| \leq & A \left\{ (a + K X T_i \psi) |\varepsilon_i| + K_i \psi \sum_{k=0}^{i-1} h |\varepsilon_k| + K_i X M_1 T_i |\gamma_i| + K_i X M_2 \sum_{k=n+1}^{i-1} h |\gamma_k| + \right. \\ & + K_i X M_3 \sum_{k=0}^{i-1} h |\eta_k| + \frac{1}{2} T_i (K \psi X^1 + X \psi K^1 + K_i X M_2 Z^1 + K_i M_3 X Y^1) h + \\ & \left. + \frac{1}{2} K_i X M_2 Z^1 h^2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где приняты обозначения: $\max_s |\Lambda(t_i - s)| = K; \max_{0 \leq k \leq i-1} |\Lambda(t_i - t_k)| = K_i;$
 $\max |\Lambda'(s)| = K^1; \max |\psi(z(t), z(s), y(s))| = \psi; |\psi(a_1, b_1, c_1) - \psi(a_2, b_2, c_2)| \leq$
 $\leq M_1 |a_1 - a_2| + M_2 |b_1 - b_2| + M_3 |c_1 - c_2|,$ а A - некоторое положительное постоянное.

И наконец из третьих уравнений (2.12) и (2.14) найдем:

$$|\eta_i| \leq b_2 |\gamma_i| + b_3 |\varepsilon_i|. \quad (2.18)$$

Здесь b_2, b_3 - положительные постоянные.

Система неравенств (2.16), (2.17) и (2.18) может быть приведена к более компактному виду. Однако уже и в такой форме эти неравенства позволяют сделать вывод о порядках погрешностей $|\varepsilon_i|, |\eta_i|$ и $|\gamma_i|$. Рассматривая (2.16) - (2.18) как систему рекуррентных неравенств; при нулевых начальных погрешностях, из них получим, что эти погрешности порядка шага h деления временного интервала.

Для случая слабосингулярных ядер $\Lambda(t - \tau) = \lambda(t - \tau)^{-\gamma}, \Omega(t - \tau) =$
 $= \chi(t - \tau)^{-\beta}; 0 \leq \gamma, \beta < 1$ вместо неравенств (2.16) и (2.17) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} |\varepsilon_i| \leq & \Phi \chi \omega_\beta(i) \sum_{k=0}^{i-1} |\varepsilon_k| + \Phi X^1 \chi h \left(\frac{1}{2} \omega_\beta(i) - h T_i^{-\beta} + h^{1-\beta} \frac{3-2\beta}{(1-\beta)(2-\beta)} \right) + \\ & + X \chi \left\{ \left(2L_1 |\eta_i| + L_2 \sum_{k=0}^{i-1} |\eta_k| + L_2 Y^1 h \right) \omega_\beta(i) + \frac{1}{2} L_3 Z^1 h^2 [1 + (T_i - T_n)^{-\beta}] + \right. \\ & \left. + L_3 \omega_\beta(i) \sum_{k=n+1}^{i-1} |\gamma_k| + \Phi \beta h^{1-\beta} \left(\frac{1}{2} \xi(1+\beta) + A(\beta) \right) \right\}; \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$A^{-1}|\gamma_i| \leq \left(a + X\psi\lambda \frac{T_i^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right) |\varepsilon_i| + \omega_\gamma(i) \left\{ \lambda\psi \sum_{k=0}^{i-1} |\varepsilon_k| + X \left(M|\gamma_i| + M_2 \sum_{k=n+1}^{i-1} |\gamma_k| + M_3 \sum_{k=n+1}^{i-1} |\eta_k| + \frac{1}{2} M_3 Y^1 h \right) \right\} + X\psi\lambda\gamma h^{1-\gamma} \left(\frac{1}{2} \xi(1+\gamma) + A(\gamma) \right) + \frac{1}{2} XM_2 Z^1 h (\omega_\gamma(i) + h(T_i - T_n)^{-\gamma}) \quad (2.20)$$

Из выписанных неравенств, совместно с (2.18) при $\varepsilon_0 = \eta_0 = \gamma_0 = 0$ явствует, что $|\varepsilon_i| = O(h^{1-\delta})$, $|\eta_i| = O(h^{1-\delta})$, $|\gamma_i| = O(h^{1-\delta})$, где $\delta = \max(\beta, \gamma)$.

/С/ **Основной период.** Система уравнений, описывающих этот период будет:

$$\begin{cases} x(t) + \frac{2}{\pi} \int_0^t \Omega(t-s) \Phi(y(t), y(s), z(s)) ds = 1; \\ 2x(t)z(t) \ln \frac{y(t)}{z(t)} + \int_{t_2}^t \Lambda(t-s) x(s) \psi(z(t), z(s), y(s)) ds = \alpha; \\ y(t) \cos \frac{\alpha}{x(t)} = z(t). \end{cases} \quad (2.21)$$

Условие, определяющее время t_2 будет:

$$y(t_2) = z(t_2) \quad (2.22)$$

Время разрушения t_r определяется как:

$$c'(t_r) = \infty, \quad l'(t_r) = \infty. \quad (2.23)$$

Дискретный аналог системы (2.21) представим в виде, аналогичном системе (2.14) за тем лишь исключением, что $i = m+1, \dots, r$, а суммирование во втором уравнении начинается не с $k=0$, а с $k=s$, причем номер s определяется согласно (2.22) следующим образом:

$$|Z_i - Y_s| < \varepsilon; \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (2.24)$$

Условие, определяющее время разрушения, будет: $|y_r - y_{r-1}|^{-1} < \varepsilon_1 \ll 1$. В связи с отмеченным, оценки погрешностей приближенного решения в основной период будут аналогичны оценкам, полученным для начального периода.

Анализируемые системы уравнений отражают решение рассматриваемой задачи при двухстороннем растяжении плоскости с трещиной. Случай одностороннего растяжения, отличие которого состоит в добавлении к правым частям первых уравнений систем (2.1), (2.12), (2.21)

слагаемого $\left[\frac{(3 - \chi_0)}{\pi(\chi_0 - 1)} \right] \left[1 + \int_0^t V(\tau) d\tau \right]$, где $V(t)$ известная функция,

принципиального отличия не представляет.

Таким образом дискретная схема решения задачи о развитии одиночной прямолинейной трещины в повреждающейся вязкоупругой среде корректна. На основе этой дискретной схемы была составлена программа на языке FORTRAN, реализованная на ЭВМ ЕС-1035.

Расчет был произведен для случая постоянного коэффициента Пуассона и слабосингулярных ядер $\Lambda(t-\tau)$ и $\Omega(t-\tau)$. В качестве безразмерного времени принята величина $\tilde{t} = t(10\lambda)^{\frac{1}{1-\beta}}$.

На рис. 2 приведены кривые, характеризующие развитие трещины для одностороннего (кривая 4) и двухстороннего (кривые 1-3) растяжений плоскости с трещиной в зависимости от параметра сингулярности ядер $\beta = \gamma$ и безразмерной начальной критической длины трещины l_* [1]. При этом $\alpha = 0,035$; $\alpha = 0,1$. Для кривых 1, 2, 4 критическая начальная длина $l_* = 7$, длина кривой 3 она равна $l_* = 1,2$. Параметры сингулярности ядер равны для кривой 1- $\beta = \gamma = 0$; кривой 2- $\beta = \gamma = 0,9$; кривых 3, 4- $\beta = \gamma = 0,5$. Из приведенных кривых следует, что при двухстороннем растяжении в отличие от одностороннего процесс развития трещины идет в значительной мере медленнее. Увеличение параметра сингулярности ядер и уменьшение величины l_* приводит к увеличению скорости развития трещины.

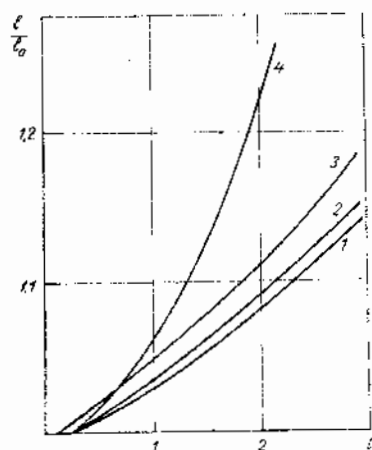
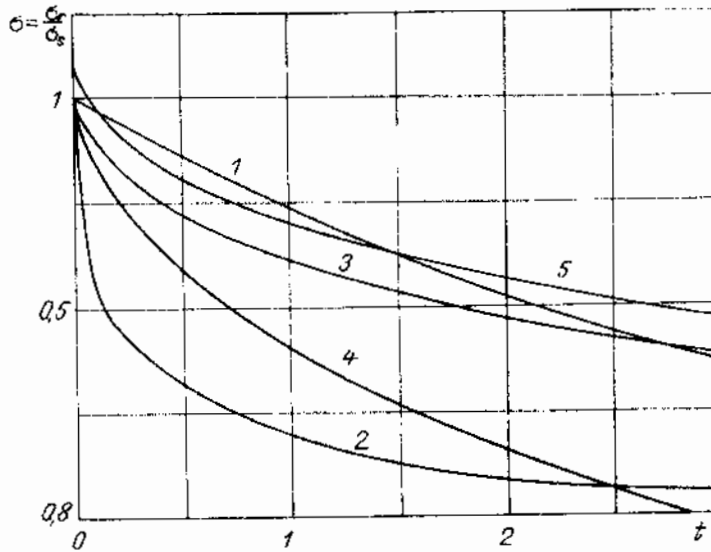


Рис. 2

На рис. 3 приведены кривые зависимости напряжения в зоне предразрушения от параметра сингулярности ядер $\beta = \gamma$, а также параметра α , характеризующего интенсивность внешней нагрузки. Здесь кривые 1-4 соответствуют двухстороннему, кривая 5- одностороннему растяжению. При этом $l_* = 7$, для кривых 1-3 и 5 - $\alpha = 0,035$; $\alpha = 0,1$, для кривой 4- $\alpha = 3,5$; $\alpha = 1$. Также для кривой 1- $\beta = \gamma = 0$; кривой 2- $\beta = \gamma = 0,9$; кривых 3-5- $\beta = \gamma = 0,5$. Из приведенных кривых видно, что наиболее интенсивно процесс релаксации в зоне предразрушения идет в случае двухстороннего растяжения, причем особенно ощутимо влияние на этот процесс параметра сингулярности ядер для его значений близких к единице. Также велико влияние на указанный процесс параметра внешней нагрузки α .



Литература

- [1]. Ахундов М.Б., Никитин Л.В., Суворова Ю.В. *Кинетическая модель развития трещины в повреждающейся среде*. Известия АН СССР, МГТ, 1986, №5, с. 128-138.
- [2]. Суворова Ю.В., Ахундов М.Б. *Длительное разрушение изотропной среды в условиях сложного напряженного состояния*. Машиноведение, 1986, №4, с. 40-46.
- [3]. Каминский А.А. *Механика разрушения вязкоупругих тел*. Киев: Наукова думка, 1980, с.159.
- [4]. Кондаурова В.И., Мухамедиев Ш.А., Никитин Л.В., Рыжак Е.И. *Механика разрушения горных пород*, Москва, 1987, с. 218.
- [5]. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике*, 1973, с.832.

Axundov M.B., Piriverdiyev V.A.
Suvorova U.V., Əlimməmədov R.Q.

ZƏDƏLƏNƏN İRSİ MÜHİTLƏRİN QEYRİ XƏTTİ DAĞILMA MEXANİKASININ HESABLAMA ÜSULLARI

Zədələnən irsi mühitlərin səpələnməsi dağılma məsələləri adətən Volter tipli ikinci növ qeyri xətti inteqral tənliklərinə gətirilir. Bu kimi inteqral tənliklərin analitik həllinin alınması böyük riyazi sətinliklərlə üzləşir. Bu səbəbdən verilən məqalədə qeyri xətti inteqral tənliklər sisteminin həlli üçün hesablama alqoritmi verilmişdir. Hesablama sxeminin dəqiqlik dərəcəsinin təyini və yığılması isbat edilmişdir. İki praktiki məsələ üçün konkret həll alınmış və uyğun qrafiklər qurulmuşdur.

Akhundov M.B., Piriverdiev V.A.,
Suvorova J.V., Alimamedov R.G.

**THE COMPUTATIONAL ASPECTS OF NON- LINEAR
MECHANICS OF INJURING HEREDITARY SURROUNDING**

We offer the numerical scheme for the solution of nonlinear integral equations of Volterra, to whidi reduces the class of problems of the mechanics of injuring. We give the estimation of the error for regular and weak singular kernels of operator. For two concret problems the numerical realization is implemented also