УДК 539.374

ГАСАНОВ Р.А., АЛИЕВ С.А.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПРЕДНАПРЯЖЕННОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Рассматривается упругое сжимаемое и несжимаемое изотропное тело с произвольной формой упругого потенциала. В случае ортотропного тела считается, что упруго-эквивалентные направления совпадают с направлениями осей выбранной системы координат. Считается, что начальные напряжения не действуют вдоль границы полуплоскости y_1Oy_2. В механическом смысле это означает, что в начальном напряженно-деформированном состоянии тело загружено таким образом, что на плоскости, в которой будут расположены дополнительные нагрузки, напряжения не возникают т.е.

$$S_0^{22} = 0; S_0^{11} \neq 0 ; S_0^{33} \neq 0$$

Допускаются, что при приложении к телу дополнительных произвольных нагрузок (дополнительных по отношению к начальному напряженно-деформированному состоянию). Возникающие возмущения напря-женно-деформированного состояния по величине значительно меньше соот-веcтвующих величин начального напряженно-деформированного состояния.

Сработанной А.Н. Гузью такой линеаризованной теории [2] общие решения статических плоских задач для сжимаемых и несжимаемых тел в координатах начального однородного состояния, в случае неравных корней корни уравнений [2, (2.134)] выражаются комплексными потенциалами следующим образом [2, (2.145)]:

$$\begin{gathered}
\widetilde{Q}_{22} = 2\operatorname{Re}\left[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2)\right]; \quad z_j = y_1 + \mu_j y_2 ; \\
\widetilde{Q}_{21} = -2\operatorname{Re}\left[\gamma_{21}^{(1)}\mu_1\Phi_1'(z_1) + \gamma_{21}^{(2)}\mu_2\Phi_2'(z_2)\right]; \quad \mu_1 \neq \mu_2 ; \\
\widetilde{Q}_{12} = -2\operatorname{Re}\left[\mu_1\Phi_1'(z_1) + \mu_2\Phi_2'(z_2)\right]; \qquad (1) \\
\widetilde{Q}_{11} = 2\operatorname{Re}\left[\gamma_{11}^{(1)}\mu_1^2\Phi_1'(z_1) + \gamma_{11}^{(2)}\mu_2^2\Phi_2'(z_2)\right]; \\
u_k = 2\operatorname{Re}\left[\gamma_k^{(1)}\Phi_1(z_1) + \gamma_k^{(2)}\Phi_2(z_2)\right] k = 1,2;
\end{gathered}$$

Здесь обозначены $\widetilde{Q}_{ij}$ - составляющие вдоль оси Oy_i вектора напряжений на площадке $y_i = const$, которые измеряются на единицу площади площадки $y_i = const$ в начальном деформированном состоянии: u_i - перемещение вдоль Oy_i.

В *(1)* введены следующие обозначения для коэффициентов, которые входят в выражения для напряжений и перемещений следующими формулами в случае сжимаемых тел

$$\gamma_{21}^{(j)} = \mu_j^{-2}\left(\tilde{\omega}_{2112}\tilde{\omega}_{1122}\mu_j^2 - \tilde{\omega}_{1111}\tilde{\omega}_{1212}\right)B_j^{-1}\,;\ \gamma_{11}^{(j)} = \gamma_{21}^{(j)}\,;$$

$$\gamma_1^{(j)} = -\left(\tilde{\omega}_{1122} + \tilde{\omega}_{1212}\right)B_j^{-1}\,;\ \gamma_2^{(j)} = \mu_j^{-1}\left(\tilde{\omega}_{2112}\mu_j^2 + \tilde{\omega}_{1111}\right)B_j^{-1}\,;$$

$$B_j = \tilde{\omega}_{2222}\tilde{\omega}_{2112}\,\mu_j^2 + \tilde{\omega}_{1111}\tilde{\omega}_{2222} - \tilde{\omega}_{1122}\left(\tilde{\omega}_{1122} + \tilde{\omega}_{1212}\right) \equiv$$

$$\equiv -\tilde{\omega}_{1111}\tilde{\omega}_{1221}\,\mu_j^{-2} - \tilde{\omega}_{2112}\tilde{\omega}_{1221} + \tilde{\omega}_{1212}\left(\tilde{\omega}_{1122} + \tilde{\omega}_{1212}\right)$$

и в случае несжимаемых тел [2, (2.171), (2.170)]

$$\gamma_{21}^{(j)} = \left(\tilde{\aleph}_{2112}\mu_j^2 - \lambda_1 q_1 \lambda_2^{-1} q_2^{-1}\tilde{\aleph}_{1212}\right)B_j^{-1}\,;\ \gamma_{11}^{(j)} = \gamma_{21}^{(j)}\,;$$

$$\gamma_1^{(j)} = -\mu_j^2 B_j^{-1}\,;\ \ \gamma_2^{(j)} = \lambda_1 q_1 \lambda_2^{-1} q_2^{-1}\mu_j B_j^{-1}\,;$$

$$B_j = \tilde{\aleph}_{1212}\mu_j^2 - \lambda_1 q_1 \lambda_2^{-1} q_2^{-1}\tilde{\aleph}_{1221}$$

Функции $\Phi_1'(z_1)$ и $\Phi_2'(z_2)$ входящие в *(1)* искомые аналитические функции, λ_j - коэффициенты удлинения.

Теперь рассмотрим преднапряженную упругую полуплоскость $y_2 > 0$, вдоль края $y_2 = 0$ которой задана нагрузка

$$\tilde{Q}_{22} = -p_0(y_1) = -p_0(y_1 + nl)$$

$$\tilde{Q}_{21} = -t_0(y_1) = -t_0(y_1 + nl)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,\ l \text{ - период}$$

имеющая период период l.

Требуется определить напряженно-деформированное состояние во всей полуплоскости.

Краевые условия в этом случае можно записать следующим образом

$$2\,\mathrm{Re}\left[\Phi_1'(y_1) + \Phi_2'(y_1)\right] = -p_0(y_1),$$

$$2\,\mathrm{Re}\left[\gamma_{21}^{(1)}\mu_1\Phi_1'(y_1) + \gamma_{21}^{(2)}\mu_2\Phi_2'(y_1)\right] = t_0(y_1)$$

Решение задачи в вышепоставленной форме для упругой полуплоскости без начальных напряжений рассматривалось в работах Н.И. Мусхелишвили и И. Бтилла [1,5]. Периодическая контактная задача для полуплоскости, в случаях других краевых условий изучена в работе А.Н. Гузья, Б.Б. Рудницкого [3].

Для решения задачи в общем виде воспользуемся отображением

$$\varsigma_j = e^{\frac{2\pi i z_j}{l}}\ ,\quad z_j = \frac{l}{2\pi i}\ln\varsigma_j\,,$$

которое отображает полуплоскости $-\frac{1}{2}l < y_1 + \mathrm{Re}\,\mu_2 y_2 < \frac{1}{2}l$, $y_2 > 0$ на внутреннюю часть единичного круга

$$\sigma = e^{\frac{2\pi i y_1}{l}}$$

с разрезом.

Функция $\varphi\left(\varsigma_1\right)=\Phi_1'\left(\frac{l}{2\pi i}\ln\varsigma_1\right)$ является регулярной в плоскости разрезанной вдоль отрицательной части действительной оси. Эта функция является периодической относительно z_1 и приобретает одинаковые значения в геометрически совпадающих точках разреза, поэтому ее можно аналитически продолжить через разрез. Подобным же образом это можно сделать и для функции $\varphi_2\left(\varsigma_2\right)=\Phi_2'\left(\frac{l}{2\pi i}\ln\varsigma_2\right)$.

В дальнейшем, ввиду того, что по обозначениям φ_1 и φ_2 ясно, к которой из функций ς_j они отонсятся, мы будем опускать индекс j.

Таким образом, задачу можно свести к проблеме определения двух функций, регулярных во внутренней части единичного круга.

После конформного отображения краевых преобретают вид:

$$\begin{gathered}2\operatorname{Re}\left[\varphi_1(\sigma)+\varphi_2(\sigma)\right]=-p(\sigma),\\ 2\operatorname{Re}\left[\gamma_{21}^{(1)}\mu_1\varphi_1(\sigma)+\gamma_{21}^{(2)}\mu_2\varphi_2(\sigma)\right]=t(\sigma)\end{gathered}\qquad(2)$$

где

$$p(\sigma)=p_0\left(\frac{l}{2\pi i}\ln\sigma\right),\ t(\sigma)=t_0\left(\frac{l}{2\pi i}\ln\sigma\right)$$

Для определения функций $\varphi_1(\varsigma)$ и $\varphi_2(\varsigma)$ которые голоморфны внутри единичного круга и удовлетворяют на нем условиям *(2)* воспользуемся интегралом Шварца [4]. Тогда:

$$\varphi_1(\varsigma)+\varphi_2(\varsigma)=-\frac{1}{4\pi i}\int_\gamma p(\sigma)\frac{\sigma+\varsigma}{\sigma-\varsigma}\frac{d\sigma}{\sigma}+i\alpha_0\ ,$$

$$\gamma_{21}^{(1)}\mu_1\varphi_1(\varsigma)+\gamma_{21}^{(2)}\mu_2\varphi_2(\varsigma)=\frac{1}{4\pi i}\int_\gamma t(\sigma)\frac{\sigma+\varsigma}{\sigma-\varsigma}\frac{d\sigma}{\sigma}+i\beta_0$$

где α_0,β_0 - произвольные действительные постоянные. Находим функции $\varphi_1(\varsigma)$ и $\varphi_2(\varsigma)$ в следующем виде:

$$\varphi_1(\varsigma)=\frac{1}{4\pi i\left(\gamma_{21}^{(1)}\mu_1-\gamma_{21}^{(2)}\mu_2\right)}\int_\gamma\left[\gamma_{21}^{(2)}\mu_2p(\sigma)+t(\sigma)\right]\frac{\sigma+\varsigma}{\sigma-\varsigma}\frac{d\sigma}{\sigma}+\lambda_1$$

$$\varphi_2(\varsigma)=-\frac{1}{4\pi i\left(\gamma_{21}^{(1)}\mu_1-\gamma_{21}^{(2)}\mu_2\right)}\int_\gamma\left[\gamma_{21}^{(1)}\mu_1p(\sigma)+t(\sigma)\right]\frac{\sigma+\varsigma}{\sigma-\varsigma}\frac{d\sigma}{\sigma}+\lambda_2$$

где

$$\begin{gathered}\lambda_1=i\frac{\beta_0-\gamma_{21}^{(2)}\mu_2\alpha_0}{\gamma_{21}^{(1)}\mu_1-\gamma_{21}^{(2)}\mu_2},\\ \lambda_2=-i\frac{\beta_0-\gamma_{21}^{(1)}\mu_1\alpha_0}{\gamma_{21}^{(1)}\mu_1-\gamma_{21}^{(2)}\mu_2}\end{gathered}\qquad(3)$$

Постоянные λ_1 и λ_2 влияют только на напряжения $\widetilde{Q}_{12}$ и $\widetilde{Q}_{11}$ и представляют напряжения, вызванные равномерно распределенной нагрузкой в бесконечно удаленной точке $y_1 = \infty$.

В соответствии со значениями этих постоянных,

$$\widetilde{Q}^0_{11} = 2\alpha_0 \mathrm{Im}\frac{\left(\gamma^{(2)}_{21}\gamma^{(1)}_{11}\mu_1 - \gamma^{(1)}_{21}\gamma^{(2)}_{11}\mu_2\right)\mu_1\mu_2}{\gamma^{(1)}_{21}\mu_1 - \gamma^{(2)}_{21}\mu_2} -$$

$$-2\beta_0 \mathrm{Im}\frac{\gamma^{(1)}_{11}\mu_1^2 - \gamma^{(2)}_{22}\mu_2^2}{\gamma^{(1)}_{21}\mu_1 - \gamma^{(2)}_{21}\mu_2} \qquad (4)$$

$$\widetilde{Q}^0_{12} = 2\alpha_0 \mathrm{Im}\frac{\left(\gamma^{(1)}_{21} - \gamma^{(2)}_{21}\right)\mu_1\mu_2}{\gamma^{(1)}_{21}\mu_1 - \gamma^{(2)}_{21}\mu_2} - 2\beta_0 \mathrm{Im}\frac{\mu_1 - \gamma\mu_2}{\gamma^{(1)}_{21}\mu_1 - \gamma^{(2)}_{21}\mu_2}$$

Введем обозначения

$$\frac{\left(\gamma^{(2)}_{21}\gamma^{(1)}_{11}\mu_1 - \gamma^{(1)}_{21}\gamma^{(2)}_{11}\mu_2\right)\mu_1\mu_2}{\gamma^{(1)}_{21}\mu_1 - \gamma^{(2)}_{21}\mu_2} = A,$$

$$\frac{\gamma^{(1)}_{11}\mu_1^2 - \gamma^{(2)}_{11}\mu_2^2}{\gamma^{(1)}_{21}\mu_1 - \gamma^{(2)}_{21}\mu_2} = B,$$

$$\frac{\left(\gamma^{(2)}_{21} - \gamma^{(1)}_{21}\right)\mu_1\mu_2}{\gamma^{(1)}_{21}\mu_1 - \gamma^{(2)}_{21}\mu_2} = C \qquad (5)$$

$$\frac{\mu_1 - \mu_2}{\gamma^{(1)}_{21}\mu_1 - \gamma^{(2)}_{21}\mu_2} = D$$

$$A_1 = \mathrm{Re}\,A,\ A_2 = \mathrm{Im}\,A,\ B_1 = \mathrm{Re}\,B,\ B_2 = \mathrm{Im}\,B,$$

$$C_1 = \mathrm{Re}\,C,\ C_2 = \mathrm{Im}\,C,\ D_1 = \mathrm{Re}\,D,\ D_2 = \mathrm{Im}\,D$$

Тогда *(4)* приобретает следующий вид:

$$\widetilde{Q}^0_{11} = 2A_2\alpha_0 - 2B_2\beta_0$$

$$\widetilde{Q}^0_{12} = 2C_2\alpha_0 - 2D_2\beta_0$$

Из последних соотношений получается:

$$\alpha_0 = \frac{\widetilde{Q}^0_{11}D_2 - \widetilde{Q}^0_{12}B_2}{2\left(A_2D_2 - C_2B_2\right)}; \quad \beta_0 = \frac{\widetilde{Q}^0_{11}C_2 - \widetilde{Q}^0_{12}A_2}{2\left(A_2D_2 - C_2B_2\right)}$$

или

$$\lambda_1 = i\frac{\left(C_2 - \gamma^{(2)}_{21}\mu_2 D_2\right)\widetilde{Q}^0_{11} - \left(A_2 - \gamma^{(2)}_{21}\mu_2 B_2\right)\widetilde{Q}^0_{12}}{2\left(A_2D_2 - C_2B_2\right)\left(\gamma^{(1)}_{21}\mu_1 - \gamma^{(2)}_{21}\mu_2\right)};$$

$$\lambda_1 = -i\frac{\left(C_2 - \gamma^{(1)}_{21}\mu_1 D_2\right)\widetilde{Q}^0_{11} - \left(A_2 - \gamma^{(1)}_{21}\mu_1 B_2\right)\widetilde{Q}^0_{12}}{2\left(A_2D_2 - C_2B_2\right)\left(\gamma^{(1)}_{21}\mu_1 - \gamma^{(2)}_{21}\mu_2\right)};$$

Кроме того, из первых членов выражений *(3)* для $y_2 = \infty$ или для $\varsigma = 0$ получается

$$\varphi_1(0)=\frac{1}{2l\left(\gamma_{21}^{(1)}\mu_1-\gamma_{21}^{(2)}\mu_2\right)}\left(\gamma_{21}^{(2)}\mu_2 P+T\right),$$

$$\varphi_2(0)=-\frac{1}{2l\left(\gamma_{21}^{(1)}\mu_1-\gamma_{21}^{(2)}\mu_2\right)}\left(\gamma_{21}^{(2)}\mu_1 P+T\right)$$

Для составляющих напряжения $\widetilde{Q}_{11}$ и $\widetilde{Q}_{12}$ в бесконечности, соответствующих этим членам, получается

$$\widetilde{Q}_{11}^{*}=\mathrm{Re}\frac{\left(\gamma_{21}^{(2)}\gamma_{11}^{(1)}\mu_1-\gamma_{21}^{(1)}\gamma_{11}^{(2)}\mu_2\right)\mu_1\mu_2}{\gamma_{21}^{(1)}\mu_1-\gamma_{21}^{(2)}\mu_2}\frac{P}{l}+$$

$$+\mathrm{Re}\frac{\gamma_{11}^{(1)}\mu_1^2-\gamma_{11}^{(2)}\mu_2^2}{\gamma_{21}^{(1)}\mu_1-\gamma_{21}^{(2)}\mu_2}\frac{T}{l},$$

$$\widetilde{Q}_{11}^{*}=\mathrm{Re}\frac{\left(\gamma_{21}^{(1)}-\gamma_{21}^{(2)}\right)\mu_1\mu_2}{\gamma_{21}^{(1)}\mu_1-\gamma_{21}^{(2)}\mu_2}\frac{P}{l}-\mathrm{Re}\frac{\mu_1-\mu_2}{\gamma_{21}^{(1)}\mu_1-\gamma_{21}^{(2)}\mu_2}\frac{T}{l}$$

или
$$\widetilde{Q}_{11}^{*}=A_1\frac{P}{l}+B_1\frac{T}{l},\quad \widetilde{Q}_{12}^{*}=C_1\frac{P}{l}-D_1\frac{T}{l},$$

где A_1, B_1, C_1, D_1 определяются с *(5)*.

В результате для напряжений $\widetilde{Q}_{11}$ и $\widetilde{Q}_{12}$ в бесконечности получается:

$$\widetilde{Q}_{11}^{\infty}=\widetilde{Q}_{11}^{*}+\widetilde{Q}_{11}^{0}\quad \text{и}\quad \widetilde{Q}_{12}^{\infty}=\widetilde{Q}_{12}^{*}+\widetilde{Q}_{12}^{0}$$

Величины $\widetilde{Q}_{11}$ и $\widetilde{Q}_{12}$ остаются произвольными: их можно избрать согласно условиям на бесконечности (например, $\widetilde{Q}_{11}^{\infty}=0$ и $\widetilde{Q}_{12}^{\infty}=0$ или $\partial u_1/\partial y_1\big|_{y_1=\infty}=0$ $\partial u_2/\partial y_1\big|_{y_1=\infty}=0$).

В результате получается напряжения и деформации по формулумам *(1)*.

Известно, что для сжимаемых и несжимаемых тел с простейшими упругими потенциалами конкретной формы при неравных корнях получается:

$$\mathrm{Re}\,\mu_j=0$$

Тогда полученные выше соотношения при *простейших* упругих потенциалах несколько упрощаются.

Литература

[1]. Бирилла И. *Периодические смешанные задачи для анизотропных упругих пластинок*. Приложить теории функций в механике сплошной среды, I том, Наука, 1965.

[2]. Гузь А.Н. *Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями*. Киев, "Наук. думка", 1983.

[3]. Гузь А.Н., Рузницкий В.Б. *Периодическая контактная задача для полуплоскости с начальными напряжениями, усилинной упругими*