1997 ТОМ VII (XV)

УДК 539. 3

КАСУМОВ А.К.

К ТЕОРИИ МНОГОСЛОЙНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Рассмотрим тело объема V, состоящее из N однородных частей (компонент), жестко соединенных друг с другом [1]. Объем n- ой компоненты обозначим через $V(n)$ (впредь индекс, означающий, что величина относится к n- ой компоненте, будем писать в скобках). Поверхность n- ой компоненты может иметь три части: $S_{(n)\sigma}$, $S_{(n)u}$, $S_{(n)k}$, где:

$$S_{(n)\sigma} = S_{(n)} \cap S_{\sigma}; \quad S_{(n)u} = S_{(n)} \cap S_{u}$$

поверхность $S_{(n)k}$ - поверхность контакта n- ой компоненты с остальными. Величина S_u означает части граничной поверхности, на которой заданы перемещения $\overline{U}_i$, а S_σ- оставшаяся часть граничной поверхности, на которой заданы поверхностные усилия $\overline{T}$.

Напряженно-деформированное состояние n- ой компоненты определим из условия стационарности функционала Лагранжа, выписанного для n- ой компоненты в рамках вышеприведенных предположений.

$$J_{(n)} = \int\limits_{V_{(n)}} \left(\frac{1}{2} \sigma^{ij}_{(n)} e_{(n)ij} - F^{i}_{(n)} U_{(n)i} \right) dV - \int\limits_{S_{(n)T}} T^{i}_{(n)} U_{(n)i} dS, \tag{1}$$

где

$$T^{i}_{(n)} = \begin{cases} \overline{T}_i & x \in S_{(n)\sigma} \\ T^{i}_{(n)R} & x \in S_{(n)k} \end{cases}$$

Здесь $F_{(n)i}$ – действующая в точках n-й компонеты массовая сила, $T^{i}_{(n)R}$- компоненты поверхностных усилий, возникающих на границе контакта и, являющихся силами реакции. Поверхность $S_{(n)T}$ имеет вид:

$$S_{(n)T} = S_{(n)\sigma} \cup S_{(n)k}$$

Величины $\sigma^{ij}_{(n)}$ и $e_{(n)ij}$ определяются через перемещение $U_{(n)i}$ следующим образом [2]:

$$e_{(n)ij} = \frac{1}{2}\left(U_{(n)i,j} + U_{(n)j,i} \right) \tag{2}$$

$$\sigma^{ij}_{(n)} = E^{ijke}_{(n)} e_{(n)kl}, \tag{3}$$

где $E^{ijke}_{(n)}$ - упругие модули.

Варируемыми величинами функционала $J_{(n)}$ являются $U_{(n)i}$. Дополнительными условиями варирования являются соотношения *(2)*, *(3)* и граничные условия на $S_{(n)u}$. Нетрудно убедиться, что напряженно-деформированное состояние в точке n - ой компоненты тела определяется из условия стационарности $J_{(n)}$. При этом, сила реакции считается данной величиной. Силы реакции $T^{i}_{(n)R}$ определяются из условия контакта n - ой компо-ненты с оставшимися, а именно, из условия жесткого сцепления. Рассмотрим контакт двух компонент n - ой и m - ой. Поверхность контакта между ними обозначим через S_{nm}. На этой по-верхности имеем

$$\vec{U}_{(n)} = \vec{U}_{(m)}, \ \vec{T}_{(n)R} = -\vec{T}_{(m)R}, \ x \in S_{nm}, \qquad (4)$$

где первое равенство означает непрерывность перемещений, а второе равенство получается из условия равновесия в точках контактной поверхности. С учетом условия жесткого сцепления определив сумму поверхностных интегралов функционалов *(1)*, определим сумму $J_{(n)}$. Основываясь на *(4)* из *(1)* следует:

$$J = \sum_{n=1}^{N} J_{(n)} = \sum_{n=1}^{N} \int_{V_{(n)}} \left(\frac{1}{2} \sigma^{ij}_{(n)} e_{(n)ij} - F^{i}_{(n)} U_{(n)i} \right) dV - \int_{S_\sigma} \overline{T}^{i} U_i dS \qquad (5)$$

где дополнительными условиями при варировании J по U_i являются граничные условия на S_u и условие непрерывности перемещения на поверхности контакта. Итак, условие стационарности функционала *(5)* эквивалентно уравнениям равновесия многокомпонентного упругого тела, когда между компонентами имеется жесткое сцепление.

Многослойный стержень представим как стержень с кусочно однородным поперечным сечением [3]. Предположим, что ось стержня определяется кривой $\gamma = \gamma(s)$, где $S_0 \le S \le S_1$, S_0 и S_1 - координаты, соответственно, начала и конца кривой, не зависящие от номера рассматриваемой компоненты. Приняв условие жесткого сцепления между компонентами и для простоты, что $S_\sigma = 0$ функционал *(5)* преобразуется к виду [1]:

$$J = \sum_{n=1}^{N} \int_{S} \Big[\frac{1}{2} \Big(N_{(n)} e_{(n)ss_0} - M_{(n)y} \chi_{(n)y} + M_{(n)z} \chi_{(n)z} + 2Q_{(n)z} e_{(n)z} +$$

$$+ 2Q_{(n)y} e_{(n)y} + 2M_{(n)} e_{(n)k} \Big) - P_{(n)s} U_{(n)} - P_{(n)z} W_{(n)} - P_{(n)y} v_{(n)} \Big] dS \qquad (6)$$

где $N_{(n)}, M_{(n)y}, M_{(n)z}, Q_{(n)z}, Q_{(n)y}, M_{(n)}$ - усилия, моменты, перерезывающие усилия в n - ой компоненте, $e_{(n)ss_0}, e_{(n)z}, e_{(n)y}, e_{(n)k}, \chi_{(n)y}, \chi_{(n)z}$ - деформация, сдвиговые деформации, изгибные деформации точек n - ой компоненты, $P_{(n)s}, P_{(n)z}, P_{(n)y}$ - компоненты осредненных значений объемных сил, действующих в точках n - ой компоненты, $U_{(n)}, W_{(n)}, v_{(n)}$ - перемещение, прогибы точек осей n - ой компоненты. Деформации определяются через перемещение точек оси в рамках модели С.П.Тимошенко, усилия определяются через деформации физическими соотношениями теории упругих стержней [2]. Перемещения и вектор поворота $\{\psi_{(n)S}, \psi_{(n)y}, \psi_{(n)z}\}$ определены в "местной" системе координат $(S, Y_{(n)}, Z_{(n)})$, которая выбирается для каждой компоненты и не зависит от другой. Варьируемыми величинами в *(6)* являются $U_{(n)}, v_{(n)}, W_{(n)}, \psi_{(n)S}, \psi_{(n)y}, \psi_{(n)z}$. При этом дополнительными условиями при варировании *(6)* являются равенства

$$U_{(n)S} + \overline{Y}_{(n)}\psi_{(n)z} - \overline{Z}_{(n)}\psi_{(n)y} = U_{(m)S} + \overline{Y}_{(m)}\psi_{(m)z} - \overline{Z}_{(m)}\psi_{(m)y}$$

$$W_{(n)} - \overline{Y}_{(n)}\psi_{(n)S} = W_{(m)} - \overline{Y}_{(m)}\psi_{(m)S}, v_{(n)} + \overline{Z}_{(n)}\psi_{(n)S} = v_{(n)} + \overline{Z}_{(m)}\psi_{(m)S}, \qquad (7)$$

где начеркнутые координаты означают координаты на поверхности контакта. Условие *(7)* получено из представления вектора перемещения в рамках модели С.П. Тимошенко и из условия жесткого сцепления между компонентами.

Другой способ получения функционала для расчета многослойного стержня состоит в следующем: задать поведение поперечного сечения всего "пакета". Задание это основывается на поведении всего многослойного стержня. Цель такого задания- упростить выполнение условий *(7)*.

Примем гипотезу плоского сечения для всего "пакета" пространственного многослойного стержня. Для этого необходимо в "пакете" выбрать единную систему координат, относительно которой будем рассматривать поведение точек n- ой компоненты. Перемещение произвольной точки стержня возьмем в виде:

$$\vec{U} = \vec{\tau}\left(U + Y\psi_z - Z\psi_y\right) + \vec{n}\left(W - y\psi_S\right) + \vec{b}\left(v + z\psi_S\right), \qquad (8)$$

где $\left\{\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}\right\}$ - орты единой системы координат. Отметим, что перемещение точки n- ой компоненты так же определяется равенством *(8)*. Отсюда следует выполнение равенств *(7)*. Деформация произвольной точки стержня не зависит от n и определяется следующими равенствами:

$$e_S = e_{SS_0} + Z\chi_y + Y\chi_z = \frac{dU}{dS} - K_1 W + Z\left(-\frac{d\psi_y}{dS}\right) + Y\left(K_1\psi_S + \frac{d\psi_z}{dS}\right)$$

$$e_{Sy} = e_y + Ze_k = \frac{1}{2}\left(\psi_z - K_2 W + \frac{dv}{dS} + Z\frac{d\psi_S}{dS}\right) \qquad (9)$$

$$e_{zS} = e_z + Ye_k = \frac{1}{2}\left(-\psi_y + K_1 U + \frac{dv}{dS} + K_2 v - Y\frac{d\psi_S}{dS}\right),$$

где K_1 - кривизна оси, а K_2- кручение оси. Формулы *(9)* получены на основе пространственной модели С.П. Тимошенко. В силу равенств *(9)* из функционала *(6)* следует:

$$J = \sum_{n=1}^{N}\int_S\left[\frac{1}{2}\left(N_{(n)}e_{SS_0} - M_{(n)y}\chi_y + M_{(n)z}\chi_z + 2Q_{(n)z}e_z + 2Q_{(n)y}e_y + 2M_{(n)}e_k\right) -\right.$$

$$\left. - P_{(n)S}U - P_{(n)z}W - P_{(n)y}v\right]dS = \int_S\left[\frac{1}{2}\left(Ne_{SS_0} - M_y\chi_y + M_z\chi_z + 2Q_z e_z + 2Q_y e_y + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2Me_k\right) - P_S U - P_z W - P_y v\right]ds \qquad (10)$$

где были введены следующие обозначения:

$$N=\sum_{n=1}^{N}\int_{F_{(n)}}\sigma_{(n)ss}dF;\quad M_y=-\sum_{n=1}^{N}\int_{F_{(n)}}\sigma_{(n)ss}ZdF;\quad M_z=\sum_{n=1}^{N}\int_{F_{(n)}}\sigma_{(n)ss}YdF;$$

$$Q_y=\sum_{n=1}^{N}\int_{F_{(n)}}\sigma_{(n)Sy}dF;\quad Q_z=\sum_{n=1}^{N}\int_{F_{(n)}}\sigma_{(n)Sz}dF;\quad M=\sum_{n=1}^{N}\int_{F_{(n)}}\left(\sigma_{(n)Sy}Z-\sigma_{(n)Sz}Y\right)dF;\quad (11)$$

$$P_S=\sum_{n=1}^{N}\int_{F_{(n)}}F_{(n)S}dF;\quad P_y=\sum_{n=1}^{N}\int_{F_{(n)}}F_{(n)y}dF;\quad P_z=\sum_{n=1}^{N}\int_{F_{(n)}}F_{(n)z}dF.$$

При написании функционала *(10)* моментом от объемных сил пренебрежно по сравнению с их средними значениями. Варируемыми и независимыми величинами функционала *(10)* являются $U, v, W, \psi_S, \psi_y, \psi_z$. Дополнительными условиями при варировании являются задания торцевых условий на перемещения, т.е.

$$U\big|_{S=S_i}=\overline{U}_i;\quad v\big|_{S=S_i}=\overline{v}_i;\quad W\big|_{S=S_i}=\overline{W}_i;\quad \psi_S\big|_{S=S_i}=\overline{\psi}_{Si};$$

$$\psi_y\big|_{S=S_i}=\overline{\psi}_{yi};\quad \psi_z\big|_{S=S_i}=\overline{\psi}_{zi}\qquad i=0;1$$

Из вида функционала следует, что уравнения равновесия есть уравнения Эйлера функционала *(10)*.

Зависимость между $N, M_y, M_z,\ Q_y,\ Q_z, M$ и деформацией произвольной точки стержня, т.е. физические соотношения теории многослойных стержней могут быть определены с использованием *(9)* и *(11)*.

Из вида функционала *(10)* следует, что он не зависит от числа компонентов и совпадает с аналогичным функционалом однослойного стержня. Отсюда следует, что в рамках принятой гипотезы уравнения равновесия для моментов и усилий многослойного стержня совпадают с уравнениями равновесия для моментов и усилий однослойного стержня. Таким образом, введение гипотезы С.П. Тимошенко для всего "пакета" позволяет определить напряженно- деформированное состояние в произвольной точке пространственного стержня.

Литература

[1]. Бояршинов С.В. *Основы строительной механики машин.* М., 1973, с. 456

[2]. Вольмир А.К.*Статика и динамика сложных структур.*М., "Машиностроение", 1989, с. 247.

[3]. Касумов А.К. *Применение метода конечных элементов к расчету стержневых конструкций из композиционных материалов.* Баку, Изд.:"Азербайджан", 1996, с. 152.

Qasımov A.Q. ÇOXQATLI FƏZA ÇUBUQLAR NƏZƏRİYYƏSİNƏ DAİR

S.P. Timoşenko fərziyyəsi çərçivəsində çoxqatlı çubuqlara tə'sir momentlərin tarazlıq tənliyi, birqatlı çubuğa tə'sir momentinin tarazlıq tənliyi ilə üst- üstə düşür.

Kasumov A.K. TO THE THEORY OF MULTILAYER SPATIAL BARS

In the frames of S.P. Timoshenko hypothesis, balance equations for moments and efforts of multilayer bars coincide with balance equations for moments and effors of one- layer bar. The dependence of efforts from moving has been obtained.