УДК 622.247

КЕРИМОВ О.М., ГУЛГАЗЛИ А.С.

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОГО ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА С УЧЕТОМ ОБЪЕМНЫХ СИЛ

Как известно, внешние усилия, возникшие при контакте тонкостенных элементов конструкции, моделируют как объемные силы. Исходя из этого возникла необходимость обобщить известный вариационный принцип с учетом объемных сил.

Пусть на части S_σ поверхности тела объема V заданы поверхностные силы, на остальной части S_u-перемещения. Тогда уравнения равновесия с учетом геометрической нелинейности, связь между компонентами тензора деформации и напряжений и граничные условия в декартовой системе координат имеют следующий вид [1]

$$\left[\sigma_{ij}\left(u_{\alpha,i}+\delta_{\alpha j}\right)\right]_{,j}+\rho F_\alpha=0 \quad \alpha=1,2,3 \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{ij}-\nu\left(3\sigma\delta_{ij}-\delta_{ij}\right)\right] \quad i,j=1,2,3 \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{ij}\left(\sigma_{\alpha j}+u_{\alpha,j}\right)n_\alpha&=\overline{N}_i\\ u_i&=\overline{u}_i\end{aligned}\right. \quad \text{на} \quad \left.\begin{matrix}S_\sigma\\ S_u\end{matrix}\right\}, \tag{3}$$

где σ_{ij} - компоненты тензора напряжений, ε_{ij} - компоненты тензора упругой деформации, $\sigma=\dfrac{\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}\right)}{3}$, E - модуль Юнга. По повторяющимся индексам идет суммирование от 1 до 3, ρ - плотность, F_α - компоненты массовой силы, ν - коэффициент Пуассона, u_i - компоненты вектора перемещения, δ_{ij} - символ Кронекерра, n_i - напрявляющие косинусы нормали поверхности тела, $\overline{N}_i$ - проекция заданных внешних сил.

Докажем, что уравнения Эйлера функционала

$$J=\int_V\left\{\dot\sigma_{ij}\dot\varepsilon_{ij}+\frac{1}{2}\sigma_{ij}\dot u_{\alpha,i}\dot u_{\alpha,j}-\dot\sigma_{ij}\left[\frac{1}{2\text{E}}\left(\dot\sigma_{ij}-\nu\left(3\dot\sigma_{ij}\delta_{ij}-\sigma_{ij}\right)\right)\right]-\right.$$
$$\left.-\rho\dot F_i\dot U\right\}dU-\int_S\dot{\overline{N}}_i\dot U_i dS-\int_S\left(\dot U_i-\overline{U}_i\right)\dot{\overline{N}}dS \tag{4}$$

дают полную систему *(1)-(3)*. В уравнение *(4)* точки над величинами означают дифференцирование по любому возрастающему параметру.

Вычислим первую вариацию функционала *(4)*. Будем считать, что варьируются только скорости перемещений и напряжений [2]

$$\delta J=\int_V\Big\{\dot\sigma_{ij}\delta\dot\varepsilon_{ij}+\dot\varepsilon_{ij}\delta\dot\sigma_{ij}+\sigma_{ij}\dot U_{\alpha,i}\delta\dot U_{\alpha,j}-\frac{1}{2\mathrm{E}}\Big[\dot\sigma_{ij}-\nu\big(3\dot\sigma\delta_{ij}-\dot\sigma_{ij}\big)\Big]\delta\dot\sigma_{ij}-$$
$$-\dot\sigma_{ij}\left[\frac{1}{2\mathrm{E}}\big(\delta\dot\sigma_{ij}-\nu(3\delta_{ij}\delta\dot\sigma-\delta\ \dot\sigma_{ij})\big)\right]-\rho\dot F_i\delta\quad\dot U_i\Big\}dV-\int_{S_\sigma}\Big(N-\dot{\bar N}_i\Big)\delta\dot U_i dS+$$
$$+\int_{S_u}\Big(\dot U_i-\dot{\bar U}_i\Big)\delta N_i dS \qquad (5)$$

Здесь учтено, что $\delta\bar N_i=0$ на S_σ и $\delta\dot U_i=0$ на S_u. Преобразуем члены, входящие в уравнения *(5)*

$$\left.\begin{aligned}&1)\int_V\dot\sigma_{ij}\delta\dot\varepsilon_{ij}dV=\int_V\Big\{\dot\sigma_{ij}\frac{1}{2}\Big[\big(\delta_{\alpha i}+\dot U_{\alpha,i}\big)\delta\dot U_{\alpha,j}+\big(\delta_{\alpha j}+\dot U_{\alpha,i}\big)\Big]\Big\}dV=\\&=\int_V\dot\sigma_{ij}\big(\delta\ \ {}_{\alpha i}+\dot U_{\alpha,i}\big)\delta\dot U_{\alpha,j}dV=\int_S\dot\sigma\ \ {}_{ij}\big(U_{\alpha,i}+\delta_{\alpha i}\big)n_j\ \ \delta\dot U_\alpha dS-\\&-\int_V\Big[\dot\sigma_{ij}\big(U_{\alpha,i}+\delta_{\alpha i}\big)\Big]\ \ {}_{,j}\ \ \delta U_\alpha dV\\&2)\int_V\dot\sigma_{ij}\dot U_{\alpha,i}\delta\dot U_{\alpha,j}dV=\int_S\dot\sigma_{ij}\dot U_{\alpha,i}n_j\delta\dot U_\alpha dS-\int_V\big(\sigma_{\alpha j}\dot U_{\alpha,i}\big)_{,j}\delta\dot U_\alpha dV\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

$$\left.\begin{aligned}&3)\quad\int_V\frac{1}{2\mathrm{E}}\big(\dot\sigma_{ij}\delta\dot\sigma_{ij}+\delta\dot\sigma_{ij}\dot\sigma_{ij}\big)dV=\int_V\frac{1}{\mathrm{E}}\dot\sigma_{ij}\delta\dot\sigma_{ij}dV\\&4)\quad\int_V\Big(\frac{\nu}{2\mathrm{E}}\delta\dot\sigma_{ij}3\dot\sigma\delta_{ij}+\frac{\nu}{2\mathrm{E}}\dot\sigma_{ij}3\delta_{ij}\delta\dot\sigma\Big)dV=\int_V\frac{3\nu}{2\mathrm{E}}\big(\dot\sigma\delta_{ij}\delta\dot\sigma_{ij}+\\&\qquad+\dot\sigma_{ij}\delta\dot\sigma\delta_{ij}\big)dV\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Здесь учтено, что $\delta\dot\sigma=\delta\dot\sigma_{ke}\delta_{ke}$ и $\dot\sigma_{ij}\dot\delta\sigma_{ke}\delta_{ke}\delta_{ij}=\dot\sigma\delta_{ke}\delta\dot\sigma_{ke}$, где n_j - компоненты нормали к поверхности S.

С учетом *(6)* в *(5)* для первой вариации функционала (4) получим:

$$\delta J=\int_S\Big[\sigma_{ij}\big(U_{\alpha,i}+\delta_{\alpha i}\big)n_i\Big]^{\bullet}\delta\dot U_\alpha dS-\int_V\Big\{\Big[\sigma_{ij}\big(U_{\alpha i}+\delta_{\alpha i}\big)\Big]^{\bullet}_{,j}+\rho\dot F_\alpha\Big\}d\dot U_\alpha dV+$$
$$\int_V\Big\{\dot\varepsilon_{ij}-\frac{1}{\mathrm{E}}\Big[\dot\sigma_{ij}-\nu\big(3\dot\sigma\delta_{ij}-\dot\sigma_{ij}\big)\Big]\Big\}d\dot\sigma_{ij}dV-\int_{S_\sigma}\dot{\bar N}_i\delta\dot U_i dS+\int_{S_u}\Big(\dot U_i-\dot{\bar U}_i\Big)\delta N dS\quad(7)$$

Приравнивая нулю δJ и пользуясь основной леммой вариационного исчисления, получим:

$$\left.\begin{aligned}&\Big[\sigma_{ij}\big(U_{\alpha,i}+\delta_{\alpha i}\big)\Big]^{\bullet}_{,j}+\rho\dot F_i=0\\&\dot\varepsilon_{ij}=\frac{1}{\mathrm{E}}\Big[\dot\sigma_{ij}-\nu\big(3\dot\sigma\delta_{ij}-\dot\sigma_{ij}\big)\Big]\\&\Big[\sigma_{ij}\big(U_{\alpha,j}+\delta_{\alpha j}\big)n_\alpha\Big]^{\bullet}=\dot{\bar N}_i\qquad \text{на}\quad S_\sigma\\&\dot U_i=\dot{\bar U}_i\qquad\qquad \text{на}\quad S_u\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

Начальное условие для системы (8) будет: при $P=P_0$

$$\sigma_{ij}(P)=\sigma^{\circ}_{ij};U_i(P_0)=U^{\circ}_i$$

где P - монотонно возрастающий параметр.

Тогда интегрируя систему *(8)*, получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\sigma_{ij}\left(U_{\alpha,i}+\delta_{\alpha i}\right)\right]_{,j}+\rho F_i=\left[\sigma^{\circ}_{ij}\left(U^{\circ}_{\alpha,i}+\delta_{\alpha i}\right)\right]_{,j}+\rho F_i\\
&\varepsilon_{ij}-\frac{1}{E}\left[\sigma_{ij}-\nu\left(3\sigma\delta_{ij}-\sigma_{ij}\right)\right]=\varepsilon^{\circ}_{ij}-\frac{1}{E}\left[\sigma^{\circ}_{ij}-\nu\left(3\sigma^{\circ}\delta_{ij}-\sigma^{\circ}_{ij}\right)\right]\\
&\sigma_{ij}\left(U_{\alpha,j}+\delta_{\alpha j}\right)n_\alpha-\overline{N}_i=\sigma^{\circ}_{ij}\left(U^{\circ}_{\alpha,j}+\delta_{\alpha j}\right)n_\alpha-N^{\circ}_i\\
&U_i-\overline{U}_i=U^{\circ}_i-\overline{U}^{\circ}_i
\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

Учитывая, что при $P=P_0$ выполнялись условия *(1)-(3)*, имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\sigma^{\circ}_{ij}\left(U^{\circ}_{,i}+\delta_{\alpha i}\right)\right]_{,j}+\rho F_i=0\\
&\varepsilon^{\circ}_{ij}=\frac{1}{E}\left[\sigma^{\circ}_{ij}-\nu\left(3\sigma^{\circ}\delta_{ij}-\sigma^{\circ}_{ij}\right)\right]\\
&\sigma^{\circ}_{ij}\left(U_{\alpha,j}+\delta_{\alpha j}\right)n_\alpha=\overline{N}^{\circ}_i\\
&U_i=U^{\circ}_i
\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

Подставляя *(10)* в *(9)*, получаем

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\sigma_{ij}\left(U_{,i}+\delta_{\alpha i}\right)\right]_{,j}+\rho F_i=0\\
&\varepsilon_{ij}-\frac{1}{E}\left[\sigma_{ij}-\nu\left(3\sigma\delta_{ij}-\sigma_{ij}\right)\right]=0\\
&\sigma_{ij}\left(U_{\alpha,j}+\delta_{\alpha j}\right)n_\alpha-\overline{N}_i=0\\
&U_i-U^{\circ}_i=0
\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

Система *(11)* совпадает с уравнениями *(1)-(3)*.

Литература

[1]. Аманзаде Ю.А. *Теория упругости.* М.,"Высшая школа", 1976.

[2]. Ализаде А.Н., Гулгазли А.С. *Вариационный принцип для определения напряженно-деформированного состояния упругой оболочки при облучении с учетом геометрической нелинейности.* Изв. АН Аз. ССР, Сер. физ.-тех. и мат. наук, 1979, №6.

Kərimov İ.M., Gülgəzli

HƏCİM QÜVVƏLƏR NƏZƏRƏ ALINMAQLA BİR VARİYASİYA PRİNSİPİNİN ÜMUMLƏŞDİRİLMƏSİ

Məqalədə həcmi qüvvələr nəzərə alınmaqla məlum variyasiya prinsipi ümumiləşdirilmişdir.

Karimov O.M., Gulgazli A.S.

GENERALIZATION OF ONE VARIATION PRINCIPAL CONSIDERING VOLIMETRIC

The known variation principle considering volumetric powers is generalized in this article.