УДК 539.3

НАСИБОВ В.Г.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЛН В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С РЕАКЦИЕЙ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ.

Можно считать [1], что одномерная постановка описывает основные свойства, присущие распространению волн в крупных кровеносных сосудах, моделируемых как неоднородные по длине деформируемые трубки переменного сечения с протекающей жидкостью. Однако выявление влияния вязкости жидкости на профиль скорости, неоднородности стенок по толщине и т.д. возможно только при рассмотрении трубки, как оболочки. Поэтому здесь рассматривается задача о распространении осесимметричных волн в цилиндрической оболочке с реакцией, заполненной несжимаемой жидкостью. Оболочка считается ортотропной как однослойной, так и трёхслойной.

§1.Основные уравнения безмоментной теории упругих ортотропных оболочек, обладающих реакцией.

В настоящее время проблема построения моделей деформируемых твёрдых тел, обладающих реакцией (применительно к живым организмам, биофактором) является одной из актуальнейших. Это обстоятельство обусловлено развитием, например, таких направлений, как механохимия и биомеханика. В этой связи в этом параграфе мы займёмся выводом основных уравнений движений однослойной тонкостенной упругой ортотропной оболочки, материал которой обладает реакцией, с учётом гипотез Кирхгофа- Лява. Следуя [2], [3], учёт реакции (биофактора), изменяющей величины "пассивных" напряжений σ_1^0, σ_2^0 и σ_{12}^0, осуществим таким образом. Будем полагать, что реакция элемента оболочки зависит от всех пассивных напряжений в пердшествующий, бесконечно близкий момент времени

$$N_k = R_k\left\{\sigma_1^0(t-\tau), \sigma_2^0(t-\tau), \sigma_{12}^0(t-\tau)\right\}, \quad \tau << t \quad \left(k=\overline{1,3}\right). \qquad (1.1)$$

Зависимости *(1.1)* предполагают одновременность реакций по направлениям при различных их значениях. Теперь для получения уравнений движения конкретизируем вид *(1.1)* и примем их линейными

$$\begin{aligned} N_1 &= A_1\sigma_1^0(t-\tau)+A_2\sigma_2^0(t-\tau)+A_3\sigma_{12}^0(t-\tau), \\ N_2 &= B_1\sigma_1^0(t-\tau)+B_2\sigma_2^0(t-\tau)+B_3\sigma_{12}^0(t-\tau), \qquad (1.2) \\ N_3 &= C_1\sigma_1^0(t-\tau)+C_2\sigma_2^0(t-\tau)+C_3\sigma_{12}^0(t-\tau). \end{aligned}$$

Отметим, что весь ход дальнейших рассуждений ни в коей мере не накладывает ограничений на зачения эмпрических постоянных A_k, B_k, C_k $\left(k=\overline{1,3}\right)$. Однако, исходя из биофизических соображений, их совокупность должна быть такой, чтобы истинные напряжения σ_1, σ_2 и σ_{12} были меньше "пассивных". С учётом сказанного, имеет место следующее представление

$$\sigma_1(t)=\sigma_1^0(t)+N_1,\quad \sigma_2(t)=\sigma_2^0(t)+N_2,\quad \sigma_{12}(t)=\sigma_{12}^0(t)+N_3 \qquad (1.3)$$

В силу малости $\tau\ (\tau \ll t)$, ограничиваясь первым членом разложения в *(1.2)*, соотношения *(1.3)* перепишем в виде

$$\sigma_1(t)=(1+A_1)\sigma_1^0(t)+A_2\sigma_2^0(t)+A_3\sigma_{12}^0(t)-$$
$$-\tau\left(A_1\frac{\partial\sigma_1^0(t)}{\partial t}+A_2\frac{\partial\sigma_2^0(t)}{\partial t}+A_3\frac{\partial\sigma_{12}^0(t)}{\partial t}\right),$$
$$\sigma_2(t)=B_1\sigma_1^0(t)+(1+B_2)\sigma_2^0(t)++B_3\sigma_{12}^0(t)-$$
$$-\tau\left(B_1\frac{\partial\sigma_1^0(t)}{\partial t}+B_2\frac{\partial\sigma_2^0(t)}{\partial t}+B_3\frac{\partial\sigma_{12}^0(t)}{\partial t}\right),$$
$$\sigma_{12}(t)=C_1\sigma_1^0(t)+C_2\sigma_2^0(t)+(1+C_3)\sigma_{12}^0(t)-$$
$$-\tau\left(C_1\frac{\partial\sigma_1^0(t)}{\partial t}+C_2\frac{\partial\sigma_2^0(t)}{\partial t}+C_3\frac{\partial\sigma_{12}^0(t)}{\partial t}\right). \qquad (1.4)$$

Суммируя нормальные и касательные напряжения, получим результирующие истинные усилия

$$T_1(t)=(1+A_1)T_1^0(t)+A_2T_2^0+A_3S^0(t)-$$
$$-\tau\left(A_1\frac{\partial T_1^0(t)}{\partial t}+A_2\frac{\partial T_2^0(t)}{\partial t}+A_3\frac{\partial S^0(t)}{\partial t}\right),$$
$$T_2(t)=B_1T_1^0(t)+(1+B_2)T_2^0(t)+B_3S^0(t)-$$
$$-\tau\left(B_1\frac{\partial T_1^0(t)}{\partial t}+B_2\frac{\partial T_2^0(t)}{\partial t}+B_3\frac{\partial S^0(t)}{\partial t}\right),$$
$$S(t)=C_1T_1^0(t)+C_2T_2^0(t)+(1+C_3)S^0(t)-$$
$$-\tau\left(C_1\frac{\partial T_1^0(t)}{\partial t}+C_2\frac{\partial T_2^0(t)}{\partial t}+C_3\frac{\partial S^0(t)}{\partial t}\right), \qquad (1.5)$$

где "пассивные" усилия T_1^0, T_2^0, S^0 имеют обычный вид

$$T_k^0=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_k^0(t)\,dz,\quad (k=1,2),\ \text{а}\ S^0=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{12}^0(t)\,dz.$$

В гауссовых координатах α,β выпишем уравнения движения оболочки

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BT_1)-T_0\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(A^2S\right)+ABP_x=X,$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(AT_2)-T_1\frac{\partial A}{\partial\beta}+\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\alpha}(B^2S)+ABP_2=Y\,,$$
$$-(K_1T_1+K_2T_2)+P_r=Z\,. \qquad (1.6)$$

Здесь X, Y, Z - инерционные силы, A и B - коэффициенты Ляме первой квадратичной формы срединной поверхности, K_1 и K_2 - главные кривизны, P_x, P_2 и P_r - внешние силы, действующие на оболочку. Усилия T_1^0, T_2^0, S^0 связаны с деформациями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$ срединной поверхности законом Гука, который в случае ортотропии имеет вид

$$T_1^0=\frac{E_1h}{1-\nu_1\nu_2}(\varepsilon_1+\nu_2\varepsilon_2),\quad T_2^0=\frac{E_2h}{1-\nu_1\nu_2}(\varepsilon_2+\nu_1\varepsilon_1),\quad S^0=G_{12}h\varepsilon_{12}\,, \qquad (1.7)$$

а деформации- с перемещениями U, ϑ, W геометрическими соотношениями

$$\varepsilon_1=\frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial\alpha}+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\vartheta+k_1W\,,\qquad \varepsilon_2=\frac{1}{B}\frac{\partial\vartheta}{\partial\beta}+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}U+k_2W\,,$$
$$\varepsilon_{12}=\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{U}{A}\right)+\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\vartheta}{B}\right), \qquad (1.8)$$

где G_{12} - модуль сдвига, E_1 и E_2 - соответственно модули упругости в осевом и радиальном направлениях, h - толщина, а ν_1 и ν_2 - коэффициенты Пуассона, которые должны удовлетворять соотношению Максвелла

$$E_1\nu_2=E_2\nu_1\,.$$

Подставив теперь *(1.5)*, *(1.7)* и *(1.8)* в систему уравнений *(1.6)*, можно получить систему трёх линейных уравнений в частных производных, каждое из которых, в отличие от классического случая, повышается на один порядок относительно компонентов вектора перемещения U, ϑ и W. Эти уравнения в общем случае имеют громоздкий вид. Их удобнее состовлять непосредственно для конкретной системы координат. Так как нас интересует замкнутая круговая цилиндрическая оболочка радиуса R, то введя в нём координаты $x=\alpha, \theta=\beta$ и учитывая, что $A=1, B=R, K_1=0$, $K_2=R^{-1}$ выпишем соответствующие уравнения

$$\sum_{j=1}^{3}\left[\left(L_{ij}+K_{ij}\right)U_j-\tau\frac{\partial}{\partial t}L_{ij}U_j\right]+RP_i=R\rho_0h\frac{\partial^2U_j}{\partial t^2}\,,\quad \left(i=\overline{1,3}\right). \qquad (1.9)$$

Здесь принято $U_1=U, U_2=\vartheta, U_3=W, P_1=P_x, P_3=P_r$, а ρ_0 - плотность материала оболочки. Линейные операторы L_{ij} и K_{ij} в *(1.9)* записываются следующим образом:

$$L_{11}=R\alpha_1(A_1+\nu_2A_2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\left[\alpha_1(C_1+\nu_2C_2)+A_3G_{12}h\right]\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+\frac{1}{3}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\,,$$

$$K_{11}=R\alpha_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{R}G_{12}h\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\,,$$

$$L_{12}=RA_3G_{12}h\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\left[\alpha_2(A_2+\nu_1A_1)+C_3G_{12}h\right]\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+\frac{1}{R}\alpha_2(C_2+\nu_1C_1)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\,,$$

$$K_{12}=(\alpha_1\nu_2+G_{12}h)\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta},\ K_{21}=K_{12},\ L_{13}=\alpha_2\left[(A_2+\nu_1A_1)\frac{\partial}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{R}(C_2+\nu_1C)\frac{\partial}{\partial\theta}\right],\ K_{13}=\alpha_1\nu_2\frac{\partial}{\partial x},\ K_{31}=K_{13},\ L_{21}=R\alpha_1(C_1+\nu_2C_2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+$$

$$+[\alpha_1(B_1+\nu_2B_2)+C_3G_{12}h]\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+\frac{1}{R}B_3G_{12}h\frac{\partial^2}{\partial\theta^2};\ K_{22}=\frac{1}{R}\alpha_2h\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+$$

$$+RG_{12}h\frac{\partial^2}{\partial x^2},\ L_{23}=\alpha_2\left[\frac{1}{R}(B_2+\nu_1B_1)\frac{\partial}{\partial\theta}+(C_2+\nu_1C_1)\frac{\partial}{\partial x}\right],\ K_{23}=\frac{1}{R}\alpha_2\frac{\partial}{\partial x},$$

$$K_{32}=K_{23},\ L_{31}=-\alpha_1(B_1+\nu_2B_2)\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{R}B_3G_{12}h\frac{\partial}{\partial\theta},\ L_{32}=-\frac{1}{R}\alpha_2(B_2+\nu_1B_1)\frac{\partial}{\partial\theta}-$$

$$-B_3G_{12}h\frac{\partial}{\partial x},\ L_{33}=-\frac{1}{R}\alpha_2(B_2+\nu_1B_1),\ K_{33}=-\frac{1}{R}\alpha_2,$$

где для сокращения записи введены следующие обозначения

$$\alpha_s=\frac{E_sh}{1-\nu_1\nu_2},\quad s=1,2.$$

Уравнения движения без реакции автоматически получаются, если положить $A_1=A_2=A_3=B_1=B_2=B_3=C_1=C_2=C_3=0$. Случай изотропии реализуется при $E_1=E_2=E,\ \nu_1=\nu_2=\nu$, а $G_{12}=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$. В частности, при осесимметричности $(A_3=B_3=C_1=C_2=C_3=0)$ линейные операторы примут вид

$$L_{11}=R\alpha_1(A_1+\nu_2A_2)\frac{\partial^2}{\partial x^2},\ K_{11}=R\alpha_1\frac{\partial^2}{\partial x^2},\ L_{12}=K_{12}=L_{21}=K_{21}=L_{23}=K_{23}=$$

$$=L_{22}=L_{32}=K_{32}=0,$$

$$L_{13}=\alpha_2(A_2+\nu_1A_1)\frac{\partial}{\partial x},\ K_{13}=\nu_2\alpha_1\frac{\partial}{\partial x},\ K_{22}=RG_{12}h\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$$L_{31}=-\alpha_1(B_1+\nu_2B_2)\frac{\partial}{\partial x},\ K_{31}=-K_{13},\ L_{33}=-\frac{1}{R}\alpha_2(B_2+\nu_1B_1),\ K_{33}=-\frac{1}{R}\alpha_2$$

и в этом случае уравнения движения *(1.9)* запишутся следующим образом

$$D_0\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+D_1\frac{\partial W}{\partial x}-\tau\frac{\partial}{\partial t}\left(D_2\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+D_3\frac{\partial W}{\partial x}\right)+RP_x=R\rho_0h\frac{\partial^2U}{\partial t^2},$$

$$-K_0\frac{\partial U}{\partial x}-K_1W+\tau\frac{\partial}{\partial t}\left(K_2\frac{\partial U}{\partial x}+K_3W\right)+RP_r=R\rho_0h\frac{\partial^2W}{\partial t^2}.\qquad(1.10)$$

Здесь

$$D_0=R\alpha_1(A_1+\nu_2A_2+1),\ D_1=\alpha_2[A_2+\nu_1(1+A_1)],\ D_2=R\alpha_1(A_1+\nu_2A_2),$$

$$D_3=\alpha_2(A_2+\nu_1A_1)$$

$$K_0=\alpha_1[B_1+\nu_2(1+B_2)],\ K_1=\frac{\alpha_2}{R}(B_2+\nu_1B_1+1),$$

$$K_2 = \alpha_2\left[B_1 + \nu_2 B_2\right],\ K_3 = \frac{\alpha_2}{R}\left(B_2 + \nu_1 B_1\right).$$

§2. Осесимметричные уравнения движения трёхслойной безмоментной оболочки с реакцией.

В различных конструкциях в качестве несущих элементов используются тонкостенные оболочки, изготовленные из композиционных материалов, которым присуще свойство кусочной неоднородности. Подобное строение наблюдается, в частности, у крупных кровеносных сосудов [1], состоящих из трёх концентрических слоёв и их механические свойства обуславливаются, главным образом, свойствами средней сосудистой оболочки, которой и присуще активное деформирование. Поэтому выведем осесимметричные уравнения движения цилиндрической безмоментной трёхслойной ортотропной упругой оболочки, раздел слоёв которой симметричен относительно срединной поверхности, где средний слоё обладает реакцией (слои оболочки обладают различными упругими свойствами и имеют толщины h_1, h_2, $h_3 = h_1$ и плотности ρ_{0k} $\left(k = \overline{1,3}\right)$). Для этого слои оболочки пронумеруем от 1 до 3, при этом 1 соответствует внутреннему слою. Координаты внутренней и внешней границ k - го слоя h_k обозначим соответственно через z_k и z_{k+1}. Толщина оболочки от z_1 до z_4 равна h. В дальнейшем все величины с индексом k будут соответствовать k -ому слою. Условия контакта между слоями заключается в равенстве перемещений на поверхностях раздела и в отсутствии взаимного давления слоёв. Как и прежде, будем использовать гипотезы Кирхгофа-Лява, при которых отмеченные условия сопряжения выполняются автоматически. Тогда для пакета в целом осесимметричные деформации элемента оболочки записываются известным образом

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{W}{R} \tag{2.1}$$

Интегрируя напряжения от z_2 до z_3, для среднего слоя выпишем связь между истинными и пассивными усилиями:

$$T_1^{(2)}(t) = (1 + A_1)T_1^{(2)0} + A_2 T_2^{(2)0} - \tau\left(A_1 \frac{\partial T_1^{(2)0}}{\partial t} + A_2 \frac{\partial T_2^{(2)0}}{\partial t}\right),$$

$$T_2^{(2)}(t) = B_1 T_1^{(2)0} + (1 + B_2)T_2^{(2)0} - \tau\left(B_1 \frac{\partial T_1^{(2)0}}{\partial t} + A_2 \frac{\partial T_2^{(2)0}}{\partial t}\right). \tag{2.2}$$

Пассивные усилия $T_1^{(2)0}(t)$ и $T_2^{(2)0}(t)$ связаны с деформациями с помощью следующих зависимостей

$$T_1^{(2)0} = \frac{E_1^{(2)} h_2}{1 - \nu_1^{(2)}\nu_2^{(2)}}\left(\varepsilon_1 + \nu_2^{(2)}\varepsilon_2\right), \quad T_2^{(2)0} = \frac{E_2^{(2)} h_2}{1 - \nu_1^{(2)}\nu_2^{(2)}}\left(\varepsilon_2 + \nu_1^{(2)}\varepsilon_1\right) \tag{2.3}$$

Усилия в крайних слоях определяются как

$$T_1^{(k)} = \frac{E_1^{(k)} h_k}{1 - \nu_1^{(k)}\nu_2^{(k)}}\left(\varepsilon_1 + \nu_2^{(k)}\varepsilon_2\right), \quad T_2^{(k)} = \frac{E_2^{(k)} h_k}{1 - \nu_1^{(k)}\nu_2^{(k)}}\left(\varepsilon_2 + \nu_1^{(k)}\varepsilon_1\right), \quad k = 1,3 \tag{2.4}$$

При этом интегрирование напряжений при $k=1$ ведется от z_1 до z_2 и от z_3 до z_4 при $k=3$. Тогда, окончательно, усилия в элементе оболочки можно записать в виде следующих равенств

$$T_1 = T_1^{(1)} + T_1^{(2)} + T_1^{(3)}, \quad T_2 = T_2^{(1)} + T_2^{(2)} + T_2^{(3)} \tag{2.5}$$

Уравнения движения в усилиях и перемещениях имеют вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + P_x = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \cdot \sum_{k=1}^{3} \rho_{0k} h_k, \quad -\frac{1}{R} \cdot T_2 + P_r = \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \cdot \sum_{k=1}^{3} \rho_{0k} h_k \tag{2.6}$$

Подставив в эти уравнения величины усилий *(2.5)* с учётом зависимостей *(2.3)*, *(2.4)* и выражений *(2.1)* и *(2.2)*, после несложных преобразований, придём к уравнениям движения в перемещениях

$$D_0 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial W}{\partial x} - \tau \frac{\partial}{\partial t}\left(D_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + D_3 \frac{\partial W}{\partial x} \right) + RP_x = R \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \sum_{k=1}^{3} \rho_{0k} h_k,$$

$$-K_0 \frac{\partial U}{\partial x} - K_1 W + \tau \frac{\partial}{\partial t}\left(K_2 \frac{\partial U}{\partial x} + K_2 W \right) + RP_r = R \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \sum_{k=1}^{3} \rho_{0k} h_k, \tag{2.7}$$

где для краткости записи введены следующие обозначения

$$D_0 = R\left[\alpha_1^{(1)} + (1 + A_1)\alpha_1^{(2)} + A_2 \alpha_2^{(2)} \nu_1^{(2)} + \alpha_1^{(3)}\right], \quad D_1 = \alpha_1^{(1)} \nu_2^{(2)} + (1 + A_1)\alpha_1^{(2)} \nu_2^{(2)} +$$

$$+ A_2 \alpha_2^{(2)} + \alpha_1^{(3)} \nu_2^{(3)}, \quad D_2 = R\left(A_1 \alpha_1^{(2)} + A_2 \alpha_2^{(2)} \nu_1^{(2)}\right), \quad D_3 = A_1 \alpha_1^{(2)} \nu_2^{(2)} + A_2 \alpha_2^{(2)},$$

$$K_0 = \alpha_2^{(1)} \nu_1^{(1)} + B_1 \alpha_1^{(2)} + (1 + B_2)\alpha_2^{(2)} \nu_1^{(2)} + \alpha_2^{(3)} \nu_1^{(3)}, \quad K_1 = \frac{1}{R}\left[\alpha_2^{(1)} + B_1 \alpha_1^{(2)} \nu_2^{(2)} +\right.$$

$$\left. + (1 + B_2)\alpha_2^{(2)} + \alpha_2^{(3)}\right], K_2 = B_1 \alpha_1^{(2)} + B_2 \alpha_2^{(2)} \nu_1^{(2)}, \quad K_3 = \frac{1}{R}\left(B_1 \alpha_1^{(2)} \nu_2^{(2)} + B_2 \alpha_2^{(2)}\right), \tag{2.8}$$

а $\alpha_1^{(k)}$ и $\alpha_2^{(k)}$ $\left(k = \overline{1,3}\right)$ определяются по формулам

$$\alpha_1^{(k)} = \frac{E_1^{(k)} h_k}{1 - \nu_1^{(k)} \nu_2^{(k)}}, \quad \alpha_2^{(k)} = \frac{E_2^{(k)} h_k}{1 - \nu_1^{(k)} \nu_2^{(k)}}. \tag{2.9}$$

Здесь ρ_{0k}, h_k - соответственно плотность и толщина k-го слоя оболочки, P_x и P_r - компоненты вектора давлений на оболочку со стороны жидкости, R - радиус срединой поверхности оболочки, U и W - перемещения оболочки, а $E_1^{(k)}, E_2^{(k)}$ и $\nu_1^{(k)}, \nu_2^{(k)}$- модули Юнга и коэффициенты Пуассона материалов k-го слоя оболочки в направлениях координатных осей соответственно.

Таким образом, получена система двух линейных уравнений в частных производных, каждое из которых в отличии от классического случая повышается на один порядок по времени относительно компонентов вектора перемещения. Данная модель сводится в частных случаях к известным. Приняв $h_1 = h_3 = 0$ в (6.2.9), будем иметь $\alpha_1^{(1)} = \alpha_1^{(3)} = \alpha_2^{(1)} = = \alpha_2^{(3)} = 0$. В этом случае, приняв $h_2 = h$, придём к динамическим уравнениям для однослойной оболочки с реакцией. Такие уравнения для изотропного материала можно получить при $E_1 = E_2 = E$ и $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Положив далее $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0$ получим соответствующие уравнения без реакции. Трёхслойную оболочку без реакции можно получить, отбрасывая в *(2.8)* члены, содержащие A_1, A_2, B_1 и B_2.

§3. Уравнения ламинарного движения вязкой несжимаемой жидкости и кинематические контактные условия.

Теперь выпишем систему уравнений, описывающую движение сплошной несжимаемой вязкой жидкости. При описании движения вязкой несжимаемой жидкости, определяющим уравнением для которой служит классический ньютоновский закон, имеющий в произвольной криволинейной системе координат вид

$$\rho^{kj} = -Pg^{kj} + 2\mu g^{k\alpha} g^{j\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \qquad (3.1)$$

пользуются уравнением Навье- Стокса

$$\rho\left(\frac{\partial \vartheta^k}{\partial t} + \vartheta^j \nabla_j \vartheta^k\right) = -g^{kj}\nabla_j P + \mu\Delta\vartheta^k, \quad \left(k = \overline{1,3}\right) \qquad (3.2)$$

Здесь P - давление, g^{kj} - контравариантный метрический тензор, μ - динамический коэффициент вязкости, ρ - плотность жидкости, ϑ^k - контравариантные состовляющие вектора скорости, ρ^{kj} - контравариантный симметрический тензор напряжения, ∇_α - оператор ковариантного дифференцирования, Δ - оператор Лапласа, $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0{,}5\left(\nabla_\alpha \vartheta_\beta + \nabla_\beta \vartheta_\alpha\right)$ - ковариантный симметричный тензор скоростей деформаций.

Уравнение Навье-Стокса для несжимаемой жидкости упрощается и вместе с уравнением неразрывности

$$\nabla_\alpha \vartheta^\alpha = 0 \qquad (3.3)$$

состовляет полную систему уравнений движения однородной вязкой несжимаемой жидкости, подчиняющейся закону Навье-Стокса с постоянным коэффициентом вязкости $\chi \left(\chi = \dfrac{\mu}{\rho}\right)$.

В цилиндрической системе координат (x, φ, r) в осесимметричном случае эта система имеет вид

$$\frac{\partial \vartheta_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + \chi\left(\frac{\partial^2 \vartheta_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\vartheta_r + \frac{\partial^2 \vartheta_r}{\partial x^2}\right),$$

$$\frac{\partial \vartheta_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \chi\left(\frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \vartheta_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial x^2}\right),$$

$$\frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\vartheta_r + \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} = 0. \qquad (3.4)$$

Здесь P - суммарное давление, где гидродинамическое давление определяется как $P - P^*$, а P^* - задаваемое среднее давление.

Уравнения движения оболочки *(1.10)* (случай однослойной ортотропной оболочки) или *(2.7)* (случай трёхслойной ортотропной оболочки) и жидкости *(3.4)* дополняются контактными условиями

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\vartheta_r\Big|_{r=R},\quad \frac{\partial U}{\partial t}=\vartheta_x\Big|_{r=R}, \tag{3.5}$$

$$P_x=-P_x^*\big|_{r=R},\quad P_r=-P_r^*\big|_{r=R}, \tag{3.6}$$

учитывающие равенство векторов скоростей (условия *(3.5)*) и напряжений (условия *(3.6)*) при $r=R$. Здесь P_x^* и P_r^* вычисляются по формулам

$$P_x^*=-\mu\left(\frac{\partial\vartheta_x}{\partial r}+\frac{\partial\vartheta_r}{\partial x}\right)\Bigg|_{r=R},\quad P_r^*=\left(p-2\mu\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=R} \tag{3.7}$$

Первое условие *(3.5)* невызывается условием прилипания, а второе- непроницаемости. На оси оболочки $r=0$ примем условия ограниченности искомых гидродинамических величин.

Дополняя контактными условиями *(3.5)*, *(3.6)* уравнения движения как однослойной ортотропной оболочки с реакцией, так и трёхслойной ортотропной оболочки, средний слой которой обладает реакцией, и уравнения движения линейной несжимаемой вязкой жидкости, приходим к контактной задаче о распространении осесимметричных волн в ортотропной однослойной и трёхслойной оболочках, заполненных вязкой несжимаемой однородной жидкостью. Другими словами, задача о распространении осесимметричных волн в цилиндрической однослойной и трёхслойной ортотропной оболочках, заполненных вязкой несжимаемой ньютоновой жидкостью, сводится к совместному интегрированию уравнений теории оболочек и вязкой жидкости при выполнении указанных условий на поверхности их контакта. Рассмотренную систему считаем бесконечной длиной.

§4. Волновое решение уравнений гидродинамики.

Здесь приводятся общие решения уравнений движения оболочки и жидкости, которые понадобятся для дальнейшего исследования задачи о распространении осесимметричных волн в ортотропной однослойной и ортотропной трёхслойной оболочках, заполненных вязкой несжимаемой однородной жидкостью.

Упругие перемещения ортотропной оболочки представим в виде

$$U=\sum_{n=1}^{N}\eta_{1n}\exp\left[i\left(n\omega t-\gamma_n x\right)\right],\quad W=\sum_{n=1}^{N}\eta_{2n}\exp\left[i\left(n\omega t-\gamma_n x\right)\right], \tag{4.1}$$

где ω - задаваемая угловая частота, n - гармоническое число, $\gamma_n=\dfrac{n\omega}{c}$ (c - комплексная скорость)- постоянная распространения n-ой гармоники, действительная часть которой- волновое число, а мнимая- мера затухания возмущений по длине оболочки, $i=\sqrt{-1}$, N - задаваемое число гармоник, а η_{1n}, η_{2n} - неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Из третьего уравнения движения жидкости *(3.4)*, т.е. из уравнения неразрывности следует существование функции тока $\varphi(x,r,t)$ такой, что

$$\vartheta_x=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r},\quad \vartheta_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \tag{4.2}$$

Исключив из уравнений Навье-Стокса посредством дифференцирования функцию давления P, и приняв во внимание зависи-мости *(4.2)*, для определения функции тока получим следующее уравнение четвёртого порядка в частных производных

$$L^0\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\chi L^0(\varphi)\right\}=0. \qquad (4.3)$$

Посредством L^0 обозначен линейный оператор вида

$$L^0=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}.$$

Непосредственной подстановкой, в силу линейности оператора L^0, легко установить, что общее решение уравнения *(4.3)* есть $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$, где

$$L^0(\varphi_1)=0, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}-\chi L^0(\varphi_2)=0. \qquad (4.4)$$

В классе бегущих волн частное решение уравнений *(4.4)* будем искать в виде конечной суммы гармонических членов

$$\varphi_1=\sum_{n=1}^{N}\varphi_{1n}(r)\exp[i(n\omega t-\gamma_n x)], \quad \varphi_2=\sum_{n=1}^{N}\varphi_{2n}(r)\exp[i(n\omega t-\gamma_n x)]. \qquad (4.5)$$

Здесь φ_{1n}, φ_{2n} - подлежащие определению функции. Учитывая φ_2 из *(4.5)* во втором уравнении *(4.4)*, будем иметь

$$\varphi_{2n}''-\frac{1}{r}\varphi_{2n}'-\beta_n^2\varphi_{2n}=0,$$

где $\beta_n^2=\gamma_n^2+in\omega\chi^{-1}$ или с учётом представления $\varphi_{2n}=rf_{2n}(r)$

$$r^2f_{2n}''+rf_{2n}'-\left(1+\beta_n^2r^2\right)f_{2n}=0.$$

Введя новую переменную $z=i\beta_n z$, последнее уравнение можно привести к виду

$$f_{2n}''+\frac{1}{z}f_{2n}'+\left(1-\frac{1}{z^2}\right)f=0.$$

Это есть уравнение Бесселя, решение которого, в силу его ограничения при $r=0$, записывается как $f_{2n}=C_{2n}^0 rJ_1(i\beta_n r)$.

Тогда

$$\varphi_{2n}=C_{2n}^0 rJ_1(i\beta_n r)\exp[i(n\omega t-\gamma_n x)].$$

Аналогично

$$\varphi_{1n}=C_{1n}^0 J_1(i\gamma_n r)\exp[i(n\omega t-\gamma_n x)].$$

Окончательно, для функции тока справедлива формула

$$\varphi=r\sum_{n=1}^{N}\left\{C_{1n}^0 J_1(i\gamma_n r)+C_{2n}^0 J_1(i\beta_n r)\right\}\exp[i(n\omega t-\gamma_n x)] \qquad (4.6)$$

Здесь C_{1n}^0 и C_{2n}^0- постоянные интегрирования, а J_1- функция Бесселя первого рода первого порядка.

Теперь, на основании формул *(4.2)*, в силу *(4.6)*, для скоростей течения жидкости получим

$$\vartheta_2 = i\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\left\{C_{1n}^0 J_1(i\gamma_n r)+C_{2n}^0 J_1(i\beta_n r)\right\}\exp[i(n\omega t-\gamma_n x)],$$

$$\vartheta_x = i\sum_{n=1}^{N}\left\{\gamma_n C_{1n}^0 J_0(i\gamma_n r)+\beta_n C_{2n}^0 J_0(i\beta_n r)\right\}\exp[i(n\omega t-\gamma_n x)], \qquad (4.7)$$

где J_0 - функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Для отыскания функции давления положим

$$P = \sum_{n=1}^{N} P_n(r)\exp[i(n\omega t-\gamma_n x)],$$

где $P_n(r)$- искомые функции. Подставляя последнее соотношение во второе уравнение системы *(3.4)*, после вычислений, получим

$$P = i\rho\omega\sum_{n=1}^{N} nC_{1n}^0 J_0(i\gamma_n r)\exp[i(n\omega\, t-\gamma_n x)]. \qquad (4.8)$$

Таким образом, нами полностью найденоволновое решение уравнения гидродинамики.

§5. Дисперсионное уравнение распространения осесимметричных волн в ортотропной трёхслойной оболочке с реакцией, заполненной вязкой жидкосью.

Теперь переходим к составлению дисперсионного уравнения, описывающего процесс распространения осесимметричных волн в ортотропной трёхслойной (однослойный случай получается при $h_1 = h_3 = 0, h_2 = h, \rho_{02} = \rho_0$) цилиндрической оболочке с реакцией, в которой содержится вязкая ньютоновская жидкость. Данная задача моделирует движение крови в крупных кровеносных сосудах, так как известно, что кровеносные сосуды состоят из трёх концентрических слоёв, причём их механические свойства обуславливаются, главным образом, свойствами средней сосудистой оболочки, которой и присуще активное деформирование. Поэтому считается (§2), что стенки сосуда представляют собой цилиндрическую оболочку, состоящую из внутреннего и внешнего упругих ортотропных слоёв и среднего, обладающего реакцией.

Из условия непроницаемости *(3.5)* имеем

$$\eta_{2n} = \frac{\gamma_n}{n\omega}\left[C_{1n}^0 J_1(i\gamma_n R)+C_{2n}^0 J_1(i\beta_n R)\right] \qquad (5.1)$$

Подставляя *(4.7)*, *(4.8)*, а также *(4.1)*, *(5.1)* в уравнения движения оболочки *(2.7)*, в условие прилипания *(3.5)* (учитывая, что в функциях $P, \frac{\partial\vartheta_x}{\partial r}, \frac{\partial\vartheta_r}{\partial x}, \frac{\partial\vartheta_r}{\partial r}$ мы должны полагать $r = R$) для n-ой гармоники получим систему трёх линейных однородных алгебраических уравнений относительно C_{1n}^0, C_{2n}^n и η_{1n}:

$$H_{k1}^{(n)}\eta_{1n} + H_{k2}^{(n)}C_{1n}^0 + H_{k3}^{(n)}C_{2n}^0 = 0\,, \quad k = \overline{1,3}\,. \qquad (5.2)$$

Здесь

$$H_{11}^{(n)}=Rn^2\omega^2\sum_{k=1}^{3}\rho_{0k}h_k+\gamma_n^2\left(i\tau D_2 n\omega-D_0\right),\ H_{12}^{(n)}=-\left[2Rh+\frac{1}{n\omega}\times\right.$$

$$\left.\times\left(iD_1+\tau n\omega D_3\right)\right]\gamma_n^2 J_1\left(i\gamma_n R\right),\ H_{13}^{(n)}=-\left\{R\mu\beta_n^2+\left[R\mu+\frac{1}{n\omega}\left(iD_1+\tau n\omega D_3\right)\right]\gamma_n^2\right\}\times$$

$$\times J_1\left(i\beta_n R\right),\ H_{21}^{(n)}=\left(iK_0+\tau n\omega K_2\right)\gamma_n\ ,\ H_{22}^{(n)}=\left[\left(i\tau n\omega K_3-K_1+Rn^2\omega^2\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sum_{k=1}^{3}\rho_{0k}h_k\right)\frac{1}{n\omega}+2i\mu\right]\gamma_n J_1\left(i\gamma_n R\right)+R\left(in\omega\rho+2\mu\gamma_n^2\right)J_0\left(i\gamma_n R\right),\ H_{23}^{(n)}=\left[\left(i\tau n\omega K_3-\right.\right.$$

$$\left.\left.-K_1+Rn^2\omega^2\sum_{k=1}^{3}\rho_{0k}h_k\right)\cdot\frac{1}{n\omega}+2i\mu\right]\gamma_n J_1\left(i\beta_n R\right)+2R\mu\gamma_n\beta_n J_0\left(i\beta_n R\right),$$

$$H_{31}^{(n)}=n\omega,\ H_{32}^{(n)}=-\gamma_n J_0\left(i\gamma_n R\right),\ H_{33}^{(n)}=-\beta_n J_0\left(i\beta_n R\right). \qquad (5.3)$$

Для нетривиального решения системы *(5.2)* получим следующее дисперсионное уравнение для определения γ_n, в зависимости от частоты ω, а также от геометрических и механических материалов оболочки и жидкости:

$$\det\left(H_{ij}^{(n)}\right)_{i\,j=\overline{1,3}}=0 \qquad (5.4)$$

В дисперсионном уравнении *(5.4)* фигурируют функции Бесселя с аргументом, зависящем от комплексного параметра γ_n. Это уравнение по существу трансцендентное и теоретически имеет бесчисленное множество корней относительно γ_n. Однако, в случае длинноволного приближения, когда $|\gamma_n R|<<1$, функции Бесселя $J_0\left(i\gamma_n R\right)$ и $J_1\left(i\gamma_n R\right)$ можно с достаточной точностью представить в виде

$$J_0\left(i\gamma_n R\right)\sim 1\ ,\quad J_1\left(i\gamma_n R\right)\sim\frac{1}{2}i\gamma_n R \qquad (5.5)$$

Для оценки функций $J_0\left(i\beta_n R\right)$ и $J_1\left(i\beta_n R\right)$ проведём следующие рассуждения. Введя обозначения $\alpha_n^2=n\omega R^2\chi^{-1}$ для $\beta_n R$ можно написать следующее представление

$$\beta_n R=\left(in\omega^2\chi^{-1}+\gamma_n^2R^2\right)^{1/2}=i^{1/2}\alpha_n\left[1+\left(\gamma_n R\right)^2\left(i\alpha_n^2\right)^{-1}\right]^{1/2}.$$

Замечая, что для маловязких жидкостей $\alpha_n^2>>1$ (например, в крупных кровеносных сосудах кровь считают обычно ньютоновой жидкостью с кинематической вязкостью χ, равной $2\cdot10^{-2}$- $4\cdot10^{-2}$ см^2/сек при температуре 37^0 С) будем иметь $\beta_n R=i^{1/2}\alpha_n$ или $i\beta_n R=(-i)^{1/2}\alpha_n$. Тогда имеют место приближённые равенства

$$J_0\left(i\beta_n R\right)\approx J_0\left(\sqrt{-i}\alpha_n\right), \qquad (5.5)$$

$$J_1\left(i\beta_n R\right)\approx J_1\left(\sqrt{-i}\alpha_n\right). \qquad (5.6)$$

Учитывая формулы *(5.5)*, *(5.6)* в *(5.3)* и введя обозначения

$$a_1=Rn^2\omega^2\sum_{k=1}^{3}\rho_{0k}h_k\ ,\ a_2=i\tau n\omega D_2-D_0,\ a_3=-\frac{iR}{2}\left[2R\mu+\frac{1}{n\omega}\left(iD_1+\tau n\omega D_3\right)\right],$$

$$a_4 = -R\mu\beta_n^2 J_1\left(\sqrt{-i}\alpha_n\right),\ a_5 = -\left[R\mu + \frac{1}{n\omega}\left(iD_1 + in\omega D_3\right)\right]J_1\left(\sqrt{-i}\alpha_n\right),\ a_6 = iK_0 +$$

$$+\tau n\omega K_2,\ a_7 = in\omega\,\rho R,\ a_8 = \frac{iR}{2n\omega}\left(i\tau n\omega K_3 - K_1 + a_1\right) + \mu R,\ a_9 = \left[\left(i\tau n\omega K_3 -\right.\right.$$

$$\left.\left.-K_1 + a_1\right)\frac{1}{n\omega} + 2i\mu\right]J_1\left(\sqrt{-i}\alpha_n\right) + 2\mu R\beta_n J_0\left(\sqrt{-i}\alpha_n\right),$$

имеем

$$H_{11}^{(n)} = a_1 + a_2\gamma_n\,,\ H_{12}^{(n)} = a_3\gamma_n^3\,,\ H_{13}^{(n)} = a_4 + a_5\gamma_n^2\,,\ H_{21}^{(n)} = a_6\gamma_n\,,\ H_{22}^{(n)} = a_7 +$$

$$+a_8\gamma_n^2\,,\ H_{23}^{(n)} = a_9\gamma_n\,,\ H_{31}^{(n)} = n\omega\,,\ H_{32}^{(n)} = -\gamma_n\,,\ H_{33}^{(n)} = -\beta_n J_0\left(\sqrt{-i}\alpha_n\right). \qquad (5.7)$$

Учитывая *(5.7)* в *(5.4)* получим биквадратное уравнение относительно волнового числа γ_n

$$q_0\gamma_n^4 + q_1\gamma_n^2 + q_2 = 0 \qquad (5.8)$$

где $q_0 = (a_2a_8 - a_3a_6)H_{33}^{(n)} + (a_3a_9 - a_5a_8)H_{31}^{(n)} + a_2a_9 - a_5a_6$, $q_1 = (a_1a_8 - a_2a_7)\times$ $\times H_{33}^{(n)} - (a_5a_7 - a_4a_8)H_{31}^{(n)} + a_1a_9 - a_4a_6$, $q_2 = a_1a_7H_{33}^{(n)} - a_4a_7H_{31}^{(n)}$.

Корни уравнения *(5.8)* имеют вид

$$\gamma_n^{(1,2)} = \left\{\left[q_1 \pm \left(q_1^2 - 4q_0q_2\right)^{1/2}\right]\Big/2q_0\right\}^{1/2},\quad \gamma_n^{(3)} = -\gamma_n^{(1)},\quad \gamma_n^{(4)} = -\gamma_n^{(2)}.$$

Далее, на основе численного счёта, сделаны выводы о влиянии ортотропии, многослойности, вязкости и реакции на волновые характеристики.

Литература

[1]. Педли Т. *Гидродинамика крупных кровеносных сосудов.* "Мир", М., 1983, 400с.

[2]. Ахундов М.Б., Работнов Ю.Н., Суворова Ю.В. *Модель деформируемого тела с реакцией и приложение её к динамическим задачам биомеханики.* МТТ, №6, 1985, с. 96-100.

[3]. Амензаде Р.Ю., Ализаде А.Н. *Основные уравнения безмоментной теории упругих анизотропных оболочек с ркацией.* ДАН Аз.ССР, №2, 1988, с.3-6.

[4]. Амензаде Р.Ю., Исмаил С. Исмаил, Насибов В. Г. *Осесимметричные уравнения движения трёхслойной оболочки с реакцией.* ДАН Аз.ССР, №12, 1990, с.7-9.

[5]. Насибов В.Г. *Распространение осесимметричных волн в ортотропной оболочке с реакцией, содержащей жидкость.* Сб.науч. тр. по механике, №3, АзИСУ, Баку, 1993, с.170-177.

Nəsibov V.H.

ÖZLÜ MAYE İLƏ DOLDURULMUŞ REAKSİYAYA MALİK OLAN SİLİNDRİK ÖZTÜKLƏRDƏ OXASİMMETRİK DALĞALARIN YAYILMASI

Məqalədə özlü maye ilə doldurulmuş reaksiyaya malik olan birlaylı və üç laylı ortotrop öztüklərdə oxasimmetrik harmonik dalğaların yayılmasının tədgiginə həsr olunmuşdur. Alınan nəticələr sirf texniki problemləri həll etməyə imkan verməklə yanaşi, həm də iri gan damarlarında ganın axması məsələlərinin modelləşdirilməsində istifadə oluna bilər.

Nasibov V.G.

DIFFUSING OF AXIAL SYMMETRIC WAVES IN THE CYLINDRICAL COVER WITH REACTION FILLED IN VISCOUS LIQUID

The article is dedicated to a researching of diffysing of axial symmetric hormonic waves as in the onelayered ortotropical and threelayered ortotropical coves with reaction, filled in viscous nonsqueezed lequid.

The received results let us to solve problems concerned pure technical character of the kind of dynamics of pipelines and can be used at modeling movement of blood in the large blood-vessels.