УДК 517.9

НАСИРОВ М.А.

О МЕТОДЕ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМ УПРУГИХ ТЕЛ

Задачи со свободной границей часто возникают в очень простых физических явлениях. Рассмотрим, например, упругое деформируемое тело, занимающее область $\Omega \subset R^n$ и ограниченное достаточно гладкой поверхностью Γ. Кроме этого, предположим, что Ω ограниченная область. Обозначим через $\mathcal{M}$ все такие множества $\Omega \subset R^n$. Под действием внешних поверхностных нагрузок и объемных сил тело деформируется. Напряженно-деформированное состояние тела описывается уравнением теории упругости. Предполагая выполненными условия статики и считая деформации малыми, запишем основные уравнения [1]:

$$\Delta U(x) = \varphi(x), \quad x \in \Omega$$
$$\frac{\partial U(s)}{\partial \nu(s)} = Z(s), \quad s \in \Gamma \qquad (1)$$

Здесь $\varphi(x)$, $Z(x)$ - заданные непрерывные функции, в R^n, а вектор $\nu(s) = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ - внешняя единичная нормаль к поверхности Γ в точке $s = (s_1, \dots, s_n)$,

$$\frac{\partial U(s)}{\partial \nu(s)} = \sum_{i=1}^{n} U_{s_i} \cos(\nu_{s_i}, s_i)$$

Пусть дана функция $f(x, U(x), \nabla U(x))$ удовлетворяющая следующим условиям:

а) $f(x, U(x), \nabla U(x))$ - непрерывная дифференцируемая по всем аргументам функция;

б) $f(x, U, \nabla U)$ - сильно выпуклая функция.

Требуется найти такое множество $\Omega \in \mathcal{M}$ чтобы функционал

$$J(\Omega, U) = \int_{\Omega} f(x, U(x), \nabla U(x))dx \qquad (2)$$

достигал своего минимума.

Известно, что уравнение (1) при любых заданных $\Omega \in \mathcal{M}$ имеет единственное решение $U = U_{\Omega}(x)$ [4].

Определение. *Мы скажем, что* (Ω^*, U_{Ω^*}) *оптимальное решение задачи (1)-(2), если функционал (2) достигат своего минимума в множестве* $\Omega^* \in \mathcal{M}$ *на соответствующем решении* U_{Ω^*} *уравнения (1).*

Далее мы предположим, что задача *(1)-(2)* имеет единственное решение.

Рассмотрим следующую задачу типа Стефана

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = \Delta W(x,t) - \varphi(x), \quad x \in \Omega(t), t > 0 \\
&\frac{\partial W(s,t)}{\partial \nu(s)t} = Z(s) \qquad , \quad s \in \Gamma(s,t), t > 0 \\
&W(x,0) = U(x) \qquad , \quad x \in \Omega(0) \qquad\qquad (3) \\
&\dot{\Gamma}(s,t) = -f(s, W(s,t), \nabla W(s,t)), s \in \Gamma(s,t), t > 0 \\
&\Gamma(0) = \Gamma_0
\end{aligned}$$

Здесь $\Omega(t)$ для каждой фиксированной $t > 0$ принадлежит множеству $\mathcal{M}$, $\Gamma(s,t)$ - ее граница, $\varphi(x), Z(x)$ - функции в задаче *(1)*, $U(x)$ решение задачи *(1)* в области $\Omega(t)$, а $\dot{\Gamma}(s,t)$ - определяются следующим образом:

$$\dot{\Gamma}_S(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left\| \Gamma(t+\Delta t) \cap (s + \alpha\, \nu(s)) - s \right\|}{\Delta t} \quad , \quad s \in \Gamma(t)$$

$$-\infty < \alpha < +\infty$$

Обозначим через Γ_0 границу области $\Omega(0) \in \mathcal{M}$. Выпуклая область $\Omega(0) \in \mathcal{M}$ удовлетворяет следующему уравнению

$$\Omega(0) \cap \left\{ x \in R^n : f(x, W(x,0), \nabla W(x,0)) < 0 \right\} \neq \varnothing$$

Теорема. *Предположим, что условия а), б) удовлетворяются. Тогда при* $t \to \infty$ *справедливы следующиеутверждения:*

1) $\left\| W(x,t) - U^*(x) \right\| = 0$

2) Ω^* *- выпуклое множество.*

Теперь ознакомимся с алгоритмом численного решения задачи *(3)-(4)*.

а) Нахождение области $\Omega(0)$ при $t = 0$.

Сначала взяв произвольную точку $a = (a_1, \dots, a_n)$ для достаточно малого числа $r > 0$ рассмотрим шар

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 \leq r^2$$

В этом шаре находим $\nu(s)$ и вычисляем решение задачи *(1)*. Если в этой области имеется такая внутренняя точка $x = (x_1, \dots, x_n)$, что удовлетворяется отношение

$$f(x, U(x), \nabla U(x)) < 0$$

то данный шар можно взять в качестве области $\Omega(0)$ в противном случае повторим эту процедуру, увеличив число r. В силу доказанной леммы и при условии б) существование конечного r гарантированно.

б) В области $\Omega(t)$ определяют решение задачи *(3)* и вычисляют функции $W(x,t), \nabla W(x,t)$.

в) Если для произвольной $x \in \partial\,\Omega(t)$ и заданном $\varepsilon > 0$ удовлетворяется неравенство

$$\left| f\left(x, W(x,t),\, \nabla W(x,t)\right)\right| < \varepsilon$$

то $\Omega(t)$ является решением задачи *(1)-(2)*. В противном случае переходим к следующему пункту.

г) Для каждой $s \in \partial\,\Omega(t)$ находим такое $\nabla t > 0$, что после замены

$$t^* = t + \Delta t$$

$$s^* = s - \Delta t \quad f\left(s, W(s,t),\, \Delta W(s,t)\right) \nu(s)$$

функция f сохранает свой знак.

д) Далее область $\Omega(t)$ заменяется новой областью границей s^*, находятся единичные нормали к поверхности $\Gamma^*(t) = s^*$ и переходят в пункт б).

Литература

[1]. Баничук Н.В. *Введение в оптимизацию конструкций.* М., 1986.
[2]. Гельфану И.М., Фомин С.В. *Вариационное исчисление.* М., 1961.
[3]. Насиров М.А., Пашаев А.Б., Сабзиев Э.Н. *О методе асимптотического выбора оптимальной области.* Изв. АН Аз.Р МТТ, №1-2, 1994, стр.
[4]. Фридман А. *Уравнения с частными производными параболлического типа.* М., 1968.

Nəsirov M.Ə. **ELASTİKİ CİSMLƏRİN FORMASININ OPTİMALLAŞDIRILMASININ BİR METODU**

Elastiki deformasiya olunan cismə baxılır. Qoyulmuş məsələnin müəyyən Stefan tipli məsələyə yığıldığı göstərilir və həmin məsələ üçün ədədi həll alqoritmi verilir.

Nasirov M.A. **THE METHOD OF THE OPTIMIZATION OF THE FORM OF THE ELASTIC SOLID**

It is considered the problem of the optimization of the construction. The given problem comes to sinding an asymptotic of some Stephan type problem and for that problem given numeral solved algorithm.