

УДК 539.374

ЮСИФОВ В.Г.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В СТЕРЖНЕ С ПЕРЕМЕННЫМ ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

§ 1. Уравнения Рахматулина-Кармана-Тейлора.

Классическая теория распространения упругопластических волн в тонких полубесконечных стержнях разработана Х.А. Рахматулиным [1], Т. Карманом [2] и Дж. Тейлором [3] (далее кратко именуемая теория Р-К-Т).

Рассмотрим полубесконечный упругопластический стержень постоянного предела упругости e_s , ось которого совпадает с осью ox . Диаграмма "напряжение-деформация" при нагружении имеет вид кривой OSA , выражаемой функцией $\tau = \phi(e)$, а при разгрузке - отрезка AB , параллельного упругому участку OS (фиг.1).

Согласно [1,2,3], в области нагружения $\{0 \leq x < \infty; 0 \leq t \leq f(x)\}$ имеет место уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad a^2 = \frac{1}{\rho} \frac{d\phi}{de} \quad (1.1)$$

а в области разгрузки $\{0 \leq x < \infty; f(x) \leq t\}$ - уравнение [1]:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\phi_0}{dx} - a_0^2 \frac{de_0}{dx}; \quad a_0^2 = \frac{E}{\rho} \quad (1.2)$$

Здесь ρ - плотность стержня; E - модуль Юнга; x - лагранжева координата, равная расстоянию сечения от нагружаемого конца $x=0$; t - время; $u(x,t), \vartheta(x,t)$ - смещение сечения x от состояния покоя соответственно при нагружении и разгрузке стержня; $t = f(x)$ - волна разгрузки, которая должна быть определена в ходе решения задачи; $\phi_0(x), e_0(x)$ - значения соответственно напряжения и деформации на волне разгрузки.

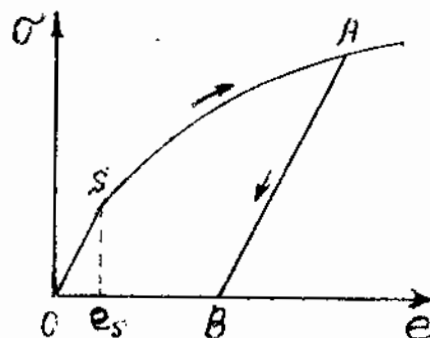
Для уравнения (1.1) ставятся начальное и граничное условия:

$$\begin{aligned} u_x(x,0) &= 0; \quad u_t(x,0) = 0 \\ u_x(0,t) &= v(t); \quad v'(t) > 0, \quad 0 \leq t \leq t_m \end{aligned} \quad (1.3)$$

а для уравнения (1.2) - граничное условие:

$$\vartheta_x(0,t) = \mathcal{E}(t); \quad \mathcal{E}'(t) < 0, \quad t_m \leq t \quad (1.4)$$

и условие непрерывности на $t = f(x)$:



фиг.1

$$\begin{aligned} \vartheta_x(x, f(x)) = u_x(x, f(x)) = e_0(x) \\ \vartheta_t(x, f(x)) = u_t(x, f(x)) \end{aligned} \quad (1.5)$$

В работе [4] показано, что данная задача не сводится к известным задачам матфизики (Коши, Гурса и смешаная).

Уравнение Р-К-Т (1.1) при условии (1.3) имеет решение:

$$u_x = v \left(1 - \frac{x}{a} \right) u_t = - \int_0^x a de \quad (1.6)$$

а характеристики $dx = a dt$ прямолинейны.

Решение уравнения (1.2) при условиях (1.4) и (1.5) до настоящего времени не получено. Существенным недостатком теории Р-К-Т также является то, что некоторые экспериментальные факты ([5], [6] и др.) не поддаются качественному объяснению: догрузочный импульс в предварительно пластически деформированном стержне, который согласно Р-К-Т должен распространяться с определенной пластической скоростью, на самом деле, в зависимости от величины импульса распространяется либо с упругой, либо с пластической скоростью, вырождающейся в упругую. Этот недостаток объясняется, в частности, одномерностью теории Р-К-Т и неучетом скорости деформации ([7] и др.).

Целью данной работы не является непосредственное исследование поставленной выше задачи. В научной литературе имеется огромное количество работ, посвященных исследованию различных ее аспектов. Мы рассмотрим одну частную задачу, решение которой терпит сильный разрыв на волне разгрузки слабого разрыва.

§ 2. Распространение волн в стержне с убывающим пределом упругости.

Рассмотрим стержень с убывающим пределом упругости, такой, что

$$e_s(x) = \begin{cases} e^*, & 0 \leq x < x_* \\ \alpha(x), & \text{при } x_* \leq x \leq x^* \\ e_*, & x^* < x \end{cases} \quad (2.1)$$

причем $\alpha(x_*) = e^*$; $\alpha(x^*) = e_*$ и $\frac{d\alpha}{dx} < 0$; $\left. \frac{de_s}{dx} \right|_{x_*} = \left. \frac{de_s}{dx} \right|_{x^*} = 0$, а зависимость

"напряжение-деформация" для сечений x при нагружении имеет вид:

$$\tau = \begin{cases} Ee, & 0 \leq e \leq e_s(x) \\ \lambda(e_s) + \phi(e), & \text{при } e_s(x) < e \end{cases} \quad (2.2)$$

где $\lambda(e_s)$ - монотонно растущая неотрицательная функция и $\lambda(e_*) = 0$, а $\phi(e)$ та же функция, что описывает кривую OSA на фиг. 1.

Как и в стержне постоянного предела упругости, разгрузка сечения x проходит вдоль прямой, параллельной упругому участку OS (фиг. 1).

Следуя [1,2,3], уравнение движения элемента $x, x + \Delta x$ имеет вид:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau}{\partial x} \quad (2.3)$$

где $u(x, t)$ - смещение сечения x от состояния покоя.

Из (2.3) с учетом (2.2) получим уравнение в области нагружения:

а) упругих деформаций:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{при } u_x \leq e_s(x) \quad (2.4)$$

б) пластических деформаций:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\lambda}{de_s} \cdot \frac{de_s}{dx} \quad \text{при } u_x > e_s(x) \quad (2.5)$$

и в области разгрузки-аналог уравнения (1.2):

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \alpha_0^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\tau_0}{dx} - \alpha_0^2 \frac{de_0}{dx} \quad (2.6)$$

Рассмотрим распространение волн в стержне (2.1), когда к его концу $x = 0$ прикладывается монотонно растущее давление $p(t)$, вызывающее деформацию $v(t)$, причем $v(t_m) = e^*$. Затем внешнее давление $p(t)$ начинает монотонно убывать, вызывая деформацию $\mathcal{E}(t)$.

Так как конец $x = 0$ испытывает только упругие деформации, то граничное условие на конце $x = 0$ ставится только для (2.4). Оно имеет вид (1.3) при нагружении и

$$u_x(0, t) = \mathcal{E}(t); \quad \mathcal{E}'(t) < 0, \quad t_m < t \quad (2.7)$$

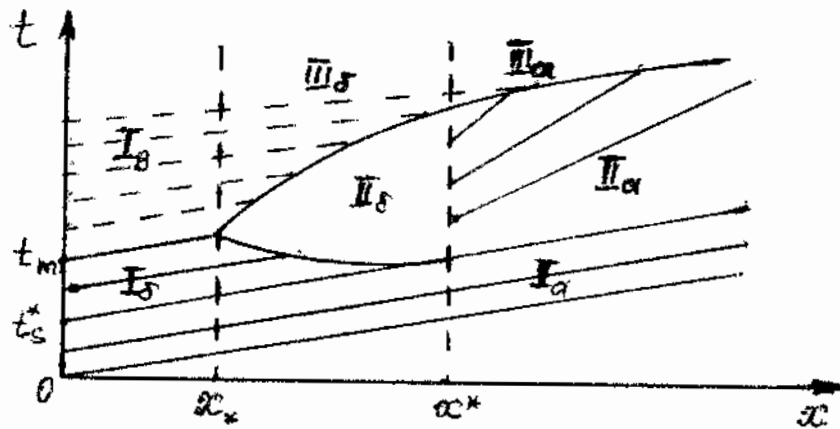
при разгрузке.

При нагружении в области I_a (фиг.2) упругих деформаций при $0 \leq t \leq t_s^*$ от конца $x = 0$ распространяются волны $x = \alpha_0(t - t_s^*)$, вызывающие в стержне только упругие деформации. Значение t_s^* определяется из условия $v(t_s^*) = e_s$.

Распространяющиеся в области II_b при $t_s^* \leq t \leq t_m$ упругие волны $x = \alpha_0(t - t_s^*)$ достигнув границы упругих деформаций, начнут вызывать в стержне пластические деформации, т.е. существует граница $t = \varphi(x)$ упругих и пластических деформаций [8].

Итак, в областях I_a и II_b упругих деформаций при нагружении решением уравнения (2.4) при условиях (1.3) является:

$$u_x = v\left(t - \frac{x}{\alpha_0}\right); \quad u_t = -\alpha_0 v\left(t - \frac{x}{\alpha_0}\right) \quad (2.8)$$



фиг.2

Упростим уравнение (2.5) пластических деформаций. Учитывая (2.1), оно принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \begin{cases} a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x^* \leq x & (2.9a) \\ a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\lambda}{de_3} \cdot \frac{de_3}{dx} & x_* \leq x \leq x^* & (2.9b) \end{cases} \text{ при}$$

т.е. область II пластических деформаций разбивается на две части: II_a и II_b (фиг.2), в которых имеет соответственно (2.9a) и (2.9b).

На полупрямой $L: \{x^* \leq x; t = t_s + x/a_0\}$, являющейся границей II_a и не совпадающей с характеристикой уравнения (2.9a), как следует из (2.8), имеет место:

$$u_x|_L = e_*; u_t|_L = -a_0 e_* \quad (2.10)$$

Границу $t = \varphi(x)$ упругих и пластических деформаций найдем из условия:

$$v \left(t - \frac{x}{a_0} \right) = e_s(x) \text{ при } x_* \leq x \leq x^*$$

Следовательно, в области II_b будем иметь условия:

$$u_x|_{t=\varphi(x)} = e_s(x); u_t|_{t=\varphi(x)} = -a_0 e_s(x) \quad (2.11)$$

Очевидно, $t = \varphi(x)$ не является характеристикой уравнения (2.9b) и условия (2.11) и (2.10) определяют задачу Коши в области II для уравнения (2.5), т.е. однозначно определяют u_x и u_t :

$$u_x = \beta(x, t); u_t = \gamma(x, t) \quad (2.12)$$

которое, с учетом (2.10) в области II_a принимает вид:

$$u_x = \beta(x, t); u_t = - \int_0^{u_t} a de \quad (2.13)$$

(конкретный вид $\beta(x, t)$, $\gamma(x, t)$ не суть важен для дальнейшего).

Рассмотрим теперь разгрузку стержня. С момента времени $t = t_m$ на волнах $x = a_0(t - t_*)$ в области I_B (фиг.2) упругих деформаций происходит упругая разгрузка и решением является:

$$u_x = \mathcal{E}\left(t - \frac{x}{a_0}\right); \quad u_t = -a_0 \mathcal{E}\left(t - \frac{x}{a_0}\right) \quad (2.14)$$

Эти упругие волны достигнув сечения $x = x_*$ начнут его разгрузку, что повлечет распространение волны разгрузки вдоль стержня. Следовательно, в области разгрузки III: $\{x_* \leq x < \infty; f(x) \leq t\}$ имеет место (2.6). Преобразуем его с учетом (2.2). Получим:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x^2} + [a^2(e_0) - a^2] \frac{de_0}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{d\lambda}{de_s} \cdot \frac{de_s}{dx} \quad (2.15)$$

Очевидно, на полупрямой $\{x = x_*; t \geq f(x_*)\}$ должно быть:

$$\mathcal{G}(x_*, t) = u(x_*, t)$$

откуда следует:

$$\mathcal{G}_t(x_*, t) = u_t(x_*, t) \quad (2.16)$$

Кроме того, на $t = f(x)$ также должно иметь место (1.5).

Теорема. Если наряду с (2.16) имеет место и

$$\mathcal{G}_x(x_*, t) = u_x(x_*, t) \quad (2.17)$$

то уравнения (2.5) и (2.6) при условиях (2.16), (2.17) и (1.5) несовместны.

Доказательство. Общее решение уравнения (2.15) имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, t) = & F_1(a_0 t - x) + F_2(a_0 t + x) - \\ & - \frac{1}{a_0^2} \int_{x_*}^x \left[\int_{x_*}^{\delta} \left[(a^2(e_0) - a^2) \frac{de_0}{dx} + \frac{d\lambda}{de_s} \frac{de_s}{d\mathcal{E}} \right] d\delta \right] dx \end{aligned}$$

где F_1 и F_2 - произвольные дважды непрерывно-дифференцируемые функции.

Используя (2.16) и (2.17), получим:

$$\begin{cases} \mathcal{G}_x(x, t) = \mathcal{E}\left(t - \frac{x}{a_0}\right) + e_p(x) - e_p(x_*) + \frac{1}{E} [\lambda(x_*) - \lambda(x)] \\ \mathcal{G}_t(x, t) = -a_0 \mathcal{E}\left(t - \frac{x}{a_0}\right) \end{cases} \quad (2.18)$$

где $e_p(x) = e_0(x) - \frac{1}{E} \phi(e_0)$.

Рассмотрим часть III_a: $\{x^* \leq x < \infty; f(x) \leq t\}$ области разгрузки III. При $x^* \leq x$ уравнение (2.6) или (2.15) упрощается и совпадает с (1.2), а решение (2.18) принимает вид:

$$\begin{cases} \vartheta_x(x, t) = \mathcal{E}\left(t - \frac{x}{a_0}\right) + e_p(x) - e_p(x_*) + e^* - e_* \\ \vartheta_t(x, t) = -a_0 \mathcal{E}\left(t - \frac{x}{a_0}\right) \end{cases} \quad (2.19)$$

так как $\lambda(x) \equiv \lambda(x^*) = 0$ и $\frac{1}{E}[\lambda(x_*) - \lambda(x^*)] = e^* - e_*$.

Из (2.19) следует, что упругая часть e_e деформации ϑ_x и скорость ϑ_t постоянны вдоль $t - \frac{x}{a_0} = \text{const}$. Очевидно,

$$e_e(x, t) = \mathcal{E}\left(t - \frac{x}{a_0}\right) - e_p(x_*) + e^* - e_*$$

Для определения $e_p(x)$ в (2.19), необходимо найти $t = f(x)$. Используя первое условие (1.5) получим:

$$e_e(x, f(x)) = \mathcal{E}\left(f(x) - \frac{x}{a_0}\right) - e_p(x_*) + e^* - e_*$$

С другой стороны

$$e_e(x, f(x)) = \frac{1}{E} \phi(e_0)$$

Учитывая это, получим:

$$\mathcal{E}\left(f(x) - \frac{x}{a_0}\right) = \frac{1}{E} \phi(e_0) + e_p(x_*) - e^* + e_* \quad (2.20)$$

Используя второе условие (1.5) найдем:

$$a_0 \left[\frac{1}{E} \phi(e_0) + e_p(x_*) - e^* + e_* \right] = \int_0^{e_0} a de$$

представляющее собой функциональное уравнение относительно e_0 .

Дифференцируя его, получим, что $\frac{de_0}{dx} = 0$. Дифференцируя теперь (2.20) и

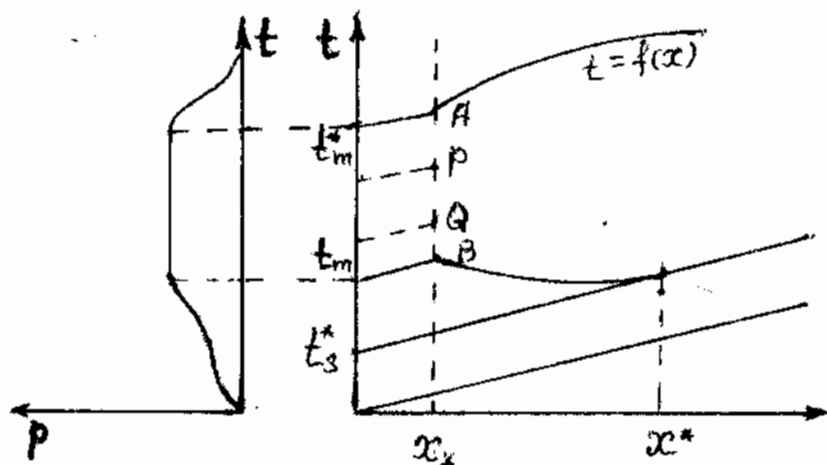
учитывая этот факт найдем: $\frac{df}{dx} = \frac{1}{a_0}$. Но это возможно только лишь для

волны разгрузки сильного разрыва [9], что противоречит условиям (1.5). Теорема доазана. Теперь покажем, что существует такое нагружение $p(t)$ стержня, при котором имеет место (2.16).

Пусть функция $e_s(x)$ в окрестности $x = x_*$ имеет вид: $e_s(x) = e^* - c_1(x - x_*)^{1+k}$, где $c_1 > 0$, $k > 0$ - некоторые постоянные. Положим $\lambda(e_s) = c_2(e_s - e_*)$, где $c_2 > 0$ - некоторая постоянная.

Рассмотрим следующее нагружение стержня. Внешнее давление $p(t)$ монотонно возрастает до момента времени $t = t_m$, затем некоторое

время до момента времени $t = t_m^*$ остается постоянным и потом убывает до нуля (фиг.3)

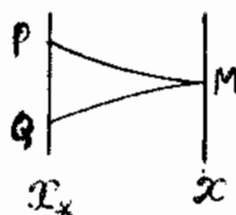


фиг.3

Уравнение (2.96) эквивалентно:

$$du_t = \pm a du_x \pm \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{a} \frac{d\lambda}{de_s} \quad \text{вдоль } dx = \pm a dt \quad (2.21)$$

Рассмотрим решение (2.12) в окрестности $x = x_*$. Проинтегрируем (2.21) вдоль PM : $dx = -adt$ и QM : $dx = a dt$ (фиг.4), где точки P и Q те же самые, что и на фиг. 3. При этом учтем, что область $t_m t_m^* AB$ (фиг.3) является областью постоянных параметров, т.е. $u_t(P) = u_t(Q)$ и $u_x(P) = u_x(Q) = u_x(B) = e_0(x_*)$.



фиг.4

Получим:

$$u_x(M) = e_0(x_*) + L(x - x_*)^{1+k} \quad (2.22)$$

где

$$L = \frac{c_1 c_2}{2\rho} \cdot \frac{1}{(a)_{cp_2}} \cdot \left(\frac{1}{(a)_{cp_1}} + \frac{1}{(a)_{cp_2}} \right)$$

а символ $(a)_{cp}$ означает среднее значение $a(u_x)$ в промежутке $[e_0(x_*), u_x(M)]$.

Из (2.22) следует, что $u_x(M) > e_0(x)$, т.е. $a(u_x(M)) < a(e_0(x_*))$ и

$$a(u_x(M)) = a(e_0(x_*)) + \frac{da}{de} \Big|_{cp} \cdot L(x - x_*)^{1+k} \quad (2.23)$$

Как видно из (2.22), в окрестности $x = x_*$ значения $u_x(M)$ почти совпадают, а из (2.23) вытекает, что в этой же окрестности характеристики $dx = a dt$ почти прямолинейны и пересекают волну разгрузки $t = f(x)$. Следовательно,

$$e_0(x) = u_x(x, f(x)) = u_x(M) = e_0(x_*) + L(x - x_*)^{1+k} = e^* + L(x - x_*)^{1+k}$$

Отсюда, во-первых, при $x \rightarrow x_* + 0$ следует, что $\frac{de_0}{dx} \rightarrow 0$, т.е. уравнение (2.15) переходит в (2.4). Во-вторых, $e_p(x_*) = 0$, означающее, что на луче $\{x = x_*; t_A \leq t\}$ упругие деформации. Учитывая эти факторы, имеем (2.17)

§ 3. Заключение.

Полученная несовместность решений на волне разгрузки слабого разрыва указывает на неслучайный характер указанного выше расхождения между теорией Р-К-Т и экспериментальными данными. Оно связано с тем, что уравнение движения (2.3) не учитывает потери энергии при прохождении пластической волны нагружения: формально уравнение (1.1) и его решение (1.6) в равной степени описывает распространение как нелинейно-упругих волн, так и пластических волн с зависимостью $\tau = \phi(e)$, не делая между ними никаких различий.

Литература.

- [1]. Рахматулин Х.А. *О распространении волн разгрузок*. ПММ, т. I, №1, 1945, с.91.
- [2]. Карман Т., Дюве П. *Распространение пластических деформаций в телах*. Сб. переводов иностр. литературы. Механика "2", 1951.
- [3]. Taylor G.J. *The testing of materials of high rates of loading*. Journ. Inst. Civil. Eng., 26, 1946.
- [4]. Шапиро Г.С. *Продольные колебания стержней*. ПММ, т. X, №5 и 6, 1946.
- [5]. Sternglas E.S., Stuart D.A. *An experimental study of the propagation of Transient longitudinal deformations in elastoplastic media*. Journ. Appl. Mech., vol.20, №3, 1953, с. 427.
- [6]. Riparbelli C. *A paradox in the theory of impact*. Journ. Aeronaut Sci., vol. 21, №6, 1954.
- [7]. De Vault G.P. *The effect of lateral inertia on the propagation of plastic strain in a cylindrical rod*. Journ. Mech. Phys. Solids, №13, 1965, с.55.
- [8]. Рахматулин Х.А. *О распространении волны разгрузки вдоль стержня переменного предела упругости (задача о накоплении остаточных деформаций)*. ПММ, т. X, вып. 3, 1946.
- [9]. Курант Г., Фридрих К. *Сверхзвуковое течение и ударные волны*. ИЛМ., 1950, с. 245.

Yusifov V.A ELASTIQQIYƏT HƏDDİ DƏYİŞƏN ÇUBUQDA
DALĞALARIN YAYILMASI HAQQINDA BİR
MƏSƏLƏ

Maqalədə elastiqqiyət həddi dəyişən çubuqda dalğaların yayılmasının xüsusi bir məsələsinə baxılmış, alınmış nəticələr araşdırılmışdır.

**Yusifov V.H. ABOUT ONE PROBLEM OF PROPAGATION WAVES
IN A ROD WITH VARIABLE ELASTIC LIMITS**

In this paper a special particular problem of wave propagation in a rod with decreasing limit of elasticity is considered which exact solution in the regions of loading and unloading does not coincide on the wave of unloading of weak discontinuity. The received mathematical contradiction and indicates on the inaccidental character of the known since 1950-60 divergences between Rakhmatulin-Korman-Taylor's theory and experimental dates.