

УДК 539.3

АХУНДОВ М.Б., АЛИМАМЕДОВ Р.К.

**ТОРМОЖЕНИЕ ОДИНОЧНОЙ ТРЕЩИНЫ В  
ПОВРЕЖДАЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ**

Вопросам торможения трещины в упругих и упругопластических средах посвящено большое количество литературы [2, 3, 7]. Развитие же трещины в повреждающейся среде при отсутствии препятствующих его движению элементов посвящено небольшое количество работ [1, 5]. Однако следует констатировать отсутствие исследований по вопросам конструкционного торможения трещин в повреждающейся среде. Данная работа выполнена с целью восполнения указанного пробела.

Одиночная трещина расположена в пластине поперечно направлению растяжения. Конструктивно тормозящие элементы представимы на первом этапе исследований четырьмя симметричными относительно трещины сжимающими сосредоточенными силами заданной интенсивности (рис.1). Материал среды упруго повреждающейся:

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu_0} (1 + M^*) s_{ij} \\ \varepsilon = 3k\sigma \end{cases} \quad (1)$$

где  $\varepsilon_{ij}, s_{ij}$  - девиаторы;  $\varepsilon$  и  $\sigma$  - шаровые части тензоров деформаций и напряжений;  $M^*$  - оператор повреждаемости наследственного типа [4].

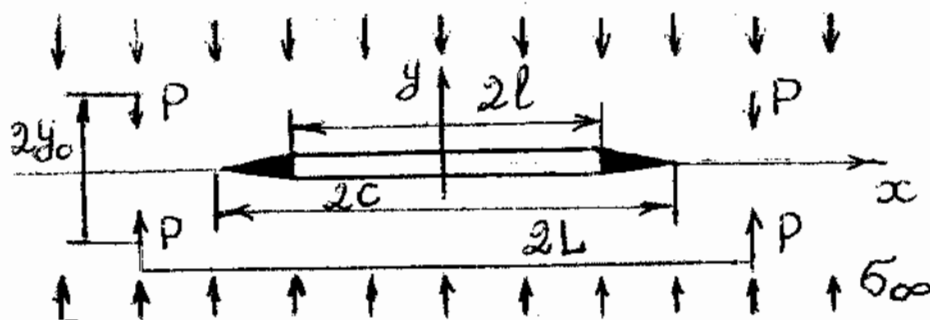


Рис. 1.

Вследствии специфики процесса накопления повреждений, в малой области на продолжении трещины образуются зоны предразрушения, в которых напряжение постоянно, но не меняется во времени  $\sigma_2 = \sigma_2(t)$ .

Условие определяющее границу этой зоны примем как в [5]:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_r. \quad (2)$$

В качестве же условия определяющего размер самой трещины примем условие критического раскрытия трещины:

$$[\mathbf{v}] = \delta_{cr} \quad (3)$$

Для составления соответствующих уравнений определяющих для произвольного момента времени длину трещины  $l(t)$ , границу зоны предразрушения  $c(t)$  и напряжение в этой зоне  $\sigma_2(t)$  предварительно необходимо найти выражения для нормального напряжения  $\sigma_y$  и поперечного перемещения  $v$ . Для этого составим следующую математическую задачу.

Вследствии симметрии достаточно рассмотреть лишь верхнюю полуплоскость. В физических терминах имеем следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} y = 0, \tau_{xy} = 0, |x| < \infty \\ \sigma_y = \sigma_r, l < |x| < c, \sigma_y = 0, |x| < l \\ v = 0, |x| > c \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\sigma_y = \sigma_\infty, \sigma_x = \tau_{xy} = 0, x^2 + y^2 \rightarrow \infty \quad (5)$$

Используя метод Колосова-Мусхелешвили приходим к следующей граничной задаче для упругого случая: определение двух аналитических  $\phi(z)$  и  $\psi(z)$  функций в верхней полуплоскости удовлетворяющей следующим граничным условиям:

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi(x) + \overline{\Phi(x)} + x \cdot \Phi'(x) + \Psi(x) = 0, \quad |x| < l \\ \Phi(x) + \overline{\Phi(x)} + x \cdot \Phi'(x) + \Psi(x) = \sigma_2, \quad l < |x| < c \end{aligned} \right. \quad (6)$$

где  $\phi'(z) = \Phi'(z)$ ,  $\psi'(z) = \Psi'(z)$ .

Ищем решение в виде суммы двух функций:

$$\phi(z) = \phi_0(z) + \phi_1(z), \quad \psi(z) = \psi_0(z) + \psi_1(z) \quad (7)$$

где функции, представляющие решение задачи об одностороннем растяжении усилием  $\sigma_\infty$  плоскости с четырьмя сосредоточенными силами:

$$\left\{ \begin{aligned} \phi_0(z) &= -\sum_{k=1}^4 \frac{V_{k1} + iV_{k2}}{2\pi(1+\chi)} \ln(z - z_{0k}) + \frac{1}{4} \sigma_\infty z \\ \psi_0(z) &= \sum_{k=1}^4 \frac{\chi(V_{k1} - iV_{k2})}{2\pi(1+\chi)} \ln(z - z_{0k}) + \frac{1}{2} \sigma_\infty z \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Здесь  $z_{01} = L + iy_0$ ,  $z_{02} = -L + iy_0$ ,  $z_{03} = -L - iy_0$ ,  $z_{04} = L - iy_0$  точки приложения сосредоточенных сил;  $V_{11} = V_{21} = -V_{32} = -V_{42} = -P$ .

Тогда для функций  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$  получим следующую граничную задачу:

$$\Phi_1(x) + \overline{\Phi_1(x)} + \Omega_1(x) = g(x), \quad |x| < l \quad (9)$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f(x), & |x| < l \\ \frac{1}{2} (\sigma_r + f(x)), & l \leq |x| < c \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{(2-\chi)y_0 p}{\pi(1+\chi)} \left( \frac{1}{(x-L)^2 + y_0^2} + \frac{1}{(x+L)^2 + y_0^2} \right) - x \cdot \frac{2y_0 p}{\pi(1+\chi)} \times \\ \times \left( \frac{x-L}{((x-L)^2 + y_0^2)^2} + \frac{x+L}{((x+L)^2 + y_0^2)^2} \right) - \sigma_\infty \quad (10)$$

Ввиду вещественности функции  $f(x)$  и условий не бесконечности следует  $\Omega_1(z) = 0$ . Из симметрии задачи относительно оси  $OX$  следует  $\bar{\Phi}_1(z) = \Phi_1(z)$ . Тогда на основании (9) получим следующую задачу Римана – Гильберта:

$$\Phi_1^+(x) + \Phi_1^-(x) = 2g(x), \quad |x| < c \quad (11)$$

Отсюда имеем:

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{z^2 - c^2}} \int_{-c}^c \frac{\sqrt{c^2 - t^2} g(t)}{t - z} dt, \quad \Psi_1(z) = -z \cdot \Phi_1'(z) \quad (12)$$

Последние формулы совместно с (8) и (7) дают решение поставленной упругой граничной задачи. Это позволяет на основании формул Колосова-Мухомелшвили получить следующие выражения для вертикального смещения  $v(x)$  на отрезке  $|x| < c$  и напряжения  $\sigma_y$  на интервале  $|x| < c$ :

$$v = \frac{\chi+1}{2\mu} \left\{ \frac{2(2-\chi)pLy \cdot (KT + MR)}{\pi^2(1+\chi)(K^2 + M^2)} J + \frac{\sigma_2}{2\pi} \times \right. \\ \left. \times \left( x \cdot \ln \frac{x\sqrt{c^2 - l^2} - l\sqrt{c^2 - x^2}}{x\sqrt{c^2 - l^2} + l\sqrt{c^2 - x^2}} - l \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{c^2 - x^2} - \sqrt{c^2 - l^2}}{\sqrt{c^2 - x^2} + \sqrt{c^2 - l^2}} \right| \right) \right\} \quad (13)$$

$$\text{где, } J = \frac{\sqrt{(c^2 - L^2 + y_0^2) + 4L^2 y_0^2}}{4Ly_0} \left\{ \frac{M}{2(K^2 + M^2)} \ln \frac{(1/\sqrt{c^2 - x^2} - d)^2 + m^2}{(1/\sqrt{c^2 - x^2} + d)^2 + m^2} - \right. \\ \left. - \frac{K}{K^2 + M^2} \left( \text{arctg} \frac{1/\sqrt{c^2 - x^2} - d}{m} + \text{arctg} \frac{1/\sqrt{c^2 - x^2} + d}{m} \right) \right\};$$

$$M = \sqrt{\frac{\sqrt{(c^2 - L^2 + y_0^2)^2 + 4L^2 y_0^2} - (c^2 - L^2 + y_0^2)}{2}};$$

$$K = \sqrt{\frac{\sqrt{(c^2 - L^2 + y_0^2)^2 + 4L^2 y_0^2} + (c^2 - L^2 + y_0^2)}{2}};$$

$$d = \frac{M}{\sqrt{(c^2 - L^2 + y_0^2)^2 + 4L^2 y_0^2}}; \quad m = \frac{K}{\sqrt{(c^2 - L^2 + y_0^2)^2 + 4L^2 y_0^2}};$$

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \ln \frac{H - H_1}{G - G_1} - \ln \frac{H + H_1}{G + G_1} \right\};$$

$$H = c^2 + L^2 + y_0^2 + \sqrt{(c^2 - L^2 + y_0^2)^2 + 4L^2 y_0^2} + 2Lc;$$

$$H_1 = \sqrt{2} \left\{ (c+L) \sqrt{\sqrt{(c^2 - L^2 + y_0^2)^2 + 4L^2 y_0^2} + c^2 - L^2 + y_0^2} - \right. \\ \left. - y_0 \sqrt{\sqrt{(c^2 - L^2 + y_0^2)^2 + 4L^2 y_0^2} - (c^2 - L^2 + y_0^2)} \right\};$$

$$G = c^2 + L^2 + y_0^2 + \sqrt{(c^2 - L^2 + y_0^2)^2 + 4L^2 y_0^2} - 2Lc;$$

$$H_1 = \sqrt{2} \left\{ (c-L) \sqrt{\sqrt{(c^2 - L^2 + y_0^2)^2 + 4L^2 y_0^2} + c^2 - L^2 + y_0^2} + \right. \\ \left. + y_0 \sqrt{\sqrt{(c^2 - L^2 + y_0^2)^2 + 4L^2 y_0^2} - (c^2 - L^2 + y_0^2)} \right\};$$

$$R = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2L} \sqrt{\sqrt{(c^2 - L^2 + y_0^2)^2 + 4L^2 y_0^2} - (c^2 - L^2 + y_0^2)} + 2y_0 c + \sqrt{2} y_0}{c^2 + \sqrt{(c^2 - L^2 + y_0^2)^2 + 4L^2 y_0^2} + \sqrt{2} c} \times \\ \times \frac{\sqrt{\sqrt{(c^2 - L^2 + y_0^2)^2 + 4L^2 y_0^2} + c^2 - L^2 + y_0^2}}{\sqrt{\sqrt{(c^2 - L^2 + y_0^2)^2 + 4L^2 y_0^2} + c^2 - L^2 + y_0^2} - (L^2 + y_0^2)};$$

$$\sigma_y = \frac{P}{\pi(1+\chi)} \left\{ y_0(\chi-2) \cdot \left( \frac{1}{(x-L)^2 + y_0^2} + \frac{1}{(x+L)^2 + y_0^2} \right) + 2y_0 x \times \right. \\ \times \left( \frac{x-L}{((x-L)^2 + y_0^2)^2} + \frac{x+L}{((x+L)^2 + y_0^2)^2} \right) + \frac{2y_0(\chi-2)(x^2 + L^2 + y_0^2)}{(x^2 - L^2 + y_0^2)^2 + 4L^2 y_0^2} + \\ \left. + \frac{4(2-\chi)Ly_0(KT+MR)}{\pi(K^2+M^2)} \cdot \frac{x\sqrt{x^2-c^2}}{(x^2 - L^2 + y_0^2)^2 + 4L^2 y_0^2} \right\} + \frac{2\sigma_2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{l} \sqrt{\frac{c^2-l^2}{x^2-c^2}}; \quad (15)$$

Для упруго-повреждающегося материала согласно модельным соотношениям (1) с учетом вида оператора повреждаемости на основании принципа соответствия Вольтерра-Работнова в формулах (13), (15) механические модули следует заменить соответствующими операторами с последующей расшифровкой.

Из условия ограниченности напряжения в крайней точке зоны предразрушения  $|x|=c$  получено первое соотношение связывающее три неизвестные функции:  $\sigma_r(t)$  — напряжение в зоне предразрушения; протяженности этой зоны  $c(t)$  и длину трещины  $l(t)$ :

$$-\frac{P}{\pi(1+\chi)} \left\{ \left( \chi - \frac{1}{2} + \frac{3L^2}{2y_0^2} \right) \cdot \frac{MT - KR}{K^2 + M^2} - \right. \\ \left. - \frac{2L((KT+MR)(c^2 - L^2 + y_0^2)(L^2 - y_0^2) - (MT - KR)2Ly_0c^2)}{y_0(K^2 + M^2) \cdot ((c^2 - L^2 + y_0^2)^2 + 4L^2 y_0^2)} \right\} +$$

$$+ \frac{L^2 + y_0^2}{2y_0} \cdot \frac{(KT + MR)(c^2 - L^2 + y_0^2)L - y_0(c^2 + L^2 + y_0^2)(MT - KR)}{(K^2 + M^2)((c^2 - L^2 + y_0^2)^2 + 4L^2 y_0^2)} \Bigg\} +$$

$$+ \pi \sigma_\infty - 2\sigma_r \arccos \frac{l}{c} = 0$$

Второе соотношение получим из условия выполнимости в вершине трещины критерия критического раскрытия трещины (3):

$$[v]_{x=l(t)} = \frac{\chi + 1}{2\mu} \left\{ \frac{4(2 - \chi)PLy_0(K(t)T(t) + M(t)R(t))}{\pi^2(1 + \chi)\sqrt{(c^2(t) - L^2 + y_0^2)^2 + 4L^2 y_0^2}} \cdot J(t, t) + \right.$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sigma_r(t) \nu(t) \ln \frac{c(t)}{l(t)} + \frac{1}{\pi} \int_0^t \Lambda(t - \tau) \cdot \left\{ \frac{4(2 - \chi)PLy_0(K(\tau)T(\tau) + M(\tau)R(\tau))}{\pi(1 + \chi)\sqrt{(c^2(\tau) - L^2 + y_0^2)^2 + 4L^2 y_0^2}} J(t, \tau) + \right.$$

$$+ \sigma_r(\tau) \left[ l(t) \ln \frac{l(t)\sqrt{c^2(\tau) - l^2(\tau)} - l(\tau)\sqrt{c^2(\tau) - l^2(\tau)}}{l(t)\sqrt{c^2(\tau) - l^2(\tau)} + l(\tau)\sqrt{c^2(\tau) - l^2(\tau)}} - \right.$$

$$\left. \left. - l(\tau) \ln \frac{\sqrt{c^2(\tau) - l^2(\tau)} - \sqrt{c^2(\tau) - l^2(\tau)}}{\sqrt{c^2(\tau) - l^2(\tau)} + \sqrt{c^2(\tau) - l^2(\tau)}} \right\} d\tau \right\} = \sigma_{cr} \quad (17)$$

Третье соотношение получаем из условия (2):

$$\sigma_r(t) + \frac{P}{\pi(1 + \chi)} \left\{ y_0(\chi - 2) \left( \frac{1}{(c(t) - L)^2 + y_0^2} + \frac{1}{(c(t) + L)^2 + y_0^2} \right) + 2y_0 c(t) \times \right.$$

$$\times \left( \frac{c(t) - L}{((c(t) - L)^2 + y_0^2)^2} + \frac{c(t) + L}{((c(t) + L)^2 + y_0^2)^2} + \frac{2y_0(\chi - 2)(c^2(t) + L^2 + y_0^2)}{(c^2(t) - L^2 + y_0^2)^2 + 4L^2 y_0^2} \right) \Bigg\} +$$

$$+ \frac{P}{\pi(1 + \chi)} \int_0^t \Omega(t - \tau) \cdot \left\{ y_0(\chi - 2) \left( \frac{1}{(c(t) - L)^2 + y_0^2} + \frac{1}{(c(t) + L)^2 + y_0^2} \right) + 2y_0 c(t) \times \right.$$

$$\times \left( \frac{c(t) - L}{((c(t) - L)^2 + y_0^2)^2} + \frac{c(t) + L}{((c(t) + L)^2 + y_0^2)^2} + \frac{2y_0(\chi - 2)(c^2(t) + L^2 + y_0^2)}{(c^2(t) - L^2 + y_0^2)^2 + 4L^2 y_0^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{4(2 - \chi)Ly_0(K(\tau)T(\tau) + M(\tau)R(\tau))}{\pi\sqrt{(c^2(\tau) - L^2 + y_0^2)^2 + 4L^2 y_0^2}} \cdot \frac{c(t)\sqrt{c^2(t) - c^2(\tau)}}{(c^2(t) - L^2 + y_0^2)^2 + 4L^2 y_0^2} \right\} d\tau +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^t \Omega(t - \tau) \sigma_r(\tau) \arctg \frac{c(t)}{l(t)} \sqrt{\frac{c^2(\tau) - l^2(\tau)}{c^2(t) - l^2(t)}} d\tau = \sigma_s \quad (18)$$

Таким образом для определения трех неизвестных функций  $\sigma_2(t)$ ,  $l(t)$  и  $c(t)$  имеем систему нелинейных двух интегральных (17) и (18) и одного алгебраического уравнения (16). Данная система уравнений определяет три периода развития трещины. Здесь проанализирован первый - инкубационный

период- это с момента нагружения до момента времени  $t_0$  стягивания трещины. Для этого периода  $0 \leq t \leq t_0, I(t) = I_0$ . В этом случае система уравнений (16), (18) служит для определения неизвестных функций  $\sigma_{2r}(t)$  и  $c(t)$ , а уравнение (17) служит для определения инкубационного периода  $t_0$ .

Ввиду математической сложности указанной системы уравнений используя известное приближение [6] для операторов наследственного типа, входящих в эту систему произведена численная реализация на основе составленной программы расчета для постоянного ядра  $M = const$  оператора поврежденности. На рис. 2 приведена кривая зависимости инкубационного периода- времени стягивания трещины- от относительного расстояния между линиями действия сосредоточенных сил.

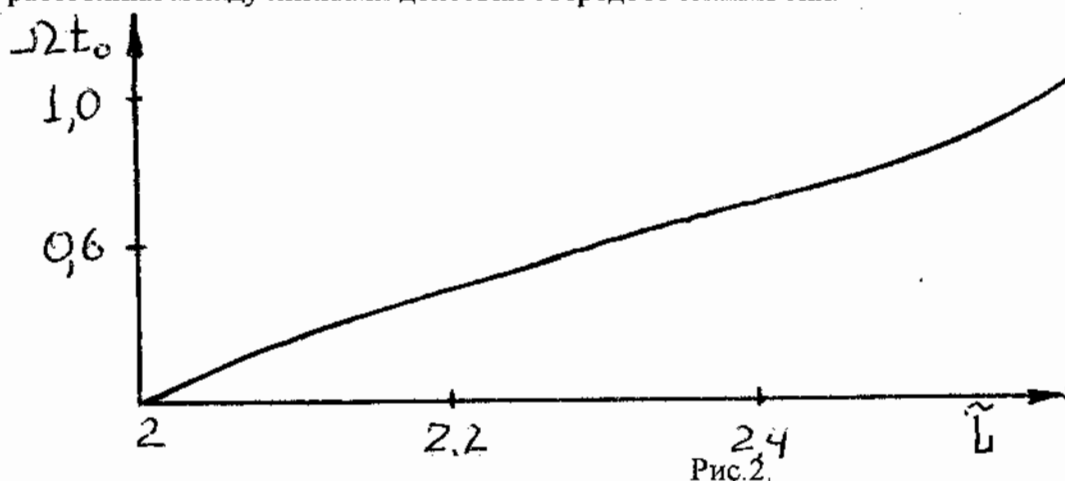


Рис.2.

На рис.3 приведена кривая зависимости времени стягивания трещины от относительного расстояния сосредоточенных сил от линии расположения трещины.

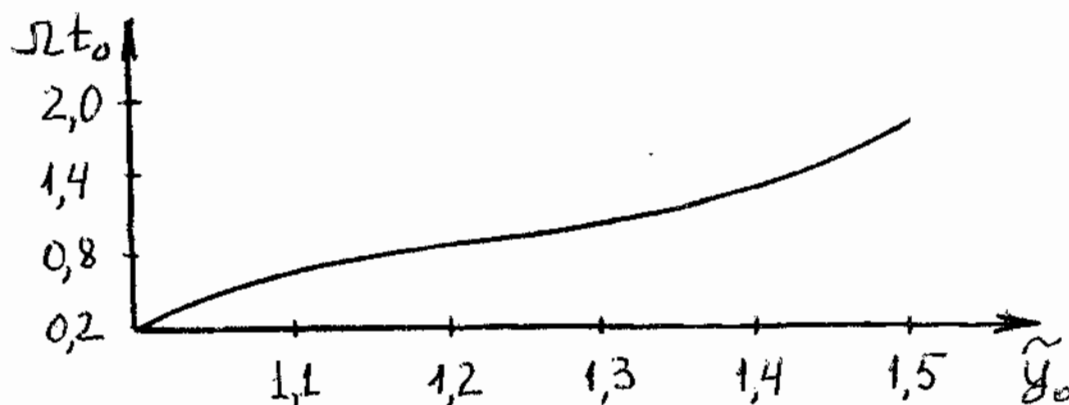


Рис.3.

Расчет произведен для данных:  $\tilde{l} = 1$ ;  $\alpha = 0,1$ ;  $\chi = 1$ ;  $eps = 0,07$ ;  $\bar{\delta}_{ст} = 1$ ;  $K = 0,3$ ;  $q = 0,1$ ; рисунку 2 соответствуют следующие данные:  $\tilde{y}_0 = 1$ ; при  $\tilde{L} = 2$ ,  $\Omega t_0 = 0,8$ ; при  $\tilde{L} = 2,3$ ,  $\Omega t_0 = 0$ ; при  $\tilde{L} = 2,5$ ,  $\Omega t_0 = 0,8$ ; при  $\tilde{L} = 2,6$ ,

$\Omega t_0 = 1$ ; рисунку 3 соответствуют следующие данные:  $\tilde{L} = 2$ ; при  $\tilde{y}_0 = 1$ ,  $\Omega t_0 = 0,2$ ; при  $\tilde{y}_0 = 1,3$ ,  $\Omega t_0 = 1,05$ ; при  $\tilde{y}_0 = 1,5$ ,  $\Omega t_0 = 1,8$ .

Как следует из этих рисунков характер этих кривых идентичен. С увеличением относительных расстояний точек приложения сосредоточенных сил от трещины вдоль и поперек ее время страгивания трещины сначала возрастает с убывающей скоростью, затем эта скорость стабилизируется, после чего увеличение инкубационного периода происходит с возрастающей скоростью.

### Литература

- [1]. Работнов Ю.Н. *Элементы наследственной механики твердых тел*. М., "Наука", 1977, с.384.
- [2]. Черепанов Г.П. *Механика хрупкого разрушения*. М., "Наука", 1974, с. 640.
- [3]. Мирсалимов В.М. *Неоднородные упругопластические задачи*. М., "Наука", 1987, -225, [1] с.
- [4]. Суворова Ю.В., Ахундов М.Б. *Длительное разрушение изотропной среды в условиях сложного напряженного состояния*. Машиноведение, 1986, №4, с. 40-46.
- [5]. Ахундов М.Б., Никитин Л.В., Суворова Ю.В. *Кинитическая модель развития трещины в повреждающейся среде*. Механика твердого тела, 1986, №5, с. 128-138.
- [6]. Каминский А.А. *Механика разрушения вязкоупругих тел*. Киев, "Наукова думка", 1980, с. 159.
- [7]. Партон В.З., Морозов Е.М. *Механика упругопластического разрушения*. М., "Наука", 1985, с. 502.

Axundov M.B.,  
Əliməmmədov R.Q.

### ZƏDƏLƏNMİŞ MÜHİTDƏ ÇATIN TORMOZLANMASI

Zədələnmiş mühitin Suvarova- Axundov modelinə əsasən, təsir xətləri çatın oxuna perpendikulyar olan dörd sıxıcı topa qüvvədən ibarət eninə istiqamətdə dartılmış müstəvidə çat məsələsinə baxılıb.

Bu məsələdə inkubasiya periodu analiz edilib. İnkubasiya periodunda çatın inkişaf vaxtının topa qüvvələrin təbiiq nöqtələrinin çatdan olan müxtəlif məsafələri ilə asılılıqları qurulub.

Akhundov M.B.,  
Alimamedov R.G.

### A BRAKING OF A CRACK IN THE DAMAGING MEDIUM

A problem on crack propagation in the damaging stretched plane on the presence of compressible symmetric concentrated forces had been solved on the basis of model relations by Suvarova- Akhundov.

An incubation of a crack propagation had been investigated. The influence of the disposition of concentrated forces on the time of beginning of crack movement had been exposed.