УДК 51.330: 115

НУРИЕВ У.Г.

АЛГОРИТМ С ГАРАНТИРОВАННОЙ ОЦЕНКОЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ О РАНЦЕ

До недавнего времени наиболее распространенным мерилом качества приближенных алгоритмов решения задач дискретной оптимизации являлась его эксперементальная статистическая эффективность [1]. Для выявления эффективности алгоритма генерируются тестовые задачи и изучаются величины отклонения построенных приближенных решений от оптимальных в "среднем".

В последнее время широкое распространение нашел другой подход, который принято называть "анализ наихудшего случая" [2]. При названном подходе устанавливается такая величина Δ, не зависящая от входных параметров задачи, что

$$\Delta \overset{(\geq)}{\leq} f(x) / f(x^{опт})$$

для каждой индивидуальной максимизационной (минимизационной) задачи из некоторого класса. Здесь $f(x)$- значение построенного с помощью приближенного алгоритма решений x, $f(x^{опт})$- значение оптимального решения $x^{опт}$. Величина Δ обычно называется гарантированной оценкой приближенного алгоритма.

Известно, что существуют гриди алгоритмы для одномерной задачи о ранце [3], вырабатывающие априорную оценку $f(x)$:

$$f(x) < f(x^{опт}) < 2f(x)$$

Для многомерной задачи о ранце (в минимизационной постановке) метод релаксации приводит к следующей гарантированной оценке [4]:

$$\frac{1}{m+1} \cdot f(x) \leq f(x^{опт}) \leq f(x),$$

где m - число ограничений.

В данной работе рассматривается двухмерная задача о ранце с булевыми переменными (в максимизационной постановке):

$$f(x) = \sum_{j \in w} c_j x_j \to \max, \qquad (1)$$

$$\sum_{j \in w} a_j x_j \leq A, \qquad (2)$$

$$\sum_{j \in w} b_j x_j \leq B, \qquad (3)$$

$$x_j = 0 \vee 1, \quad j \in w, \tag{4}$$

где $w = \{1, 2, \ldots, n\}$, $c_j, a_j, b_j \ (j \in w)$ и A, B положительные числа. Также предполагается, что

$$a_j < A, \quad b_j < B, \quad j \in w \tag{5}$$

$$\sum_{j \in w} a_j > A, \quad \sum_{j \in w} b_j > B \tag{6}$$

Алгоритм решения задачи *(1)-(4)*.

А1. Из ограничений *(2)* и *(3)* построим следующую заменяющую ограничение:

$$\sum_{j \in w} d_j x_j < 2 \tag{7}$$

здесь $d_j = \dfrac{a_j}{A} + \dfrac{b_j}{B}$, $j \in w$.

$a'_j = {a_j}/{A}$ и $b'_j = {b_j}/{A}$ обозначим, тогда ограничения *(2)* и *(3)* будут иметь следующий вид:

$$\sum_{j \in w} a'_j \le 1, \tag{2^1}$$

$$\sum_{j \in w} b'_j \le 1, \tag{3^1}$$

А2. Упорядочиваем переменные по неубыванию отношений c_j / d_j, $j \in w$.

Чтобы не усложнять изложения не будем перенумеровывать переменные и в дальнейшем предположим, что они упорядочены.

А3. Найдем $\exists p$, для которого

$$\sum_{j=1}^{p} d_j \le 2 < \sum_{j=1}^{p+1} d_j .$$

А4. $x = \left(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-p} \right)$ является допустимым решением задачи *(1) (7) (4)*.

Если это решение будет удовлетворять ограничениям *(2)* и *(3)*, то оно будет и допустимым решением задачи *(1)-(4)*.

Из [3] известно, что

$$\frac{1}{2} \cdot f\left(x^{опт}\right) \le f(x) \le f\left(x^{опт}\right)$$

А5. Если x не удовлетворяет одному из ограничений *(2)* и *(3)* (не умоляя общности, допустим это ограничение *(2)*), тогда найдем $\exists k$, для которого

$$\sum_{j=1}^{k} a'_j \le 1 \le \sum_{j=1}^{k+1} a'_j \qquad (8)$$

А6. Введем следующие обозначения:

$$w_1 = \{1, 2, \ldots, k\},\ w_2 = \{k+1\},\ w_3 = \{k+2, \ldots, p\},\ w_4 = \{p+1\}.$$

$$C_i = \sum_{j \in w_i} c_j, \quad i = \overline{1,4}.$$

$f(x^*) = \max_{i=\overline{1,4}} \{C_i\}$ примем как приближенное решение задачи *(1)-(4)*.

Пусть

$$w_{i^*} = arc \max_{w_i} \{C_i\}$$

тогда

$$x_j^* = \begin{cases} 1, & если \quad j \subset w_i^* \\ 0, & в\ противном\ случае. \end{cases}$$

А7. Конец.

Справедлива следующая теорема:

Теорема. $\frac{1}{4} f(x^{onm}) \le f(x^*) \le f(x^{onm})$.

Доказательство. Разрешимость задачи *(1)-(4)* вытекает из условия *(6)*, допустимость решения x_{w_1} получается из построения алгоритма, а допустимость решений x_{w_2} и x_{w_4} гарантируют условия *(5)*. Теперь покажем, что x_{w_3} тоже является допустимым решением.

Из *(7)* следует

$$A_{w_1} + A_{w_2} + A_{w_3} + B_{w_1} + B_{w_2} + B_{w_3} \le 2$$

где $A_{w_i} = \sum_{j \in w_i} a_i$, $B_{w_i} = \sum_{j \in w_i} b_i$.

Из *(8)* видно, что

$$A_{w_1} + A_{w_2} > 1 .$$

Отсюда получаем, что $A_{w_3} \le 1$, т.е. x_{w_3} является допустимым решением задачи *(1)-(4)*. Очевидно, что

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = \sum_{i=1}^{p+1} C_i \ge f(x^{onm}).$$

Отсюда следует

$$f(x^*) = \max_{i=\overline{1,4}} \{C_i\} \ge \frac{1}{4} f(x^{onm})$$

$f(x^*) \le f(x^{onm})$ тривиальна.

Теорема доказана.

Таким образом, для предложенного алгоритма $\Delta = \frac{1}{4}$ и трудоемкость алгоритма не превосходит $O(n\log_2 n)$, а именно: $O(2n)$ на шагах 1 и 4, плюс $O(n\log_2 n)$ на шаге 2, плюс $O(n)$ на шагах 3 и 5 и плюс $O(1)$ на шаге 6.

Литература

[1]. Схрейвер А. *Теория линейного и целочисленного программирования.* В 2-х т., М., "Мир", 1981.

[2]. Гэри М., Джонсон Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.* М., "Мир", 1982, с.418.

[3]. Нуриев У.Г. *К решению задачи о ранце с гарантированными оценками.* В кн.: Вопросы вычислительной математики и теоретической кибернетики., Баку, "Элм", 1988, с. 65-69.

[4]. Генс Г.В., Левнер Е.В. *Эффективные приближенные алгоритмы для комбинаторных задач.* Препринт/АНСССР, ЦЭМИ, М., 1981, с. 66.

Nuriyev Ü.Q.

İKİÖLÇÜLÜ ÇANTA MƏSƏLƏSİNİN TƏ'MİNATLI HƏLL ALQORİTMİ

İkiölçülü çanta məsələsinin həll etmək üçün $\Delta = \frac{1}{4}$ tə'minat qiyməi ilə qridi-alqoritm təklif edilmişdir. Alqoritmin mürəkkəbliyi $O(n\log_2 n)$- i aşmır.

Nuriyev U.G.

AN ALGORITHM WITH GUARATEE ESTIMATION FOR SOLVING TWO DIMENSIONAL KNAPSACK PROBLEM

A greedy algorithm for solving two dimensional knapsack problen with guarantee estimation $\Delta = \frac{1}{4}$ is presented. The comlexity of the algorithm does not exceed $O(n\log_2 n)$.