УДК 517. 948

АЛИЕВ Г.Ф.

О СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

В работе изучается применимость некоторого итерационного процесса к решению исследуемой задачи. С этой целью следуя схеме разработанной в [1, 3], строится аппроксимирующая задача и доказывается сходимость ее решений к решению исходной задачи.

I. В работе рассматривается краевая задача

$$x''(t)+f[t,x(t),x(t),x(t-\tau(t)),x(t+h(t))]=0 \tag{1}$$

$$0\le t\le T,$$

$$x(0)=x_0,\quad x(T)=x_T,$$

$$x(t)=\begin{cases}\varphi_0(t) & на\quad E_0[\inf\{t-\tau(t)\},0]\\ \varphi_T(t) & на\quad E_T=[T,\sup\{t+h(t)\}]\end{cases}, \tag{2}$$

здесь функция $f(t,x,y,\bar{x},\bar{y})$ определена и непрерывна в $R=[0,T]\times[-r,r]\times\times[-r,r]\times[-r,r]\times[-r,r]$, $\tau(t)\ge 0, h(t)\ge 0$ - непрерывно- дифференцируемая функция, причем $1>\alpha\ge\tau'(t)$, $h'(t)\ge\beta>-1, \varphi_0(t), \varphi_T(t)$- непрерывные соответственно на E_0 и E_T функции.

В качестве аппроксимирующей задачи будем рассматривать следующую задачу

$$x''_{n+1}(t)=f[t,x_{n+1}(t),x_n(t),x_{n+1}(t-\tau(t)),x_n(t+h(t))], \tag{3}$$

$$0\le t\le T$$

$$x_{n+1}(0)=x_0,\quad x_{n+1}(T)=x_T,$$

$$x_{n+1}(t)=\begin{cases}\varphi_0(t) & на\quad E_0[\inf\{t-\tau(t)\},0]\\ \varphi_T(t) & на\quad E_T=[T,\sup\{t+h(t)\}]\end{cases}, \tag{4}$$

$$\varphi_0(0)=x_0,\quad \varphi_T(T)=x_T,$$

где $x_0(t)$, $(|x_0(t)|\le r)$- некоторая непрерывная функция.

$$x''(t)=f[t,x(t),\alpha(t),x(t-\tau(t)),\alpha(t+h(t))],$$

$$0\le t\le T,$$

$$x(0)=x_0,\quad x(T)=x_T$$

$$x(t)=\begin{cases}\varphi_0(t) & на \quad E_0[\inf\{t-\tau(t)\},0],\\ \varphi_T(t) & на \quad E_T=[T,\sup\{t+h(t)\}],\end{cases}$$

$$\alpha(t)=\begin{cases}\alpha_1(t) & на \quad E_0[\inf\{t-\tau(t)\},0],\\ \alpha_2(t) & на \quad E_T=[T,\sup\{t+h(t)\}],\end{cases}$$

имеет единственное решение $x(t)\left(|x(t)|\le r\right)$ при любой фиксированной непрерывной функции $\alpha(t)\left(|\alpha(t)|\le r\right)$; здесь $\alpha_1(t),\alpha_2(t)$- непрерывные соответственно на E_0 и E_T функции.

Лемма 1. *Пусть непрерывная функция $v(t)$ определенная на $[0,T]$удовлетворяет неравенству.*

$$D_B^{n}v+\Phi(t,v)\ge 0,\quad V(0)=U^*(0),\quad V(T)=U^*(T).$$

Тогда

$$V(t)\le U^*(t)\quad (0\le t\le T),$$

где $U^*(t)$- решение уравнения $U''(t)+\Phi(t,U)=0$.

Лемма 2. *Пусть $\varphi(t,U,U_1,V,V_1)\left(0\le t\le T,\ 0\le U,U_1,V,V_1\le 2r\right)$- непрерывная положительная функция. Пусть $\varphi(t,U,\eta_1(t),V,\eta_2(t))$ при любых непрерывных фиксированных $\eta_1(t),\eta_2(t)\in[0,2r]$ обобщенно монотонна по U,V. Пусть функция $\varphi(t,U,U_1,V,V_1)$ не убывает потретьему и по пятому аргументу и задача*

$$U''(t)+\varphi(t,U(t),U(t),U(t-\tau(t)),U(t+h(t)))=0,\quad (0\le t\le T),$$

$$U(0)=0,\quad U(T)=0,$$

$$U(t)=\begin{cases}\theta(t)=0 & на \quad E_0,\\ \tilde\theta(t)=0 & на \quad E_T,\end{cases}$$

имеет лишь нулевое решение. Пусть, наконец задача

$$U''(t)+\Phi[t,U(t),U(t-\tau(t))]=0,\quad 0\le t\le T,$$

$$U(0)=0,\quad U(\tau)=0,$$

$$U(t)=\begin{cases}\theta(t)=0 & на \quad E_0,\\ \tilde\theta(t)=0 & на \quad E_T,\end{cases}\qquad здесь\ \ \theta(0)=0,\quad \tilde\theta(t)=0$$

имеет единственное решение $U(t)\left(0\le U(t)\le 2r\right)$ и его можно найти.

Тогда последовательности $\varepsilon_n(t),\tilde\varepsilon_n(t),\tilde{\tilde\varepsilon}_n(t)$, определенные равенствами:

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_1''(t)+\varphi[t,\varepsilon(t),2r]=0\quad t\in[0,T],\\ &\varepsilon_{n+1}''(t)+\varphi[t,\varepsilon_{n+1}(t),\varepsilon_n(t)]=0,\quad t\in[0,T]\\ &\varepsilon_n(0)=\varepsilon_n(T)=0,\quad n=1,2,\ldots\end{aligned}\right\}\qquad (5)$$

$$\left.\begin{array}{c}\tilde{\varepsilon}_1''(t)+\varphi[t,\tilde{\varepsilon}_1(t),2r,\tilde{\varepsilon}_1(t),2r]=0,\quad[-\tau_0,0],\\ \tilde{\varepsilon}_{n+1}''(t)+\varphi[t,\tilde{\varepsilon}_{n+1}(t),\tilde{\varepsilon}_n(t),\tilde{\varepsilon}_{n+1}(t),\tilde{\varepsilon}_n(t)]=0,\quad[-\tau_0,0]\\ \tilde{\varepsilon}_n(-\tau_0)=0,\quad\tilde{\varepsilon}_n(0)=0.\end{array}\right\}\qquad(6)$$

$$\left.\begin{array}{c}\tilde{\tilde{\varepsilon}}_1''(t)+\varphi\left[t,\tilde{\tilde{\varepsilon}}_1(t),2r,\tilde{\tilde{\varepsilon}}_1(t),2r\right],\quad[T,T+h(t)],\\ \tilde{\tilde{\varepsilon}}_{n+1}''(t)+\varphi\left[t,\tilde{\tilde{\varepsilon}}_{n+1}(t),\tilde{\tilde{\varepsilon}}_n(t),\tilde{\tilde{\varepsilon}}_{n+1}(t),\tilde{\tilde{\varepsilon}}_n(t)\right]=0,\quad[T,T+h_0]\\ \tilde{\tilde{\varepsilon}}_n(T)=0,\quad\tilde{\tilde{\varepsilon}}_n(T+h_0)=0,\quad n=1,2,\ldots,\end{array}\right\}\qquad(7)$$

равномерно сходится к нулю.

Теорема. *Пусть непрерывная функция* $f(t,x,x,y,y)$ *определена в* $R=$ $=[0,T]\times[-r,r]\times[-r,r]\times[-r,r]\times[-r,r]$ *и в нем удовлетворяет условиям*

$$sign[(x-\bar{x})(y-\bar{y})][f(t,x,x_1,y,y_1)-f(t,\bar{x},x_1,\bar{y},y_1)]\le\Psi_1[t,|x-\bar{x}|,|y-\bar{y}|],$$

$$|f(t,x,x_1,y,y_1)-f(t,x,\bar{x}_1,y,\bar{y}_1)|\le\Psi_2(t,|x_1-\bar{x}_1|,|y_1-\bar{y}_1|),$$

где функция $\Psi(t,u,u_1,v,v_1)=\Psi_1(t,u,v)+\Psi_2(t,u_1,v_1)$ *удовлетворяет условиям леммы 2,* $\Psi_1(t,u,v)$ *обобщенно монотонна, а* $\Psi_2(t,u_1,v_1)$ *не убывает по* u_1, v_1.

$$|x_n(t)-x(t)|\le\tilde{\tilde{\varepsilon}}_n(t),\quad[-\tau_0,T+h_0]\qquad(8)$$

где $\tilde{\tilde{\varepsilon}}_n(t)=\{\varepsilon_n(t),\tilde{\varepsilon}_n(t),\tilde{\tilde{\varepsilon}}_n\}$.

Доказательство. Нам нужно показать, что последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится.

Пусть

$$V_{n,m}(t)=|x_n(t)-x_m(t)|.$$

Тогда

$$D_B''V_{n,m}(t)+\left[\Psi_1(t,V_{n,m}(t),V_{n,m}(t-\tau(t)))+\Psi_2(t,U_{1,n-0,m-1}(t),V_{1,n-0,m-1}(t+h(t)))\right]\ge0,$$
$$m\ge n.$$

Отсюда при $n=1,t\in[0,T]$ имеет $U_{1,m}(t)\le\varepsilon_1(t),V_{1,m}(t+h(t))\le\varepsilon_1(t)$.

Теперь, предполагая, что $U_{n-1,m}(t)\le\varepsilon_n(t),V_{n-1,m-1}(t+h(t))\le\varepsilon_{n-1}(t)$ и применяя лемму 1 получим

$$U_{n,m}(t)\le\varepsilon_n(t),\quad V_{n,m}(t+h(t))\le\varepsilon_n(t)\quad(0\le t\le h,m\ge n).$$

Аналогичным образом можно доказать, что

$$U_{n,m}(t)\le\varepsilon_n(t),\quad V_{n,m}(t-\tau(t))\le\tilde{\varepsilon}_n(t),\quad-\tau_0\le t\le0$$

$$U_{n,m}(t)\le\tilde{\tilde{\varepsilon}}_n(t),\quad V_{n,m}(t+h(t))\le\tilde{\tilde{\varepsilon}}_n(t),\quad(T\le t\le T+h_0).$$

Тогда, так как

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{\tilde{\varepsilon}}_n=0\quad(-\tau_0\le t\le T+\tau_0),$$

и всилу леммы 2 из вышеуказанных оценок следует фундаментальность $\{x_n(t)\}$. И пусть $x(t)$, $y(t)$ решения задачи:

$$|x(t)-t(t)| \le |x(t)-x_n(t)| + |x_n(t)-y(t)| \le 2\tilde{\tilde{\tilde{\varepsilon}}}_n(t).$$

Отсюда следует, что $x(t) \equiv y(t)$.

II. В этом пункте исследуется задача

$$x''(t) + f[t, x(t), x(t), x(t-\tau(t)), x(t+h(t)), x'(t-\tau(t)), x'(t+h(t))] = 0 \qquad (9)$$

$$(0 \le t \le T),$$

$$X(0) = X_0, \quad X(T) = X_T,$$

$$x(t) = \begin{cases} \varphi_0(t) & на \quad E_0 = [\inf(t-\tau(t)), 0]; \ \varphi_0(0) = X_0 \\ \varphi_T(t) & на \quad E_T = [T, \sup\{t+h(t)\}]; \ \varphi_T(T) = X_T \end{cases}, \qquad (10)$$

здесь функция $f[t, x(t), x(t-\tau(t)), x(t+h(t)), x'(t-\tau(t)), x'(t+h(t))]$ непрерывна по совокупности переменных.

Задача *(9)- (10)* аппроксимируется следующим образом:

$$x''_{n+1}(t) + f[t, x_{n+1}(t), x_n(t), x_{n+1}(t-\tau(t)),$$

$$x_n(t+h(t)), x'_{n+1}(t-\tau(t)), x'_n(t+h(t))] = 0 \qquad (11)$$

$$(0 \le t \le T),$$

$$X_{n+1}(0) = X_0, \quad X_{n+1}(T) = X_T, \quad (n = 0,1,\ldots), \qquad (12)$$

$$X_{n+1}(t) = \begin{cases} \varphi_0(t) & на \quad E_0; \quad \varphi_0(0) = X_0, \\ \varphi_T(T) & на \quad E_T; \quad \varphi_T(T) = X_T, \end{cases} \qquad (13)$$

где $X_0(t)\left(|X_0(t)| \le r\right)$некоторая непрерывная функция.

Предполагается, что при любой фиксированной функции $\alpha(t)$ $\left(|\alpha(t)| \le r\right)$ задача

$$x''(t) + f[t, x(t), \alpha(t), x(t-\tau(t)), \alpha(t+h(t)), x'(t-\tau(t)), \alpha'(t+h(t))] = 0,$$

$$(0 \le t \le T)$$

$$X(0) = X_0, \quad X(T) = X_T,$$

$$x(t) = \begin{cases} \varphi_0(t) & на \quad E_0; \varphi_0(0) = X_0 \\ \varphi_T(t) & на \quad E_T; \varphi_T(T) = X_T \end{cases}, \qquad \alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1(t) & на \quad E_0 \\ \alpha_2(t) & на \quad E_T \end{cases},$$

имеет единственное решение $x(t), \left(|x(t)| \le r, \ |x'(t)| \le r', \ 0 \le t \le T\right)$.

Теорема. *Пусть функция* $f(t, x, y, z, \eta, \eta_1, \eta_2)$ *определена, непрерывна в* $R = [0,T] \times [-r, r]^4 \times [-r', r']^2$ *и удовлетворяет условию*

$$|f(t, x, y, z, \eta, \eta_1, \eta_2) - f(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\eta}, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)| \le$$

$$\le \Psi(t, |x-\bar{x}|, |y-\bar{y}|, |z-\bar{z}|, |\eta-\bar{\eta}|, |\eta_1-\bar{\eta}_1|, |\eta_2-\bar{\eta}_2|),$$

здесь функция Ψ *не убывает по третьему, пятому и седьмому аргументам.*

Тогда последовательность решений задачи (11)- (13) $\{x_n(t)\}$ *удовлетворяет неравенству*

$$|x_n(t) - x(t)| \le \varepsilon_n(t), \quad n = 0,1,\ldots, \qquad (14)$$

где последовательность $\{\varepsilon_n(t)\}$ - решение задач

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_n''(t)+\Psi(t,\varepsilon_{n+1}(t),\varepsilon_n(t),\varepsilon_{n+1}(t-\tau(t)),\\ \qquad \varepsilon_n(t+h(t)),\varepsilon_{n+1}'(t-\tau(t)),\varepsilon_n'(t+h(t)))=0\\ \varepsilon_{n+1}(0)=0, \quad \varepsilon_{n+1}(T)=0, \quad n=0,1,\ldots \end{array}\right\}, \qquad (15)$$

здесь $\varepsilon_0(t)\equiv 2r$.

Доказательство. Докажем, что $\{\varepsilon_n(t)\}$- сходящаяся последовательность. Для этого предположим, что решение *(15)* $\varepsilon_n(t)$ удовлетворяет неравенству $\varepsilon_n(t)\le\varepsilon_{n-1}(t)$; тогда используя результаты [2] имеем $\varepsilon_{n+1}(t)\le\varepsilon_n(t)$; таким образом получим, что $\{\varepsilon_n(t)\}$ есть сходящаяся к нулю последовательность.

Введя обозначения $V_{n,m}(t)=|x_n(t)-x_m(t)|\,(m>n)$, из *(11)-(13)* получим

$$\begin{array}{l} D_B''V_{n+1,m+1}(t)+\theta(t,V_{n+1,m+1}(t),V_{n,m}(t),V_{n+1,m+1}(t-\tau(t)),\\ \qquad V_{n,m}(t+h(t)),V_{n+1,m+1}'(t-\tau(t)),V_{n,m}'(t+h(t)))\ge 0, \quad (16)\\ \qquad 0<t<T\\ V_{n+1,m+1}(0)=0, \quad V_{n+1,m+1}(T)=0. \end{array}$$

Применяя схемы, изложенное в [1], [2], из *(15)- (16)* получим

$$V_{n,m}(t)=|X_n(t)-X_m(t)|\le\varepsilon_n(t), \quad m\ge n.$$

Из $\lim\varepsilon_n(x)=0 \quad n\to\infty$ следует сходимость последовательности $\{X_n(t)\}$. Единственность доказывается как в пункте.

Литература

[1]. Красносельский М.А., ЛевинА.Ю., МамедовЯ.Д., УМЖ, т. XVIII, №1, 1966 г.
[2]. Азбелев Н.В. *Диференциальные уравнения.* 7, №7, 1971г.
[3]. Алиев Г.Ф., Мамедов Я.Д. *Диференциальные уравнения.* 8, №5, 1972 г.
[4]. Алиев Г.Ф., Алиев Я.Э. ДОклад АН Азерб. (сер. Физ.-мат. и тех. наук), №7, 1984 г.
[5]. Мышкис А.Д. *Линейные диференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.* М.: Наука, 1972 г.

Əliyev H.F.

MEYİLLİ ARQUMENTLİ İKİNCİ TƏRTİB QEYRİ XƏTTİ DİFERİNSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN SƏRXƏD MƏSƏLƏSİNİN TƏĞRİBİ HƏLLİNİN YIĞILMASI HAQQINDA

İki bəndən ibarət olan işdə *(1)- (2)* və *(9)- (10)* meyilli arqumenli həm gecikən həm də qabaqlayan sərhəd məsələləri tədqiq olunur. Bu meyilli arqumentli gecikən və öyrənmək məqsədi ilə, onlara uyğun yığılmasını geçikən və qabaqlayan meyilli arqumentli məsələlər qurulur və alınmış məsələlərin təqribi həllinin əvvəlkinə yığılması verilir.

Aliyev G.F.

ON CONVREGENCE OF APPROXIMATE SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER WITH DEFLECTING ARGUMENT

Boundary value problems with deflecting advance and delay arguments are investigated in the paper consisting of two pard's *(1)- (2)* and *(9)- (10)*. To stidy the problem with diflecting delay and advance argument, corresponding problems with diflecting delay and advance arguments are consfructed and the convergence of approximate solutions to exact ones are proved.