МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

АБДУЛЛАЕВ Ф.Г., ЧАВУШ А.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ И ИХ АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА В ОБЛАСТЯХ С НУЛЕВЫМИ УГЛАМИ.

Пусть $G \subset \mathbf{C}$ - конечная область, ограниченная жордановой кривой $L = \partial G$; $z_0 \in G$ - произвольная фиксированная точка, а $W = \varphi(z), \varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) = 1$ - функция, конформно и однолистно отображающая область G на круг $|W| < r_0, r_0 = r_0(z_0)$.

Известно [1, стр. 426], что среди всех функций $f(z)$, голоморфных в G и нормированных условиями $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = 1$ минимум интеграла

$$\|f\|_{L_p^1} := \left(\iint_G |f'(z)|^p d\sigma_z\right)^{1/p} \to \min, \quad p > 0 \qquad (1)$$

доставляет единственная функция

$$\varphi_p(z) := \int_{z_0}^{z} [\varphi'(\zeta)]^{2/p} d\zeta \qquad (2)$$

и этот минимум равен πr_0^2.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу: среди всех полиномов $P_n(z)$, $\deg P_n \le n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, нормированных условиями $P_n(z_0) = 0$, $P_n'(z_0) = 1$ найти минимум интеграла

$$\|\varphi_p - P_n\|_{L_p^1} \to \min, \quad p > 0 \qquad (3)$$

Следуя стандартной схемой [2б стр. 137], нетрудно показать, что задача *(3)* имеет решение при $p > 0$ и это решение единственно при $p > 1$.

Полином $\pi_{n,p}(z), \pi_{n,p}(z_0) = 0, \pi'_{n,p}(z_0) = 1$, являющиеся решением задачи *(3)* назовём n- ым обобщённым полиномом Бибербаха (ОПБ) для пары (G, z_0). Отметим, что полиномы $\{\pi_{n,p}(z)\}$ ранее были использованы в [3] под другим названием.

Легко видеть, что если $\pi_{n,p}(z)$ является решением задачи *(3)*, то в случае $p = 2$ полином $\pi_{n,2}(z) \equiv \pi_n(z)$ будет решением задачи

$$\|Q_n\|_{L_2^1} \to \min$$

в классе полиномов $Q_n(z)$, $\deg Q_n \le n$, $Q_n(z_0)=0$, $Q_n'(z_0)=1$ и следовательно, ОПБ в случае $p=2$ совпадает с обычными полиномами Бибербаха.

Из полноты полиномов в L_p, $p>0$ [4, стр. 63] следует, что если G - область Каратеодори, то ОПБ сходятся к $\varphi_p(z)$ равномерно внутри G. В случае $p=2$, Келдыш [5], налагая дополнительные условия гладкости на границе области G, доказал сходимость полиномов $\{\pi_{n,2}(z)\}$ к функции $\varphi_2(z)\equiv\varphi(z)$ в замкнутой области $\overline{G}$ и получил оценку

$$\varepsilon_{n,p} := \left\|\varphi_p - \pi_{n,p}\right\|_{C(\overline{G})} := \sup_{z\in\overline{G}}\left|\varphi_p(z)-\pi_{n,p}(z)\right| \le c\cdot n^{-\gamma}, \qquad (4)$$

где константы $c>0$ и $\gamma>0$ от n не зависят.

В дальнейшем, оценка *(4)* была распространена на различные области: при $p=2$ в работах [6-10] (подробно см., напр., [7, 8]); при $p>2$ в работе [3]; при $1<p<2$ в работах [11, 12].

В настоящей работе рассмотрены различные классы областей, границы которых состоят из конечного числа квазиконформных дуг (с определенными коэффициентами квазиконформности), образующих между собой как внешние, так и внутренние нулевые углы, и в этих областях изучены поведения величины $\varepsilon_{n,p}$ при $p>1$, в зависимости от геометрии области G и параметра p.

Прежде, чем сформулировать основные результаты, приведём некоторые определения. Всюду в дальнейшем через $\alpha, \beta, c, c_1, \ldots$ обозначим неотрицательные константы, а через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$- достаточно малые неотрицательные константы, зависящие, возможно, от G и p.

Определение 1. [13, стр. 102-103; 14, стр. 8]. *Замкнутая жорданова кривая L называется K- квазиконформной $(K\ge 1)$, если существует K- квазиконформное отображение f области $D\supset L$, переводящее L в окружность.*

Обозначим через $F(L)$ множество всех $K(f)$- квазиконформных отображений f области $D(f)\supset L$, переводящих L в окружность и положим:

$$K(L) := \inf\{K(f),\, f\in F(L)\},$$

где $K(f)$- максимальная дилатация отображения f. Кривая $L-K$-квазиконформна тогда и только тогда, когда $K(L)\le K<+\infty$.

Определение 2. *Жорданова дуга L называется K- квазиконформной, если она является частью некоторой замкнутой K- квазиконформной кривой.*

Определение 3. *Будем говорить, что* $G \in PQ(K, \alpha, \beta), \alpha > 0, \beta > 0$, *если* $L = \partial G$ *состоит из конечного числа* K_j - *квазиконформных дуг,* $\max\limits_{1 \le j \le m} \{K_j\} = K$, *попарно стыкующихся в точках* $z_1, z_2, \dots, z_m$ *так, что в* z_1 L *локально* K - *квазиконформно, а в окрестности каждой* z_j, $j = \overline{2,m}$, *можно ввести систему координат* (x, y) *с началом в этой точке таким образом, чтобы при некоторых постоянных* $-\infty < C_1 < C_2 < +\infty$, $-\infty < C_3 < C_4 < +\infty$, $\varepsilon_i > 0$, $i = \overline{1,4}$ *выполнялись условия:*

а) если $j = \overline{2, p}$, *то*

$$\{(x, y): C_1 x^{1+\alpha} \le y \le C_2 x^{1+\alpha}, 0 \le x \le \varepsilon_1\} \subset CG,$$
$$\{(x, y): |y| \le \varepsilon_2 |x|, -\varepsilon_1 \le x \le 0\} \subset \overline{G};$$

б) если $j = \overline{p+1, m}$, *то*

$$\{(x, y): C_3 x^{1+\beta} \le y \le C_4 x^{1+\beta}, 0 \le x \le \varepsilon_3\} \subset \overline{G},$$
$$\{(x, y): |y| \le \varepsilon_4 |x|, -\varepsilon_3 \le x \le 0\} \subset CG.$$

Запись $G \in PQ(K, 0, \beta)$ означает, что у L отсутствуют внешние нулевые углы $(p = 1)$, а запись $G \in PQ(K, \alpha, 0)$ означает, что у L отсутствуют внутренние нулевые углы $(p = m)$. Если $p = m = 1$, то область G ограничена K - квазиконформной кривой.

Заметим, что относительно области D, о которой упоминается в определении 1, возможно два случая: $D = \mathbf{C}$ и $D \subset \mathbf{C}$. Случай $D = \mathbf{C}$ даёт глобальное определение K - квазиконформных кривых и поставленная задача подробно изучена в этом случае в работах [3, 11, 12]. Здесь рассматривается случай, когда $D \subset \mathbf{C}$ - конечная односвязная или двусвязная область, содержащая L. В этом случае будем говорить, что кривая $L - K$ - квазиконформно в локальном смысле. Преимущество этого случая над случаем $D = \mathbf{C}$ состоит в том, что для некоторых кривых удаётся выписать в явном виде коэффициент квазиконформности [14, т.4]. Например, аналитическая кривая- 1-квазиконформна, гладкая кривая с непрерывно меняющейся касательной- $(1 + \varepsilon)$- квазиконформна для любого малого $\varepsilon > 0$. (Чего нельзя утверждать в случае $D = \mathbf{C}$). А это даёт возможность получить результаты для "более простых областей", как следствия из приведённых здесь результатов.

Обозначим также:

$$p_1 := p_1(K) := \frac{\sqrt{8K^4 + 1} - 1}{K^2};$$

$\beta_0 \in [0, \sqrt{2} - 1)$ и $\tilde{\beta}_0 \in \left(\frac{p_1}{2} - 1, \sqrt{2} - 1\right)$ - произвольные числа;

$$\beta_1 := \beta_1(p; K) := \frac{2K^2 - 2}{pK^2 + 2K^2 + 2}$$

$$\beta_2 := \beta_2(p;K) = \frac{\sqrt{(4K^2p-p-2)^2+32K^2(4+p)}+4K^2p-p-2-16K^2}{16K^2};$$

Теорема 1. *Пусть* $p \geq 2(1+\beta_0)$; $G \in PQ(K,\alpha,\beta)$, $K \geq 1$, $0<\alpha<\frac{2}{p}$, $\beta < \min\left\{\beta_0;\frac{2}{p+2}\right\}$, *если* $\beta_0 > 0$ *и* $\beta = 0$, *если* $\beta_0 = 0$. *Тогда, для каждого* $n \geq 3$

$$\varepsilon_{n,p} \leq C_1 \begin{cases} \sqrt{\ln\ln n}(\ln n)^{\frac{2\alpha-1}{2\alpha}}, & p=2, \quad \alpha<\frac{1}{2} \\ (\ln n)^{\frac{\alpha p-2}{2\alpha p}}, & p>2, \quad \alpha<\frac{2}{p}. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть* $p \geq 2(1+\beta_0)$; $G \in PQ(K,0,\beta)$, $K \geq 1$, $\beta \leq \min\{\beta_0;\beta_1\}$. *Тогда, для каждого* $n \geq 2$ *и произвольного* $\lambda \in \left(0,\frac{1}{pK^4}\right)$

$$\varepsilon_{n,p} \leq C_2 \cdot n^{-\lambda}.$$

Теорема 3. *Пусть* $2 < p \leq p_1$; $G \in PQ(K,0,\beta)$, $K \geq 1$, $\frac{p}{2}-1<\beta< \min\left\{\beta_1;\frac{1+2K^4(p-2)}{4K^4}\right\}$. *Тогда, для каждого* $n \geq 2$ *и произвольного* $\lambda \in \left(0,\frac{1-2K^4(2\beta+2-p)}{pK^4}\right)$

$$\varepsilon_{n,p} \leq C_3 n^{-\lambda}.$$

Теорема 4. *Пусть* $p \geq 2(1+\tilde{\beta}_0)$; $G \in PQ(K,0,\beta)$, $K \geq 1$, $\beta_1 < \beta < \min\left\{\frac{2}{p+2};\tilde{\beta}_0\right\}$. *Тогда, для каждого* $n \geq 2$ *и произвольного* $\lambda \in \left(0,\frac{2-(p+2)\beta}{2p(1+\beta)K^2}\right)$

$$\varepsilon_{n,p} \leq C_4 \cdot n^{-\lambda}.$$

Теорема 5. *Пусть* $2-\frac{1}{2K^4}<p<2$; $G \in PQ(K,0,\beta)$, $K \geq 1$, $\beta < \min\left\{\beta_1;\frac{2}{p+2}(p-1);\frac{1-2K^4(2-p)}{4K^4}\right\}$. *Тогда, для каждого* n *и произвольного* $\lambda \in \left(0,\frac{1-4K^4(2\beta+2-p)}{pK^4}\right)$

$$\varepsilon_{n,p} \leq C \cdot n^{-\lambda}.$$

Теорема 6. *Пусть* $\frac{3}{2} < p < 2$; $G \in PQ(K, 0, \beta)$, K *такого, что* $\beta_1 < \beta_2$, $\beta_1 < \beta < \beta_2$. *Тогда для каждого* $n \geq 2$ *и произвольного* $\lambda \in \left(0, \frac{2-(p+2)\beta}{2p(1+\beta)K^2} - \frac{2}{p}(2\beta + 2 - p)\right)$

$$\varepsilon_{n,p} \leq C_6 \cdot n^{-\lambda}.$$

Теорема 7. *Пусть* $p > 2 - \frac{1}{sK^4}$, $s = \min\{2; K^2\}$ *и область* G *ограничена* K *- квазиконформной* $(K \geq 1)$ *кривой. Тогда для каждого* $n \geq 2$ *и произвольного*

$$\lambda \in \begin{cases} \left(0, \frac{1}{pK^4}\right), & p \geq 2 \\ \left(0, \frac{1}{pK^4} - s\left(\frac{2}{p} - 1\right)\right), & 2 - \frac{1}{sK^4} < p < 2 \end{cases}$$

$$\varepsilon_{n,p} \leq C_7 \cdot n^{-\lambda}.$$

Следствие.

1⁰. *Теоремы 1-4 обобщают результаты работы [3] на случай области с внутренними и внешними нулевыми углами, а теоремы 5-7 распространяют тот же результат на случай* $p < 2$.

2⁰. *В случае* $p = 2$, *из теорем 2 и 7 следует, что для областей с гладкой границей, имеющих непрерывно меняющуюся касательную справедливы утверждения этих теорем для* $\forall \lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. *Этот результат был получен в* [6].

3⁰. *Теоремы 5 и 6 также выполняются в случае* $p = 2$. *Однако, более точные результаты были получены в* [10].

В основе доказательств теорем 1-7 лежат следующие леммы

Лемма 1. *Пусть* $p > 1$; $G \in PQ(K, \alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \min\left\{2 - \frac{2}{p}; \frac{2}{p}\right\}$, $0 \leq \beta < p_0 = \min\left\{p - 1; \frac{2}{p+2}(p-1); \frac{2}{p+2}\right\}$. *Тогда, для каждого* $n \geq 3$

$$\|\varphi_p - \pi_{n,p}\|_{L^1_p} \leq C_8 \cdot \begin{cases} \sqrt[p]{\ln\ln n}(\ln n)^{\frac{p\alpha-2}{2p\alpha}}, & 1 < p \leq 2 \\ (\ln n)^{\frac{p\alpha-2}{2p\alpha}}, & p > 2 \end{cases}$$

Лемма 2. *Пусть* $p > 1$; $G \in PQ(K, 0, \beta)$, $0 < \beta < p_0$. Тогда *для каждого* $n \geq 2$ *и произвольного*

$$\lambda \in \begin{cases} \left(0, \frac{1}{pK^4}\right), & \beta < \min\left\{p_0; \frac{2K^2-2}{2K^2+pK^2+2}\right\}, \\ \left(0, \frac{2-(p+2)\beta}{2p(1+\beta)K^2}\right), & \frac{2K^2-2}{2K^2+pK^2+2} \le \beta < p_0 \end{cases}$$

справедливо

$$\left\|\varphi_p - \pi_{n,p}\right\|_{L^1_p} \le C_9 \cdot n^{-\lambda}$$

Дадим схему доказательства этих лемм. Поскольку граничные дуги области $G \in PQ(K, \alpha, \beta)$ являются квазиконформными, то относительно каждой такой дуги возможно квазиконформное отражение [15, стр.71]. С помощью таких отражений, функцию $\varphi_p(z)$ продолжаем на некоторую внешнюю окрестность кривой L и для продолжённой функции выписываем интегральное представление Коши-Помпеу. Полученная функция представима в виде суммы двух функций: первая, аналитическая в $\overline{G}$, которая хорошо приближается полиномами; вторая, функция, содержащая некоторую информацию об изменении меры площади некоторой окрестности граничной особой точки.

Далее остаётся воспользоваться следующей леммой, являющейся аналогом леммы 15 [7] на случай $p \neq 2$.

Лемма 3. *Пусть числовые последовательности* $\{\alpha_{n,p}\}, \{\beta_{n,p}\}$ *таковы, что* $\alpha_{n,p} \uparrow, \beta_{n,p} \downarrow, \alpha_{n,p}\beta_{n,p} \downarrow$ *при* $n \to \infty$ *и существует такая последовательность индексов* $\{n_k\}, k = 1, 2, \ldots,$ *что при некоторых* $0 < \varepsilon_1 < 1$ *и* $C_{10} \ge 1$ *и* $\forall k = 1, 2, \ldots$

$$\alpha_{n_{k+1},p} \le C\alpha_{n_k,p}$$

$$\alpha_{n_{k+1},p} \cdot \beta \le \varepsilon_1 \alpha_{n_{k+1},p} \cdot \beta_{n_{k+1},p}.$$

Если область G такова, что ОПБ для этой области удовлетворяет условию

$$\left\|\varphi_p - \pi_{n,p}\right\|_{L^1_p(G)} \le C_{11} \cdot \beta_{n,p}, \tag{5}$$

а для произвольного полинома $P_n(z), \deg P_n \le n, P_n(z_0) = 0$ *выполняется* неравенство

$$\left\|P_n\right\|_{C(\overline{G})} \le C_{12} \cdot \alpha_{n,p} \left\|P_n\right\|_{L^1_p(G)}, \tag{6}$$

то

$$\varepsilon_{n,p} \le C_{13} \cdot \alpha_{n,p} \cdot \beta_{n,p}.$$

Следовательно, для доказательства приведенных теорем достаточно взять вместо неравенства *(5)* леммы1 и 2, а вместо *(6)*- лемму 2.5 [16].

Литература

[1]. Привалов И.И. *Введение в теории функций комплексного переменного.* Наука, 1984. –436 с.

[2]. Davis P.J. *Interpolation and appoximation.* –New York. Toronto. London. 1963. -393 p.

[3]. Исрафилов Д.М. *Аппроксимационные свойства экстремальных полиномов.* -Деп. в ВИНИТИ №5461-81 Деп., 1981. –24 с.

[4]. Уолш Дж.Л. *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области.* –Москва, 1961. –508 с.

[5]. Келдыш М.В. *Sur l' approximation en moyenne quadraque des functions analytique.* -Мат. Сб., 1939, 5, №2. –с. 349-401.

[6]. Мергелян С.Н. *Некоторые вопросы конструктивной теории функций.* –Тр. МИАН им. М.А. стеклова, 1951, 37. -91с.

[7]. Андриевский В.В. *Равномерная сходимость полиномов Бибербаха в областях с кусочно- квазиконформной границей.* –В кн. "Теория отоб. и приб. функ.", Киев, 1983. –с. 3-18.

[8]. Gaier D. *On the convergence of the Bieberbach Polynomials in Regions with corners.* –Const. Approx. 1988, №4. –p. 289-305.

[9]. Абдуллаев Ф.Г. *Равномерная сходимость полиномов Бибербаха в области с внутренними нулевыми углами.* –Док. АН УССР, серия "А", 1989, №: 12. –с. 3-5.

[10]. Abdullayev F.G. & Baki A. *On the convergence of Bieberbach Polynomials in domains with interior zero angles.* –Indian J.Pure and Appl. Math. (to appear).

[11]. Абдуллаев Ф.Г. *Аппроксимационные свойства обобщённых полиномов Бибербаха в областях с кусочно- квазиконформной границей.* –Докл. АН Укр., серия "А", 1997, №2. –с. 3-6.

[12]. Abdullayev F.G. & Çavuş A. *On the uniform convergence of the Generalized Bieberbach Polynomials in regions with K - quasiconformal boundary.* –J. of Approx. Theory and Appl. (to appear), 1996.

[13]. Lehto O., Virtaneu K.I. *Quasiconformal mappings in the plane.* –Berlin etc., 1973. -260 p.

[14]. Rickman S. *Characterization of quasiconformal arcs.* –Annal. Acad. Scien. Fenn., ser.: A.1, Mathematica, 395, 1966. –p.30.

[15]. Альфорс Л. *Лекции по квазиконформным отображениям.* –Москва, "Мир", 1969. –133с.

[16]. Abdullayev F.G. *Uniform convergence of the Generalized Bieberbach Polynomials in regions with non zero angles.* –Acta Math. Hung. 1997. Vol. 77. №3, p. 223-246.

Abdullayev F.G.,
Çavuş A.

EKSTREMAL POLİNOMLAR VƏ ONLARIN SIFIR BUCAQLI BÖLGƏLƏRDƏ YAXINLAŞMA XASSƏLƏRİ

Məqalədə sıfır bucaqlı bölcələrdə ekstremal polinomların verilən funksiyaya düzgün yaxınlaşması və bu yaxınlaşmanın sür'əti öyrənilir.

Abdullayev F.G.,
Chavush A.

EXTREMAL POLYNOMIALS AND THEIR APPROXIMATION PROPERTIES IN DOMAINS WITH ZERO ANGLES

In this article investigated yhe convergence of the Extremal Polynomials in domains with a piecewise quasiconformal boudary.