УДК 517.5

АЛИЕВ Р.М.

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ОДНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ

Пусть $y(x)$ является решением дифференциального уравнения

$$Ty \equiv y^{(2r)} - \lambda \sum_{i=0}^{2r-2} a_i(x) y^{(i)} = f(x) \qquad (1)$$

при граничных условиях

$$y^{(\sigma_i)}(0) = y^{(\gamma_i)}(1) = 0 \quad (i = 1,2,\dots,r), \qquad (2)$$

где

$$a_i(x) \in C(0,1) \quad (i = 0,1,\dots,2r-2), \quad f(x) \in C(0,1),$$

$$\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_r, \quad \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_r, \quad \sigma_i, \gamma_i \in \{0,1,\dots,2r-1\} \quad (i = 1,2,\dots,r)$$

Классом $A_{gT}^{(2r)} W_{L_{2,p}}$ назовем множество решений $y(x)$ краевой задачи {(1), (2)} при условии

$$\left(\int_0^1 p(x) \left| y^{(2r)}(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \le M_{2r}, \qquad (3)$$

где $p(x)$ - весовая функция, такая что $1/p(x) \le M$.

Пусть

А. Дифференциальное выражение $y^{(2r)}(x)$ при граничных условиях (2) имеет функцию Грина $g(x,t)$;

Б. краевые условия (2) являются самосопряженными;

В. λ не является собственным значением задачи {(1), (2)}.

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_0^1 y(x)dx = \int_0^1 y_n(x)dx + \\ + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{2r-2} A_k^{(l)} \left[y^{(l)}(x_k) - y_n^{(l)}(x_k) \right] + R_{nN}\left(y; x_k, A_k^{(l)} \right), \qquad (4)$$

где $y_n(x)$ - приближенное решение краевой задачи {(1), (2)}, найденное по методу коллокации, $0 \le x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} \le 1, N$ и n –фиксированные натуральные числа.

Если выполнены условия А,Б и В, то нетрудно показать, что для любой функции $y(x) \in A_{gT}^{(2r)} W_{L_{2,p}}$ справедливо равенство

$$R_{nN}(y;x_k,A_k^{(l)}) = \int_0^1 \left[y^{(2r)}(t) - y_n^{(2r)}(t)\right] F_{2r}(t)dt, \tag{5}$$

где

$$F_{2r}(t) = \int_0^t G(x,t)dx + \int_t^1 G(t,x)dx -$$
$$-\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{2r-2} A_k^{(l)} \left[E(x_k - t)\frac{\partial^l G(t,x_k)}{\partial x^l} + E(t - x_k)\frac{\partial^l G(x_k,t)}{\partial x^l} \right]$$

$$g(x,t) = \begin{cases} G(x,t) & npu \quad x \le t, \\ G(t,x) & npu \quad x > t, \end{cases} \qquad E(x-t) = \begin{cases} 1 & npu \quad x \ge t \\ 0 & npu \quad x < t \end{cases}$$

Действительно, из формулы (4) учитывая равенство

$$y(x) - y_n(x) = \int_0^1 g(x,t)\left[y^{(2r)}(t) - y_n^{(2r)}(t)\right]dt$$

находим

$$R_{nN}(y;x_k,A_k^{(l)}) = \int_0^1 [y(x) - y_n(x)]dx -$$
$$+\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{2r-2} A_k^{(l)} \left[y^{(l)}(x_k) - y_n^{(l)}(x_k)\right] =$$
$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 [E(x-t)G(t,x) + E(t-x)G(x,t)] \left[y^{(2r)}(t) - y_n^{(2r)}(t)\right]dt \right\} dx -$$

$$-\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{2r-2} A_k^{(l)} \int_0^1 \left[E(x_k - t)\frac{\partial^l G(t,x_k)}{\partial x^l} + E(t - x_k)\frac{\partial^l G(x_k,t)}{\partial x^l} \right] \times$$
$$\times \left[y^{(2r)}(t) - y_n^{(2r)}(t)\right]dt = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 [E(x-t)G(t,x) + E(t-x)G(x,t)]dx - \right.$$
$$\left. -\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{2r-2} A_k^{(l)} \left[E(x_k - t)\frac{\partial^l G(t,x_k)}{\partial x^l} + E(t - x_k)\frac{\partial^l G(x_k,t)}{\partial x^l} \right] \right\} \times$$
$$\times \left[y^{(2r)}(t) - y_n^{(2r)}(t)\right]dt = \int_0^1 F_{2r}(t)\left[y^{(2r)}(t) - y_n^{(2r)}(t)\right]dt.$$

Далее введем в рассмотрение величину

$$\varepsilon_{nN}\left[A_{gT}^{(2r)} W_{L_{2,p}}\right] = \inf_{x_k A_k^{(l)}} \sup_{y \in A_{gT}^{(2r)} W_{L_{2,p}}} \left|R_{nN}\left(y; x_k A_k^{(l)}\right)\right| \tag{6}$$

Данная заметка посвящена оценке снизу величины (6).

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$Z^{(2r)} = y^{(2r)}(x) - y_n^{(2r)}(x), \qquad (7)$$

которое, очевидно, удовлетворяет условиям

$$Z^{(\sigma_i)}(0) = Z^{(\gamma_i)}(1) = 0 \quad (i = 1,2,...,r) \qquad (8)$$

Нетрудно убедиться в том, что $Z(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\left(\int_0^1 p(x)\left|Z^{(2r)}(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 p(x)\left|y^{(2r)}(x) - y_n^{(2r)}(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \le$$
$$\le 2E_n(y^{(2r)}(x))\left(\int_0^1 p(x)dx\right)^{1/2}, \qquad (9)$$

где $E_n\left(y^{(2r)}(x)\right)$ – наилучшее равномерное приближение непрерывной функции $y^{(2r)}(x)$ алгебраическими многочленами степени не выше n на отрезке $[0,1]$.

Классом $W_{L_{2,p}}^{(2r)}$ назовем множество решений $Z(x)$ краевой задачи $\{(7), (8)\}$ при условиях $a_i(x) \in C(0,1) \quad (i = 0,1,..2r-2), \quad f(x) \in C(0,1)$ и

$$\left(\int_0^1 p(x)\left|Z^{(2r)}(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \le 2E_n\left(\int_0^1 p(x)dx\right)^{1/2}, \qquad (10)$$

где $E_n = \sup\limits_{y \in A_{gT}^{(2r)} W_{L_{2,p}}} E_n(y^{(2r)}(x))$.

В силу равенства (5) для функции $Z(x) \in W_{L_{2,p}}^{(2r)}$ выполняется неравенство

$$\left|R_N\left(Z; x_k, A_k^{(l)}\right)\right| = \left|\int_0^1 Z(x)dx - \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{2r-2} A_k^{(l)} Z^{(l)}(x_k)\right| = \left|\int_0^1 Z^{(2r)}(t)F_{2r}(t)dt\right| \le$$
$$\le 2\sqrt{M}E_n\left(\int_0^1 p(t)dt\right)^{1/2}\left(\int_0^1 \left|F_{2r}(t)\right|^2 dt\right)^{1/2} \qquad (11)$$

Неравенство (11) для функции

$$Z^{(2r)} = 2\sqrt{M}E_n\left(\int_0^1 p(t)dt\right)^{1/2}\left(\int_0^1 \left|F_{2r}(t)\right|^2 dt\right)^{-1/2}\left|F_{2r}(t)\right| sign F_{2r}(t) \qquad (12)$$

превращается в равенство.

Таким образом, правая часть неравенства (11) есть наименьшее число, для которого оно выполняется для всех функций $Z(x) \in W_{L_{2,p}}^{(2r)}$.

Тогда

$$\sup_{Z \in W_{L_{2,p}}^{(92r)}} \left|R_N\left(Z; x_k, A_k^{(l)}\right)\right| = 2\sqrt{M}E_n\left(\int_0^1 p(t)dt\right)^{1/2}\left(\int_0^1 \left|F_{2r}(t)\right|^2 dt\right)^{1/2} \qquad (13)$$

Так как выражение уравнение (7) частным является случаем уравнения (1), то

$W_{L_{2,p}}^{(2r)} \subset A_{gT}^{(2r)} W_{L_{2,p}}$. Тогда

$$\sup_{y\in A_{gT}^{(2r)}W_{L_{2,p}}}\left|R_{nN}\left(y;x_k,A_k^{(l)}\right)\right|\geq\sup_{Z\in W_{L_{2,p}}^{(2r)}}\left|R_{nN}\left(Z;x_k,A_k^{(l)}\right)\right|=2M^{1/2}E_n\times$$
$$\times\left(\int_0^1 p(t)dt\right)^{1/2}\left(\int_0^1\left|F_{2r}(t)\right|^2dt\right)^{1/2} \qquad (14)$$

Из неравенства (14) получим, что

$$\varepsilon_{nN}\left[A_{gT}^{(2r)}W_{L_{2,p}}\right]\geq 2\sqrt{M}E_n\left(\int_0^1 p(t)dt\right)^{1/2}\times\left(\int_0^1\left|F_{2r}^*(t)\right|^2dt\right)^{1/2}, \qquad (15)$$

где

$$\left(\int_0^1\left|F_{2r}^*(t)\right|^2dt\right)^{1/2}=\inf_{x_k,A_k^{(l)}}\left(\int_0^1\left|F_{2r}(t)\right|^2dt\right)^{1/2}=\frac{L_{2r}(1)}{(2r)!\sqrt{4r+1}}\omega_N^{2r}$$

$L_{2r}(x)$ – многочлен Лежандра степени $2r$ со старшим коэффициентом равным единице, $\omega_N=\left[2(N-1+\sqrt[2r]{L_{2r}(1)})\right]^{-1}$.

Отсюда имеем, что

$$\varepsilon_{nN}\left[A_{gT}^{(2r)}W_{L_{2,p}}\right]\geq 2\sqrt{M}E_n\left(\int_0^1 p(t)dt\right)^{1/2}\frac{L_{2r}(1)}{(2r)!\sqrt{4r+1}}\omega_N^{2r} \qquad (16)$$

Следовательно, справедлива следующая

Теорема. *Пусть*

1) *выполнены условия А, Б и В;*
2) *в качестве узлов коллокации выбраны нули многочлена $Q_n(x)$ степени n, где $\{Q_n(x)\}$ система отрогональных алгебраических многочленов относительно веса p(x) на отрезке [0,1];*
3) *Квадратурная формула*

$$\int_0^1 Z(x)dx=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{2r-2}A_k^{(l)}Z^{(l)}(x_k)+R_N\left(Z;x_k,A_k^{(l)}\right)$$

точна для многочленов степени 2r-1;

тогда среди всевозможных квадратурных формул вида (4) существует для класса $A_{gT}^{(2r)}W_{L_{2,p}}$ квадратурная формула, определяемая с коэффициентами

$$A_k^{(2i+1)}=0 \quad (i=0,1,\dots,r-2)$$
$$A_k^{(2i)}=\frac{2h^{2i+1}}{(2r)!}L_{2r}^{(2r-2i+1)}(1) \quad (i=0,1,\dots,r-1)$$
$$(k=1,2,\dots,N-2)$$
$$(-1)^lA_0^{(l)}=A_{N-1}^{(l)}=\frac{h^{l+1}}{(2r)!}\left\{\frac{(2r)!}{(l+1)!}\left[L_{2r}(1)\right]^{\frac{l+1}{2r}}+(-1)^l\cdot L_{2r}^{(2r-l-1)}(1)\right\}$$
$$(l=0,1,\dots,2r-2)$$

и узлами

$$X_k=\left(2k+\sqrt[2r]{L_{2r}(1)}\right)\omega_N,$$

для которых справедливо неравенство *(16)*, где $h = \omega_N$.

Литература

[1]. Алиев Р.М. *Оптимальные квадратурные формулы на множествах решений краевых задач.* Дифференциальные уравнения, 1989, т. 25, №7, с.1161-1171.
[2]. Алиев Р.М. *Наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов дифференцируемых функций.* ДАН СССР, 1989, т.306, №1, с. 11-15.
[3]. Никольский С.М. *Квадратурные формулы.* М.: Наука, 1988, 255с.

Əliyev R.M. **BİR KVADRATUR DÜSTURUN XƏTASININ QİYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ**

Məqalədə adi diferensial tənlik üçün qoyulmuş sərhəd məsələsinin həlləri çoxlugunda təyin olunan sinifdə kvadratur düstur qurulur və onun xətası aşagıdan qiymətləndirilir.

Aliev R.M. **ON THE ESTIMATION OF ERROR FOR ONE QUADRATURE FORMULA**

In this paper the quadrature formula is constructed and the estimation from below of its error is found.